УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ В R^3

Л.А.Фильштинский, проф.; Т.Л.Мизина, ст. преп.

При рассмотрении граничных задач для систем эллиптического типа эффективно используется метод фундаментальных решений, позволяющий сводить эти задачи к интегральным уравнениям того или иного типа.

В данной работе построена матрица фундаментальных решений для системы уравнений Ламе, описывающих равновесие упругого слоя при смешанных граничных условиях на его основаниях.

В прямолинейной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим упругий слой: $-\infty < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$, $-h \le x_3 \le h$. Пусть вдоль шнура $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ -h \le x_3 \le h$ распределены усилия в направлении осей x_1, x_2, x_3 с интенсивностями $P_1(x_3)$, $P_2(x_3)$ и $P_3(x_3)$ соответственно.

Задача заключается в определении матрицы упругих перемещений в слое от действия сосредоточенных на линии усилий при соблюдении указанных ниже граничных условий.

Полная система уравнений, описывающих поставленную задачу, имеет вид [1]:

-дифференциальные уравнения Ламе (суммирование по повторяющемуся индексу):

$$\nabla^2 u_k + \sigma \partial_k \theta + \frac{1}{\mu} X_k = 0,\ \theta = \partial_k u_k,\ \partial_k = \partial/\partial x_k\ \ (k = 1,2,3); \quad (1.1)$$

- соотношения Коши:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)\ \ (i, j = 1,2,3); \quad (1.2)$$

- материальные уравнения:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\ \ (i, j = 1,2,3); \quad (1.3)$$

- граничные условия на основаниях слоя $x_3 = \pm h$:

$$u_3 = 0,\ \ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.1)–(1.4) величины u_k, X_k, σ_{ij} и e_{ij} – компоненты векторов упругого перемещения, интенсивностей объемных сил, тензоров напряжений и деформаций соответственно; λ, μ – коэффициенты Ламе, $\sigma = (\lambda + \mu)/\mu = (1 - 2\nu)^{-1}$; ν – коэффициент Пуассона.

Ниже рассмотрим симметричное относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ состояние слоя. В соответствии с этим и граничными условиями (1.4) компоненты вектора объемных сил и вектора упругого перемещения представим в виде:

$$P_k(x_3)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}\cos\gamma_n x_3 \quad (k=1,2),\ p_3(x_3)=\sum_{n=1}^{\infty} p_{3n}\sin\gamma_n x_3,\ \gamma_n=\pi n/h,$$

$$u_k(x_3)=\sum_{n=0}^{\infty} u_{kn}\cos\gamma_n x_3 \quad (k=1,2),\ u_3(x_3)=\sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}\sin\gamma_n x_3. \tag{1.5}$$

С учетом этих разложений получаем из (1.1) следующую систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье $u_{kn}=u_{kn}(x_1,x_2)$:

$$\kappa_n u_{1n}+\sigma\partial_1\theta_n+\frac{1}{\mu}p_{1n}\delta(x)=0,\quad \theta_n=\partial_1 u_{1n}+\partial_2 u_{2n}+\partial_3 u_{3n},$$

$$\kappa_n u_{2n}+\sigma\partial_2\theta_n+\frac{1}{\mu}p_{2n}\delta(x)=0,\quad x=(x_1,x_2), \tag{1.6}$$

$$\kappa_n u_{3n}-\sigma\gamma_n\theta_n+\frac{1}{\mu}p_{3n}\delta(x)=0,\quad \kappa_n=\partial_1^2+\partial_2^2-\gamma_n^2 \quad (n=0,1,\ldots).$$

Здесь $\delta(x)=\delta(x_1,x_2)$ – двумерная дельта – функция.

Интегрирование системы (1.6) проведем в пространстве D' обобщенных функций [2]. Из (1.6) следует уравнение относительно «объемного расширения» θ_n:

$$\kappa_n\theta_n=-\frac{1}{\mu(1+\sigma)}\sum_{k=1}^{3}p_{kn}\partial_k\delta(x)=f_n. \tag{1.7}$$

Имеем в D'

$$\theta_n=f_n*\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n=-\frac{1}{2\pi}K_0(\gamma_n r),\quad r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \tag{1.8}$$

где ε_n – фундаментальное решение оператора κ_n; $K_p(z)$ – функция Макдональда порядка p [3]; символ $*$ обозначает свертку соответствующих обобщенных функций.

Выполняя предписанные в (1.7), (1.8) операции, находим

$$\theta_n=\frac{1}{2\pi\mu(1+\sigma)}\sum_{k=1}^{3}p_{kn}\partial_k K_0(\gamma_n r)\quad (n=1,2,\ldots).$$

С учетом этого система (1.6) легко интегрируется. Имеем в результате

$$u_{mn}=\frac{1}{c\gamma_n}\sum_{k=1}^{3}p_{kn}\partial_m\partial_k\{rK_1(\gamma_n r)\}+\frac{p_{mn}}{2\pi\mu}K_0(\gamma_n r)\quad (m=1,2),$$

$$u_{3n}=-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{3}p_{kn}\partial_k\{rK_1(\gamma_n r)\}+\frac{p_{3n}}{2\pi\mu}K_0(\gamma_n r)\quad (n=1,2,\ldots), \tag{1.9}$$

$c=8\pi\mu(1-\nu)$.

Формулы (1.8) и (1.9) справедливы при $n = 1,2,\ldots$ Для $n = 0$ система дифференциальных уравнений (1.6) требует специального рассмотрения. Она имеет в этом случае вид

$$\begin{gathered}\nabla^2 u_{kn} + \sigma\partial_k\theta_n + \frac{1}{\mu} p_{kn}\delta(x) = 0 \quad (k = 1,2), \\ \theta_n = \partial_1 u_{1n} + \partial_2 u_{2n}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Интегрируя (1.10) аналогично предыдущему, находим

$$\begin{gathered}\theta_0 = -\frac{1}{2\pi\mu(1+\sigma)}\sum_{k=1}^{2} p_{k0}\partial_k \ln r, \\ u_{m0} = \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{2} p_{k0}\partial_m\partial_k\left\{r^2(\ln r - 1)\right\} - \frac{p_{m0}}{2\pi\mu}\ln r \quad (m = 1,2).\end{gathered} \tag{1.11}$$

Таким образом, фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений Ламе для слоя в R^3 определены в аналитической форме. Окончательные их выражения имеют вид:

$$\begin{gathered}u_{10} = \frac{p_{10}}{c}\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha - \kappa\ln r\right) + \frac{p_{20}}{2c}\sin 2\alpha, \quad z = re^{i\alpha}, \\ u_{20} = \frac{p_{10}}{2c}\sin 2\alpha - \frac{p_{20}}{c}\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \kappa\ln r\right),\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$u_{1n} = \frac{p_{1n}}{c}\left\{\gamma_n r K_1(\gamma_n r)\cos^2\alpha + \kappa K_0(\gamma_n r)\right\} + \frac{p_{2n}}{2c}\gamma_n r K_1(\gamma_n r)\sin 2\alpha -$$

$$-\frac{p_{3n}}{c}\gamma_n r K_0(\gamma_n r)\cos\alpha \quad (n = 1,2,\ldots),$$

$$u_{2n} = \frac{p_{1n}}{2c}\gamma_n r K_1(\gamma_n r)\sin 2\alpha + \frac{p_{2n}}{c}\left\{\gamma_n r K_1(\gamma_n r)\sin^2\alpha + \kappa K_0(\gamma_n r)\right\} -$$

$$-\frac{p_{3n}}{c}\gamma_n r K_0(\gamma_n r)\sin\alpha,$$

$$u_{3n} = \frac{p_{1n}}{c}\gamma_n r K_0(\gamma_n r)\cos\alpha + \frac{p_{2n}}{c}\gamma_n r K_0(\gamma_n r)\sin\alpha - \frac{p_{3n}}{c}\left\{\gamma_n r K_1(\gamma_n r) - 4(1-\nu)K_0(\gamma_n r)\right\}.$$

Компоненты тензора напряжения, соответствующего действию вдоль шнура нагрузки $p_k(x_3)$ $(k = 1,2,3)$, представим согласно (1.2), (1.3) и (1.5) рядами Фурье:

$$\sigma_{mm} = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{mm,n}\cos\gamma_n x_3 \quad (m = 1,2,3),$$

$$\sigma_{12} = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{12,n}\cos\gamma_n x_3, \quad \sigma_{m3} = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{m3,n}\sin\gamma_n x_3 \quad (m = 1,2,). \tag{2.1}$$

Причем

$$\sigma_{11,n}+\sigma_{22,n}=2\lambda\theta_n+4\mu\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{1n}+iu_{2n}\right)\right\},$$

$$\sigma_{22,n}-\sigma_{11,n}+2i\sigma_{12,n}=-4\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{1n}-iu_{2n}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\partial_1-i\partial_2\right), \qquad (2.2)$$

$$\sigma_{13,n}-i\sigma_{23,n}=\mu\left\{2\frac{\partial}{\partial z}u_{3n}-\gamma_n\left(u_{1n}-iu_{2n}\right)\right\}.$$

Из соотношений (2.1), (2.2), учитывая формулы для упругих перемещений (1.9) и (1.11), легко определяются комбинации коэффициентов Фурье $\sigma_{ij,m}$. Приведем окончательные результаты:

$$\sigma_{11,0}+\sigma_{22,0}=-\frac{4\mu}{c}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\left(p_{10}+ip_{20}\right)\right\},\quad z=x_1+ix_2,$$

$$\sigma_{22,0}-\sigma_{11,0}+2i\sigma_{12,0}=\frac{2\mu}{c}\left\{\bar{z}\frac{p_{10}+ip_{20}}{z^2}+\kappa\frac{p_{10}-ip_{20}}{z}\right\},\quad \kappa=3-4\nu,$$

$$\sigma_{11,n}+\sigma_{22,n}=-\frac{\gamma_n^2 r}{4\pi(1-\nu)}\left(p_{1n}\cos\alpha+p_{2n}\sin\alpha\right)K_2\left(\gamma_n r\right)+\frac{p_{3n}\gamma_n}{4\pi(1-\nu)}\times$$

$$\times\left\{\gamma_n rK_1\left(\gamma_n r\right)+\left(4\nu-2\right)K_0\left(\gamma_n r\right)\right\}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$\sigma_{22,n}-\sigma_{11,n}+2i\sigma_{12,n}=\frac{p_{1n}\gamma_n}{8\pi(1-\nu)}e^{-i\alpha}\left\{\gamma_n r\left(e^{-2i\alpha}K_2(\gamma_n r)+K_0(\gamma_n r)\right)+2\kappa K_1(\gamma_n r)\right\}+$$

$$+\frac{ip_{2n}\gamma_n}{8\pi(1-\nu)}e^{-i\alpha}\left\{\gamma_n r\left(e^{-2i\alpha}K_2(\gamma_n r)-K_0(\gamma_n r)\right)-2\kappa K_1(\gamma_n r)\right\}-\frac{p_{3n}\gamma_n^2}{4\pi(1-\nu)}e^{-2i\alpha}rK(\gamma_n r),$$

$$\sigma_{13,n}-i\sigma_{23,n}=-\frac{p_{1n}\gamma_n}{4\pi(1-\nu)}\left\{(1-2\nu)K_0\left(\gamma_n r\right)+\gamma_n rK_1\left(\gamma_n r\right)e^{-i\alpha}\cos\alpha\right\}-$$

$$-\frac{p_{2n}\gamma_n}{4\pi(1-\nu)}\left\{-i(1-2\nu)K_0\left(\gamma_n r\right)+\gamma_n rK_1\left(\gamma_n r\right)e^{-i\alpha}\sin\alpha\right\}+$$

$$+\frac{p_{3n}\gamma_n}{4\pi(1-\nu)}e^{-i\alpha}\left\{\gamma_n rK_0\left(\gamma_n r\right)-2(1-\nu)K_1\left(\gamma_n r\right)\right\},$$

$$\sigma_{33,n}=\frac{p_{1n}\gamma_n}{4\pi(1-\nu)}\left\{\gamma_n rK_0\left(\gamma_n r\right)-2\nu K_1\left(\gamma_n r\right)\right\}\cos\alpha+\frac{p_{2n}\gamma_n}{4\pi(1-\nu)}\times$$

$$\times\left\{\gamma_n rK_0\left(\gamma_n r\right)-2\nu K_1\left(\gamma_n r\right)\right\}\sin\alpha+\frac{p_{3n}\gamma_n}{4\pi(1-\nu)}\left\{(4-2\nu)K_0\left(\gamma_n r\right)-\gamma_n rK_1\left(\gamma_n r\right)\right\}.$$

Представляет интерес асимптотика полей упругих перемещений и напряжений в окрестности точки приложения сосредоточенного функционала. Учитывая асимптотику функций Макдональда [3], формулы (1.12), (2.3) и (1.5), получаем

$$u_m^0 = -\frac{\kappa}{c} P_m(x_3)\ln r \quad (m = 1, 2),$$

$$u_3^0 = -\frac{P_3(x_3)}{2\pi\mu}\ln r ,$$

$$\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = -\frac{P_1(x_3)\cos\alpha + P_2(x_3)\sin\alpha}{2\pi(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0 + 2i\sigma_{12}^0 = \frac{e^{-i\alpha}}{4\pi(1-\nu)r}\left\{[P_1(x_3) + iP_2(x_3)]e^{-2i\alpha} + \kappa[P_1(x_3) - iP_2(x_3)]\right\},$$

$$\sigma_{13}^0 - i\sigma_{23}^0 = -\frac{e^{-i\alpha}}{2\pi r}P_3(x_3),$$

$$\sigma_{33}^0 = -\frac{\nu[P_1(x_3)\cos\alpha + P_2(x_3)\sin\alpha]}{2\pi(1-\nu)r},$$

где под u_m^0, σ_{mp}^0 понимается главная асимптотика соответствующих величин в окрестности нуля.

Отметим, что результаты остаются в силе и в том случае, когда нагрузка действует вдоль шнура $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $-h \le x_3 \le h$. Необходимо только положить

$$r = |z - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}, \quad \alpha = \arg(z - z_0).$$

SUMMARY

Matrix of fundamental solution of elasticity theory for the layer in R^3 is build. Solution is defound in the form of Fourie lines, coefficient of this lines are determined in the close form with the McDonalds function. Results are usefull during solution of boundary problem of theory elasticity for the piece – wise layer.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир. – 1975. – 872 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1981. – 512 с.
3. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

Поступила в редколлегию 4 апреля 2000 г.

УДК 621.01

РОЗПІЗНАВАННЯ ТОЧКИ БІФУРКАЦІЇ НАРОДЖЕННЯ ЦИКЛУ

І.О. Шуда, асп.

Розглядається n-мірна нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь: