

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ПЛОХООБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ**А.С. Косторной, