УДК 621.371:621.398

# ОПЕРАТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

***В.В. Авраменко, доц.; Н.Ю. Слепушко, ассист.***

## ВВЕДЕНИЕ

Оперативный контроль динамических объектов позволяет решать такие задачи, как прогнозирование значений выходных процессов, определение параметров адаптивной системы управления этим объектом и др. Для этого целесообразно определять дифференциальное уравнение, описывающее объект в текущий момент времени. При этом часто ставится условие минимизации текущего интервала времени, необходимого для получения этого уравнения.

Еще одной задачей оперативного контроля является распознавание текущего состояния объекта. Диагностируемые объекты обычно подвергаются воздействиям, вызывающим изменения их статических и динамических характеристик. В результате могут изменяться значения коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего объект. Могут также возникать и такие состояния объекта, когда изменяется порядок дифференциального уравнения. Кроме того, ранее линейный объект может стать нелинейным, а в нелинейном объекте могут изменяться параметры нелинейности. Так, например, если диагностируемый объект является системой автоматического регулирования, то указанные выше состояния возникают при обрывах в цепях обратных связей или в корректирующих звеньях, при появлении зоны нечувствительности в характеристике датчика, при возникновении люфта в исполнительном механизме и др. Обнаружение таких событий является важной практической задачей. Для ее решения необходимо создать систему контроля, которая была бы инвариантной относительно значений коэффициентов при слагаемых в дифференциальном уравнении, описывающем контролируемый объект.

Оперативный контроль динамических объектов также требуется для определения интервалов времени, на которых в объекте происходят переходные процессы. По условию объект квазистационарный, однако могут происходить события, приводящие к быстрому изменению параметров объекта от одних постоянных значений к другим, также постоянным. Обнаружение переходных процессов необходимо при идентификации объекта в процессе его нормальной работы.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается квазистационарный объект с одним входным и одним выходным процессами, описываемыми функциями соответственно $x(t)$ и $y(t)$ времени $t$. Эти функции непрерывные и гладкие и для них существуют производные, необходимые для решения задачи. Объект описывается обыкновенным линейным или нелинейным дифференциальным уравнением, в правой части которого находится только $x(t)$.

Коэффициенты уравнения за время решения задачи считаются постоянными.

Известна оценка сверху порядка дифференциального уравнения.

Для нелинейных объектов априорно известны характеристики нелинейных элементов и какие функции они преобразуют.

Контролируемый объект работает в условиях, когда можно пренебречь влиянием помех на выходной сигнал.

Требуется по известным в текущий момент времени $t$ значениям функций $x(t)$, $y(t)$ и их производных различного порядка решить одну из следующих задач:

1 Получить дифференциальное уравнение, описывающее контролируемый объект в момент времени $t$;

2 Определить, имеет ли место в текущий момент времени изменение состояния объекта по сравнению с исходным.

Конкретно могут измениться коэффициенты дифференциального уравнения, его порядок, характеристики нелинейных элементов.

В объекте могут происходить переходные процессы.

Эти задачи можно решить с помощью предложенных в [1, 2] функций непропорциональностей. Существуют функции непропорциональностей по производным, по значениям и относительные непропорциональности. Предполагается использовать непропорциональности по производным.

Для функции $y = f(x)$ непропорциональность по производной **n**-го порядка имеет вид

$$@d_x^{(n)} y = \frac{y}{x^n} - \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n} \quad . \tag{1}$$

Здесь символ «@» обозначает операцию вычисления непропорциональности.

Символ *«d»* (от англ. derivative) означает, что непропорциональность по производной. В скобках указан порядок производной − *n*. Левая часть (1) читается как «эт $d$ $n$ $y$ по $x$». Эта непропорциональность равняется нулю, если $f(x)$ описывается выражением

$$y = kx^n \tag{2}$$

независимо от значения $k$.

Здесь $k$ - постоянный коэффициент; $n$ - целое число больше нуля.

Конкретно будет использоваться непропорциональность по производной 1-го порядка для функций, заданных параметрически. Для $x(t)$ и $y(t)$ непропорциональность по производной 1-го порядка $y(t)$ по $x(t)$ имеет вид

$$@d_{x(t)}^{(1)} y(t) = \frac{y(t)}{x(t)} - \frac{dy/dt}{dx/dt} . \tag{3}$$

Если в момент времени $t$ зависимость между $x(t)$ и $y(t)$ пропорциональная:

$$y(t) = kx(t) , \tag{4}$$

то непропорциональность (3) равняется нулю независимо от значения постоянного множителя $k$ в (4).

Для оперативного определения дифференциального уравнения по текущим $x(t)$, $y(t)$ и их производным предлагается использовать разработанный в [3] алгоритм. Он предназначен для анализа сигнала, представляющего собой сумму некоторых эталонных функций из заданного множества. Алгоритм позволяет распознать, какие функции образуют распознаваемый сигнал, с какими весовыми коэффициентами и с какими временными сдвигами.

Входную функцию $x(t)$ в правой части дифференциального уравнения можно рассматривать как распознаваемый сигнал, а его левую часть – как сумму эталонных функций с неизвестными весовыми коэффициентами. По условию $x(t)$, $y(t)$ и их производные известны. То есть фактически являются известными значения эталонных функций. Необходимо узнать, какие из них и с какими коэффициентами входят в сумму, образующую входную функцию $x(t)$.

## АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Вначале необходимо задать эталонные функции $f_i(t)$, где $i = 1, 2, \ldots n+1$. Здесь $n$ - априорно заданный предел порядка дифференциального уравнения. Для линейного объекта

$$\begin{aligned} &f_1(t) = y(t), \\ &f_2(t) = y'(t), \\ &f_3(t) = y''(t), \\ &\ldots \\ &f_{n+1}(t) = y^n(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Также обозначим

$$f_0(t) = x(t). \tag{6}$$

Для нелинейного объекта по условию известны характеристики нелинейных элементов (НЭ) и какие функции они преобразуют. В этом случае для задания эталонов следует полученные в момент времени $t$ функции преобразовать в соответствии с заданными характеристиками нелинейностей. Так, например, если $y(t)$ подвергается нелинейному преобразованию $F_1[y(t)]$, то соответствующая эталонная функция $f_1(t)$ должна иметь вид

$$f_1(t) = F_1[y(t)]. \tag{7}$$

Остальные эталонные функции определяются как и для линейного объекта.

С учетом обозначений (5-7) искомое дифференциальное уравнение запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i f_i(t) = f_0(t), \tag{8}$$

где $k_i$ - неизвестные коэффициенты. Требуется узнать, какие эталонные функции из множества $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\}$ входят в (8) и с какими коэффициентами с учетом того, что порядок уравнения неизвестен.

Задача решается поэтапно.

Первый этап. Предполагаем, что

$$f_0(t) = k_i f_i(t), \tag{9}$$

где $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Перебирая значения $i$ от 1 до $n+1$, вычисляем непропорциональность (3) функции $f_0(t)$ по $f_i(t)$. Обозначим ее через $F_{0i}(t)$:

$$F_{0i}(t) = @d^{(1)}_{f_i(t)} f_0(t) = \frac{f_0(t)}{f_i(t)} - \frac{f_0{}'}{f_i{}'}. \tag{10}$$

Проверяем условие

$$F_{0i}(t) = 0. \tag{11}$$

Если оно выполняется, значит, дифференциальное уравнение имеет вид (9). В него входит лишь одна эталонная функция $f_i(t)$ с весовым коэффициентом

$$k_i = \frac{f_0(t)}{f_i(t)}. \tag{12}$$

Если ни для одной эталонной функции условие (11) не выполняется, следует перейти ко второму этапу.

Второй этап. Предполагаем, что $f_0(t)$ является суммой, варианты которой можно рассматривать как сочетания по два эталона из $n+1$. Предположим, что это $f_i(t)$ и $f_j(t)$. Тогда

$$f_0(t) = k_i f_i(t) + k_j f_j(t), \tag{13}$$

где $k_i, k_j$ - неизвестные коэффициенты. Для $f_0(t)$ в виде (13) непропорциональность (3) $f_0(t)$ по $f_i(t)$ имеет вид

$$F_{0i}(t) = @d^{(1)}_{f_i(t)} f_0(t) = \frac{k_i f_i(t) + k_j f_j(t)}{f_i(t)} - \frac{\frac{d}{dt}[k_i f_i(t) + k_j f_j(t)]}{\frac{d}{dt}[f_i(t)]} = \tag{14}$$

$$= k_j\left[\frac{f_j}{f_i} - \frac{f_j{}'}{f_i{}'}\right] = k_j\, @d^{(1)}_{f_i(t)} f_j(t).$$

Обозначим

$$F_{ji}(t) = @d^{(1)}_{f_i(t)} f_j(t). \tag{15}$$

Тогда согласно (15) выражение (14) имеет вид

$$F_{oi}(t) = k_j F_{ji}(t). \tag{16}$$

Выражение (16) отражает пропорциональную зависимость между $F_{0i}(t)$ и $F_{ji}(t)$ в момент времени $t$ с неизвестным коэффициентом пропорциональности $k_j$.

Обозначим через $F_{0iji}(t)$ непропорциональность (3) функции $F_{0i}(t)$ по $F_{ji}(t)$ и вычислим ее.

$$F_{0iji}(t)=\frac{F_{0i}(t)}{F_{ji}(t)}-\frac{\frac{d}{dt}[F_{0i}(t)]}{\frac{d}{dt}[F_{ji}(t)]} \quad (17)$$

Проверяем условие

$$F_{0iji}(t)=0\,. \quad (18)$$

Если для сочетания $i-й$ и $j-й$ эталонных функций условие (18) выполняется, значит, $F_{0i}(t)$ имеет вид (13). Входящие в него коэффициенты вычисляются по формулам

$$k_j=\frac{F_{0i}(t)}{F_{ji}(t)}, \quad (19)$$

$$k_i=\frac{f_0(t)-k_j f_j(t)}{f_i(t)}. \quad (20)$$

Если условие (18) не выполняется ни для одного из сочетаний по два из $n+1$ эталонных функций, следует перейти к третьему этапу.

Третий этап. Предполагаем, что $f_0(t)$ является суммой, варианты которой можно рассматривать как сочетания по три из $n+1$ эталонных функций. Пусть рассматривается сочетание из $f_i(t)$, $f_j(t)$ и $f_q(t)$. Тогда

$$f_0(t)=k_i f_i(t)+k_j f_j(t)+k_q f_q(t)\,. \quad (21)$$

Для $f_0(t)$ (21) вычислим ее непропорциональность (3) по одной из этих трех эталонных функций, например по $f_i(t)$.

$$F_{0i}(t)=@d^{(1)}_{f_i(t)}f_0(t)=k_j\,@d^{(1)}_{f_i(t)}f_j(t)+k_q\,@d^{(1)}_{f_i(t)}f_q(t)\ . \quad (22)$$

С учетом обозначений (15) перепишем (22)

$$F_{0i}(t)=k_j F_{ji}+k_q F_{qi}\ . \quad (23)$$

Обозначим через $F_{0iji}(t)$ и $F_{qiji}(t)$ соответственно непропорциональности (3) функции $F_{0i}(t)$ по $F_{ji}(t)$ и функции $F_{qi}(t)$ по $F_{ji}(t)$.

Тогда

$$F_{0iji}(t)=@d^{(1)}_{F_{ji}(t)}F_{0i}(t)=k_q\,@d^{(1)}{}_{F_{ji}(t)}F_{qi}(t)=k_q F_{qiji}(t)\,. \quad (24)$$

Выражение (24) отражает пропорциональную зависимость между $F_{0iji}(t)$ и $F_{qiji}(t)$ в момент времени $t$ с неизвестным коэффициентом пропорциональности $k_q$.

Вычислим непропорциональность (3) функции $F_{0iji}(t)$ по $F_{qiji}(t)$. Обозначим ее через $F_{0ijiqiji}(t)$.

$$F_{0ijiqiji}(t)=\frac{F_{0iji}(t)}{F_{qiji}(t)}-\frac{\frac{d}{dt}[F_{0iji}(t)]}{\frac{d}{dt}[F_{qiji}(t)]}\,. \quad (25)$$

Проверяем условие

$$F_{0ijiqiji}(t) = 0\,. \tag{26}$$

Если для $f_i(t)$, $f_j(t)$ и $f_q(t)$ условие (26) соблюдается, значит, $f_0(t)$ имеет вид (21). Коэффициенты $k_q$, $k_j$ и $k_i$ вычисляются по формулам

$$k_q = \frac{F_{0ijiqiji}(t)}{F_{qiji}(t)}\,, \tag{27}$$

$$k_j = \frac{F_{0i}(t) - k_q F_{qj}(t)}{F_{ji}(t)}\,, \tag{28}$$

$$k_i = \frac{f_0(t) - k_j f_j(t) - k_q f_q(t)}{f_i(t)}\,. \tag{29}$$

Если условие (26) не выполняется ни для одного из сочетаний по три из $n+1$ эталонов, следует перейти к сочетанию по четыре из $n+1$ и т.д.

Так выглядит алгоритм определения дифференциального уравнения, описывающего объект в текущий момент времени.

В случае, если даже для сочетания, включающего $n+1$ эталонов, не подтверждается, что $f_0(t)$ имеет вид (18), следует проверить следующие предположения.

1 Порядок дифференциального уравнения выше, чем заданный предел сверху $n$ .

2 В объекте возникла нелинейность.

3 У нелинейного объекта изменились характеристики нелинейных элементов.

4 В объекте происходит переходной процесс.

## ОПЕРАТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА

Полученное дифференциальное уравнение позволяет осуществить оперативный контроль объекта, в том числе оценивать его текущее состояние.

Так, регулярное определение коэффициентов уравнения позволяет количественно оценить динамику изменения параметров объекта.

По изменению вида дифференциального уравнения или его порядка можно определить факт появления событий, приводящих к структурным преобразованиям в объекте.

При относительно быстром по сравнению с входным процессом изменении параметров объекта от одних постоянных значений к другим имеет место переходной процесс. Его можно обнаружить по тому, что непропорциональность, которая при оперативном определении дифференциального уравнения обычно равна нулю, перестает быть нулевой, пока происходит переходной процесс. Обычно известна оценка сверху длительности переходных процессов. Если через это время контролируемая непропорциональность не становится нулевой, значит, имеет место какое-либо из событий, перечисленных в пунктах 1-3.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение предлагаемого алгоритма. Вначале рассмотрим пример, позволяющий избежать громоздких выражений при аналитическом определении непропорциональностей, используемых для получения дифференциального уравнения.

Пусть объект описывается нелинейным дифференциальным уравнением,

$$y' + y^2 = \cos(t) + \sin^2(t).$$

Решением такого уравнения является

$$y = \sin(t) + C_0$$

при $y(0) = 0$ $C_0 = 0$.

По условию контролируются текущие значения входного и выходного процессов и их производных. Также известно, что $y(t)$ подвергается нелинейному преобразованию, а именно: возводится в квадрат.

Здесь входной процесс

$$f_0(t) = \cos(t) + \sin^2(t).$$

Эталонные функции:

$$f_1(t) = y^2 = \sin^2(t),$$

$$f_2(t) = y' = \cos(t).$$

Находим

$$F_{01}(t) = @d^{(1)}_{f_1(t)} f_0(t) = \frac{\cos(t) + \sin^2(t)}{\sin^2(t)} - \frac{-\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t)}{2\sin(t)\cos(t)} =$$

$$= \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{1}{2\cos(t)},$$

$$F_{21}(t) = @d^{(1)}_{f_1(t)} f_2(t) = \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} - \frac{-\sin(t)}{2\sin(t)\cos(t)} =$$

$$= \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{1}{2\cos(t)}.$$

Очевидно, что $F_{0121}(t) = @d^{(1)}_{F_{21}(t)} F_{01}(t) = 0$.

Таким образом, подтверждается предположение, что

$$f_0(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t),$$

где в соответствии с (19) и (20)

$$k_1 = \frac{F_{01}(t)}{F_{21}(t)} = 1,$$

$$k_2 = \frac{f_0(t) - k_2 f_2(t)}{f_1(t)} = 1.$$

В последующих примерах контролируется объект, описываемый дифференциальным уравнением.

$$y'' - 3y' + 2y = 2\sin(t).$$

Производные вычисляются с помощью численных методов по формуле Ньютона-Стирлинга с использованием разностей седьмого порядка [4]. Уравнение решается методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Начальные условия – нулевые.

Здесь $f_0(t) = 2\sin(t)$, $f_1(t) = y(t)$, $f_2(t) = y'(t)$, $f_3(t) = y''(t)$.

Таким образом, предполагается, что $f_0(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t)$. В этом случае должна быть равной или близкой к нулю непропорциональность (25). И только в случае возникновения переходного процесса или изменения вида дифференциального уравнения эта непропорциональность становится ненулевой.

Так, например, на рисунке 1 приведена зависимость непропорциональности (25) от времени $t$ при наличии переходного процесса на интервале от 0,1 до 0,2. В это время коэффициент $k_1$ при $y(t)$ изменяется от 2 до 4 в соответствии с формулой

$$k_1 = 2 + 20 * dt ,$$

где $dt$ =0,001 - время одного отсчета.

Видно, как непропорциональность (25) отклонилась от нуля во время переходного процесса и вновь вернулась к нулю после его окончания.

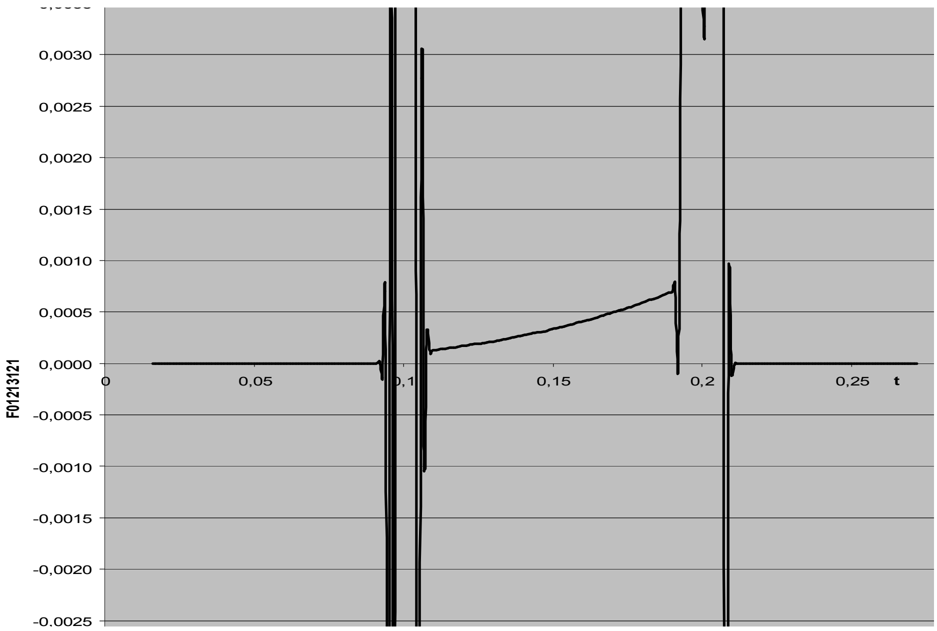


*Рисунок 1 – Непропорциональность* $F_{01213121}(t)$

На рисунке 2 приводится пример вычисления непропорциональности (25) для случая, когда объект описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$y'' - 3y' + 2y^{0.5} = 2\sin(t) .$$

Здесь $f_0(t) = 2\sin(t)$, $f_1(t) = y^{0.5}(t)$, $f_2(t) = y'(t)$, $f_3(t) = y''(t)$.

