

Проведенное компьютерное моделирование полученного алгоритма подтвердило процесс итерационного поиска минимизируемого функционала. Погрешность оценки параметра составляет в зависимости от изменения входных сигналов 0,5-1,5%.

SUMMARY

In this article the questions of synthesis information system of parametrical identifical process of a storage items are discussed as well as found the quality estimation criterion of parameters storical article and the structure of identification parametrical system and its algoritm.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Володченко Г.С., Новгородцев А.И., Кравченко В.А., Мартыненко И.А. Структурный синтез процесса хранения изделий методом преобразований Лапласа // Вісник СумДУ, 1999.- №12. - С.90-94.
2. Юрьевич Е.И. Теория автоматического управления. - Л.: Энергия, 1975. - 416с.

Поступила в редакцию 17 мая 1999 г.

УДК 517.17:681.518.54

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИАГНОСТИКИ

В.В. Авраменко, доц.

Существует класс задач, для решения которых необходимо в дополнение к известным определить новые характеристики числовых функций. В качестве примера рассмотрим задачу технической диагностики большого класса квазистационарных объектов, статические характеристики которых, снятые при фиксированном времени, имеют вид

$$y = k(t)x, \quad (1)$$

где x, y - соответственно входной и выходной параметры; t - время; $k(t)$ изменяется медленно по сравнению с входным процессом $x(t)$.

К таким объектам относятся усилители, преобразователи, каналы телеметрии, следящие системы, многие датчики. При фиксированном в момент времени t значении $k(t)$ выражение (1), как известно, отражает пропорциональную зависимость между x и y . Эта пропорциональность является главным признаком для оценки технического состояния объектов указанного класса. Пока статическая характеристика, полученная в фиксированный момент времени t , имеет вид (1), объект считается исправным. Ухудшение технического состояния объекта приводит к тому, что пропорциональность между x и y нарушается хотя бы при некоторых значениях x . Статическая характеристика в общем случае приобретает вид

$$y = k(x, t)x + b(t), \quad (2)$$

где $b(t) \neq 0$.

Система технической диагностики должна обнаружить это ухудшение и оценить его количественно. Для этого проще всего было бы сравнить

значения функций (1) и (2) при совпадающих x . Однако для квазистационарных объектов $k(t)$ в (1) изменяется во времени, как правило, случайно и определить, каким должно быть его значение для текущего режима работы, очень сложно.

Таким образом, для оценки технического состояния объекта рассматриваемого класса нужно для каждого значения x из области существования функции (2) определить, сохраняется ли пропорциональная его связь с y , и если нет, то насколько она отличается от пропорциональной. При этом сравнение значений функций (1) и (2) исключается из-за неизвестного значения $k(t)$ в (1).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано множество X действительных чисел и множество T действительных положительных упорядоченных чисел. Определено множество Y числовых действительных функций

$$y=f(x,t), \quad (3)$$

где $x \in X$, $t \in T$. На множестве Y необходимо определить функционал, который должен равняться нулю, если при заданных значениях $x \in X$ и $t \in T$ связь между x и $y=f(x,t)$ является пропорциональной.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Ранее эта задача рассматривалась в [1].

Вначале решим задачу для функции одной переменной $y=f(x)$, $x \in X$. В математике пропорция - равенство двух отношений [3]. Известно, что для $y=f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ является пределом отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, если при заданном $x \in X$ выполняется условие

$$\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}, \quad (4)$$

можно считать, что в исследуемой точке связь между x и y пропорциональная. Для $y=cx$, где $c=const$, условие (4) выполняется во всей области задания функции. В общем случае для $y=f(x)$ оно может выполняться лишь для отдельных значений x или совсем не выполняться.

Определение 1 Непропорциональностью по производной первого порядка функции $y=f(x)$ по x называется разность между $\frac{y}{x}$ и $\frac{dy}{dx}$.

Обозначим ее как

$$@d_x^{(1)} y = \frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}. \quad (5)$$

Символ @ выбран для обозначения операции определения непропорциональности, d - от английского *derivative* (производная). Левая часть читается как *эт d один y по x*.

Геометрически непропорциональность (5) представляет собой разность тангенсов двух углов. Первый из них - угол между положительным направлением оси Ox и прямой, соединяющей начало координат с точкой $M(x,y)$, второй - между касательной в точке $M(x,y)$ и осью Ox .

Теорема. Функция $y=cx$, где $c=const$, является единственной, для которой

$$\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} \quad (5a)$$

во всей области ее задания.

Доказательство сводится к получению общего решения дифференциального уравнения (5а) с разделяющимися переменными. Легко убедиться, что единственным общим решением является $y=cx$, где $c=const$, что и требовалось доказать.

Переход к функции двух переменных $y=f(x,t)$, где $x \in X$, $t \in T$, предполагает задание значения t при изучении пропорциональности между x и y . Отсюда пропорциональность по производной первого порядка функции $y=f(x,t)$ по x при заданном значении t имеет вид

$$@d_x^{(1)} y_t = \frac{f(x,t)}{x} - f'_x(x,t). \quad (6)$$

Выражение (6) отвечает требованиям, изложенным в постановке задачи, и может быть принято в качестве искомого функционала.

Пример 1 Пусть $y=k(t)x+b$. При фиксированном времени t $k(t)=c$. Здесь c, b - константы. Тогда $@d_x^{(1)} y_t = \frac{b}{x}$. При $b=0$ $@d_x^{(1)} y_t = 0$, что и должно быть при наличии пропорциональной связи между x и y .

Пример 2 $y = -kx \ln|cx|$, где k, c - константы, $@d_x^{(1)} y = k$.

Пример 3 $y = -kx^2 + cx$, где k, c - константы, $@d_x^{(1)} y = kx$.

Для многомерной функции $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_p, t)$ определим частную непропорциональность по производной первого порядка по x_i :

$$@d_{x_i}^{(1)} y_t = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_p, t)}{x_i} - f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_p, t). \quad (7)$$

Пример. Пусть $y=k_1(t)x_1+k_2(x)x_2$. При фиксированном t $k_1(t)=c_1$, $k_2(t)=c_2$, где c_1 и c_2 - константы. Тогда

$$@d_{x_1}^{(1)} y_t = \frac{y}{x_1} - \frac{\partial y}{\partial x_1} = c_2 \frac{x_2}{x_1}.$$

Непропорциональность по производной n -порядка

Определим понятие непропорциональности по производной n -порядка, которая должна быть равной нулю для

$$y=cx^n \quad (8)$$

во всей области ее определения. Здесь $c=const$, n - целое число больше нуля.

Для (8) выполняется равенство

$$\frac{y}{x^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (9)$$

Определение 2 Непропорциональностью по производной n -порядка функции $y=f(x)$ по x является

$$@d_x^{(n)} y = \frac{y}{x^n} - \frac{1}{n!} \frac{d^n y}{dx^n}, \quad (10)$$

где n - целое число больше нуля.

Непропорциональность по производной n -порядка функции $y=f(x,t)$ при фиксированном значении t имеет вид

$$@d_x^{(n)} y_t = \frac{f(x,t)}{x^n} - \frac{1}{n!} \frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \quad (11)$$

где n - целое число больше нуля.

Пример. Пусть $y=k(t)x^3$. При фиксированном t $k(t)=const$. Тогда в соответствии с (11) для

$$n=1 @d_x^{(1)} y_t = -2cx^2;$$

$$n=2 @d_x^{(2)} y_t = -2cx;$$

$$n=3 @d_x^{(3)} y_t = 0.$$

В общем случае при вычислении непропорциональности по производной начало координат может быть перенесено в произвольную точку в соответствии с правилами параллельного переноса осей координат. Для фиксированного t при переносе начала координат в точку $M(x_0, y_0, t)$ выражение (11) преобразуется к виду

$$@d_{x-x_0}^{(n)} (y - y_0)_t = \frac{f(x,t) - y_0}{(x-x_0)^n} - \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x,t)}{\partial x^n}. \quad (11a)$$

Для $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_p, t)$ определим частную непропорциональность по производной n -порядка y по x_i при заданном t :

$$@d_{x_i}^{(n)} y_t = \frac{y}{x_i^n} - \frac{1}{n!} \frac{\partial^n y}{\partial x_i^n}. \quad (12)$$

Непропорциональность по производной при параметрическом задании функции

Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (12a)$$

где $t \in [T_1, T_2]$ и существует обратная функция $t=\Phi(x)$.

Таким образом, функция y от x задана параметрически. В этом случае непропорциональность по производной n -порядка функции $y=\Psi[\Phi(x)]$ по x

определяется согласно (10) с учетом правил нахождения $\frac{d^n y}{dx^n}$ при параметрическом задании зависимости y от x .

В частности, для $n=1$

$$@d_x^{(1)} y = @d_{\varphi(t)}^{(1)} \psi(t) = \frac{y}{x} - \frac{y_t}{x_t} = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} - \frac{\psi_t(t)}{\varphi_t(t)}. \quad (13)$$

Непропорциональность (13) является функцией параметра t . Для $\psi(t)=c\varphi(t)$, где $c=const$, она равняется нулю во всей области изменения t .

Непропорциональность по производной можно вычислить не только для функции $y=f(x,t)$, но и для ее непропорциональностей по производным любого порядка. Последовательное (m раз) определение непропорциональности по производной n -порядка для $y=f(x,t)$ обозначим как $\text{@}(m)\text{@}d_x^{(n)}y_t$. Условимся ее называть как m -непропорциональность по производной n -порядка $y=f(x,t)$ по x . Например, $\text{@}(3)\text{@}d_x^{(1)}y_t$ означает $\text{@}d_x^{(1)}[\text{@}d_x^{(1)}[\text{@}d_x^{(1)}y_t]]$.

Свойства непропорциональности по производной n -порядка

Ниже приведены некоторые свойства непропорциональности по производной, легко выводимые из выражения (11).

Умножение функции $y=f(x,t)$ на постоянный множитель C приводит к умножению на C ее непропорциональности по производной n -порядка.

Непропорциональность по производной n -порядка суммы (разности) функций равна сумме (разности) их непропорциональностей (11).

Для $y=k(t)x^n$, где n -целое число больше нуля, при фиксированном значении t $\text{@}d_x^{(n)}y_t = 0$ во всей области задания функции.

Непропорциональности по значению

Непропорциональность по производной первого порядка (5) определяет для заданного x разность между двумя скоростями изменения y от x . Первая из них - скорость, которая имела бы место в случае пропорциональной зависимости между y и x в исследуемой точке с коэффициентом пропорциональности, равным $\frac{y}{x}$. Вторая - действительно имеющаяся

скорость $\frac{dy}{dx}$. Соответствующую разность для производной n -порядка дает выражение (10). Однако для сравнения отклонений зависимости y от x от пропорциональной в отдельных точках области задания функции $y=f(x)$ удобнее вместо оценки непропорциональности по производной использовать соответствующую оценку по значению x .

Определение 3 Непропорциональностью по значению x^n функции $y=f(x)$ называется произведение x^n на непропорциональность по производной n -порядка $\text{@}d_x^{(n)}y_t$ (10). Здесь n - целое число больше нуля. Обозначим ее как $\text{@}v_x^{(n)}y$ (от английского слова *value* - значение):

$$\text{@}v_x^{(n)}y = y - \frac{x^n d^n y}{n! dx^n}. \quad (17)$$

В частности, для $n=1$

$$\text{@}v_x^{(1)}y = y - x \frac{dy}{dx}. \quad (18)$$

Левая часть (18) читается как *эт в один у по х*.

Выражение (18) представляет собой разность между y и его возможным значением, найденным в предположении пропорциональной зависимости между y и x с коэффициентом пропорциональности, равным $\frac{dy}{dx}$ в

исследуемой точке. Для $y=f(x,t)$, $x \in X$, $t \in T$ непропорциональность по значениюю α^n , где n - целое число больше нуля, определяется при фиксированном t :

$$@v_x^{(n)} y_t = y - \frac{x^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (19)$$

При переносе начала координат в точку $M(x_0, y_0, t)$ для фиксированного t выражение (11) преобразуется к виду

$$@v_{x-x_0}^{(n)} (y - y_0)_t = f(x, t) - \frac{(x - x_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n}. \quad (19a)$$

При параметрическом задании функции в соответствии с (18)

$$@v_x^{(1)} y = @v_{\phi(t)}^{(1)} \psi(t) = \psi(t) - \phi(t) \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}. \quad (20)$$

Относительные непропорциональности

Пусть $y_1 = f(x)$ и $y_2 = kf(x)$, где k - константа. В соответствии с (18) найдем непропорциональности $@v_x^{(1)} y_1$ и $@v_x^{(1)} y_2$. Очевидно, что

$$@v_x^{(1)} y_2 = k @v_x^{(1)} y_1. \quad (21)$$

Таким образом, $@v_x^{(1)} y_2$ зависит не только от $@v_x^{(1)} y_1$, но и от масштабного множителя k .

Решение некоторых задач диагностики и распознавания образов требует еще одной оценки непропорциональности, инвариантной по отношению к масштабному множителю. Эта оценка должна принимать одинаковые значения для функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = kf(x)$ независимо от величины k .

Необходимость в такой оценке возникает в случаях, когда анализируемые процессы регистрируются при неодинаковых и неизвестных коэффициентах усиления используемой аппаратуры.

Например, электрокардиограмма (ЭКГ) снимается в условиях, когда между сердцем и электродами электрокардиографа имеет место заведомо неизвестное, медленно меняющееся во времени сопротивление. Вследствие этого изменение амплитуды импульсов ЭКГ может быть совершенно не связано с изменением состояния сердца. Поэтому обычно анализируется форма импульсов ЭКГ (зубцов и их комплексов), а не их величина. При этом результаты анализа носят качественный характер. В качестве требуемой оценки предлагается так называемая относительная непропорциональность 1-го порядка функции $y = f(x)$ по x $@N_x^{(1)} y$. Для ее получения непропорциональность по значениюю $@v_x^{(1)} y$ необходимо разделить на y :

$$@N_x^{(1)} y = 1 - \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (22)$$

Оценка (22) безразмерная и равна нулю в случае пропорциональной зависимости между x и y .

81

В соответствии с (19) относительная непропорциональность n -го порядка y по x имеет вид

$$@N_x^{(n)}y = 1 - \frac{x^n}{yn!} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (23)$$

При параметрическом задании функции, когда $x=\varphi(t)$, а $y=\psi(t)$, в соответствии с (20) относительная непропорциональность функции $\psi(t)$ по $\varphi(t)$ имеет вид

$$@N_{\varphi(t)}^{(1)}\psi(t) = 1 - \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \cdot \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (24)$$

Применение характеристик непропорциональности функций в технической диагностике

В введении приведен класс объектов, которые в исправном состоянии имеют статические характеристики вида (1). Неконтролируемые воздействия на параметры такого объекта могут привести к ухудшению его технического состояния и как следствие - к отклонению выражения для статической характеристики от вида (1). Вычисление непропорциональности статической характеристики по значению x^n (19) при $n=1$ и фиксированном параметре (времени) t для одного или нескольких значений x позволяет получить информацию, необходимую как для оценки технического состояния объекта, так и нахождения причин его ухудшения. Так, например, если для заданных x и t $@v_x^{(1)}y_t \neq 0$ это может свидетельствовать или о том, что при $t=const$ статическая характеристика не проходит через начало координат, или о нелинейности $y=f(x,t)$. Такая нелинейность может быть следствием появления неконтролируемых обратных связей. Сопоставление значений $@v_x^{(1)}y_t$ для нескольких значений x может позволить найти причину этих изменений. Непропорциональность (19), вычисленная для целого $n>1$, может использоваться при диагностике устройств, статические характеристики которых описываются выражением $y=k(t)x^n$, например, квадраторов.

Неконтролируемые воздействия на параметры объекта могут представлять собой случайные процессы. Соответственно случайным процессом будет изменение во времени t непропорциональности (19) для статической характеристики $y=f(x,t)$ при заданном x и $n=1$ $@v_x^{(1)}y(t)$. Контролируя характеристику $@v_x^{(1)}y(t)$ и исследуя ее статистические связи с другими процессами, можно получить информацию, необходимую для установления причин ухудшения технического состояния объекта.

Непропорциональность по значению x (20) при параметрическом задании функции y от x рекомендуется использовать для текущего контроля искажения сигнала $y=\psi(t)$ на выходе диагностируемого устройства по сравнению с входным сигналом $x=\varphi(t)$. Причинами искажений могут быть влияние динамики объекта, нелинейность его статической характеристики, запаздывание выходного сигнала по отношению к входному. Искажением является также появление постоянной составляющей в выходном сигнале. Последнее является характерным для безынерционного усилителя в случае сдвига его статической характеристики, когда она, будучи линейной, не проходит через начало координат. Очевидно, что искажение отсутствует

только лишь если связь между входным $\varphi(t)$ и выходным $\psi(t)$ сигналами пропорциональна во всей области ее исследования, т.е. когда $\psi(t) = c\varphi(t)$, где $c=const$. В этом случае, как видно из (13), $\partial d_{\varphi(t)}^{(1)} \psi(t) = 0$. То, что непропорциональность (13) не равна нулю, свидетельствует о наличии искажения сигнала $\psi(t)$ по сравнению с $\varphi(t)$. Величина этого искажения определяется выражением (20). Существуют аппаратура и методы измерения [3] так называемых нелинейных искажений. При этом входной сигнал должен быть гармоническим. Все эти методы сводятся к измерению параметров высших гармоник выходного сигнала и, как правило, используют спектральные анализаторы. Это усложняет применяемую при анализе аппаратуру. Использование предложенных характеристик (13), (20) позволяет обойтись без спектральных анализаторов. Кроме того, снимается ограничение, при котором входной сигнал должен быть гармоническим. В результате измерение искажения сигнала может осуществляться непосредственно в режиме нормальной эксплуатации устройства. Характерно, что величина искажения, как видно из (20), измеряется в тех же физических единицах, что и выходной сигнал. Количественная оценка искажения сигнала на выходе устройства может представлять не только самостоятельный интерес, но также служить информационным признаком при технической диагностике этого устройства.

Пусть на выходе диагностируемого объекта регистрируется сигнал в виде периодически возникающих импульсов, графики которых в общем случае отличаются между собой. Примером такого сигнала является ЭКГ. Предположим, $y_1 = k_1 f_1(x, t_1)$ и $y_2 = k_2 f_2(x, t_2)$ описывают импульсы, получаемые в моменты времени t_1 и t_2 . Здесь k_1 и k_2 - константы, значения которых не контролируются. Вычислим относительные непропорциональности (22) y_1 и y_2 по x $\partial N_x^{(1)} y_1(x)$ и $\partial N_x^{(1)} y_2(x)$. В случае их равенства между собой можно утверждать, что оба импульса одинаковые по форме и могут отличаться лишь масштабными множителями k_1 и k_2 . Если же $\partial N_x^{(1)} y_1(x)$ и $\partial N_x^{(1)} y_2(x)$ неодинаковые, то их разность позволяет оценить, насколько импульсы различаются по форме и при каких значениях x . Эти отличия можно увязать с изменением состояния диагностируемого объекта. Кроме того, импульсы y_1 и y_2 можно сравнивать с эталонным $z = f_3(x)$. Для этого следует использовать относительные непропорциональности (24) y_1 по z и y_2 по z . По ним можно определить, при каких значениях x импульсы y_1 и y_2 отличаются от эталонного и насколько. Благодаря использованию относительных непропорциональностей (22) и (24) указанные выше сравнения можно осуществлять несмотря на неизвестные значения масштабных множителей k_1 и k_2 .

ВЫВОДЫ

Предлагаются характеристики, позволяющие количественно оценить новые свойства числовых функций: непропорциональности по производным, значениям и относительные непропорциональности. Одной из областей применения этих характеристик является техническая и медицинская диагностики.

SUMMARY

The new characteristics of numerical functions - disproportion on derivative, on value and relative disproportion are offered. Their application in diagnostics and at recognition of images is recommended.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авраменко В.В. Характеристики непропорциональности числовых функций / Деп. в ГНТБ Украины 19.01.1998, №59, Ук98.
2. Словарь иностранных слов / Под ред. И.В.Лехина, С.М. Локшиной, Ф.Н.Петрова, Л.С.Шаумяна. - М.: Изд-во "Советская энциклопедия", 1964. - 526 с.
3. Полулях К.С. Электронные измерительные приборы (аналоговые и цифровые).- М.: Высшая школа, 1966. - С. 282-297.

Поступила в редакцию 21 сентября 1999 г.

УДК 517.17:681.518.54

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ДИАГНОСТИКЕ

А.П.Карпенко, асп.

При решении ряда задач технической и медицинской диагностики, контроле технологических процессов, сравнении образов, оценке искажения выходного сигнала по сравнению с входным возникает необходимость определять, является ли связь между числовыми функциями $x(t)$ и $y(t)$ пропорциональной во всей области задания функций, на отдельных интервалах или только в отдельных точках. Так, при технической диагностике усилителей, датчиков, преобразователей, каналов телеметрии, следящих систем, серводвигателей требуется вести контроль за соблюдением пропорциональной зависимости между входным $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами:

$$y(t) = kx(t), \quad (1)$$

где k - коэффициент пропорциональности.

В идеале подразумевается, что усилительное звено не имеет динамической ошибки и производит усиление, передачу и преобразование мгновенных величин без искажений и запаздываний. Пропорциональность (1) является главным признаком для оценки технического состояния объектов данного класса. Неконтролируемые воздействия на параметры объекта могут привести к ухудшению его технического состояния и как следствие - к отклонению выражения для его статической характеристики от вида (1). Причинами этого могут быть влияние динамики объекта, запаздывания выходного сигнала по отношению к входному, нелинейность при малых либо больших значениях входного сигнала. Значение коэффициента усиления в квазистационарных системах, как правило, медленно изменяется с течением времени по сравнению с $x(t)$ и $y(t)$, и в ряде случаев его значение неизвестно либо трудно определимо.

Подобная ситуация имеет место при анализе электрокардиограмм. Амплитуда регистрируемых кардиосигналов зависит от многослойной проводящей среды. Это приводит к тому, что регистрируемые значения