В момент времени $t = 0.1$ возникает изменение параметров нелинейности. В результате дифференциальное уравнение описывается выражением

$$y'' - 3y' + 2y^{0.6} = 2\sin(t) .$$

Однако об этих изменениях неизвестно, и в процессе контроля эталонная функция $f_1(t)$ по-прежнему берется равной $y^{0.5}(t)$, как это было задано априорно. В результате непропорциональность (25) отклонилась от нуля и больше к нему не возвращалась в отличие от предыдущего примера.

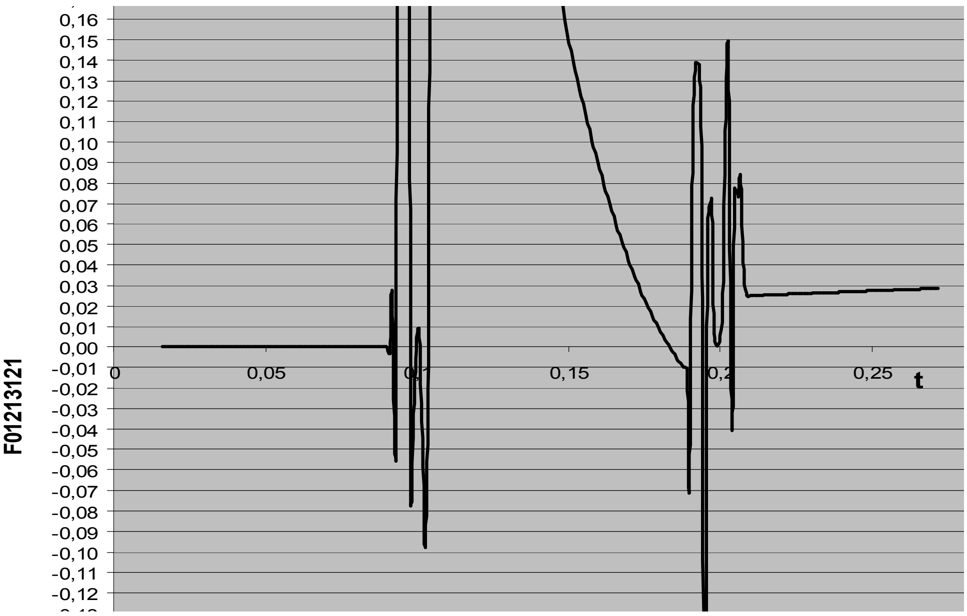


*Рисунок 2 – Непропорциональность* $F_{01213121}(t)$

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что при наличии необходимых производных для входного и выходного процессов и отсутствии влияния помех предложенный алгоритм может быть использован для оперативного контроля динамических объектов. В случае использования аналоговых дифференциальных устройств и аналоговых процессоров для вычисления непропорциональностей можно реализовать практически мгновенное определение дифференциального уравнения, описывающее реальное состояние объекта.

В случае применения компьютерной техники время, необходимое для получения текущего дифференциального уравнения, определяется требованиями численных методов для вычисления производных с заданной точностью.

## SUMMARY

*On current values of entrance and target processes and also their derivatives with the help of functions of disproportions the current differential equation of dynamic object is determined and monitor.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авраменко В.В. Характеристики непропорциональности числовых функций и их применение. Деп. В ГНТБ Украины 19.01.98, N59- Ук98.
2. Авраменко В.В., Характеристики непропорциональности числовых функций и их применения при решении задач диагностики // Вісник СумДУ. – 2000. - N16.
3. Авраменко В.В., Карпенко А.П., Распознавание фрагментов заданных эталонов в анализируемом сигнале с помощью функций непропорциональностей // Вісник СумДУ. – 2002. - N1 (34).
4. Мелентьев П.В. Приближенные вычисления. – М.: Государственное издательство физико-технической литературы, 1962. – 388 с.

*Поступила в редакцию 15 декабря*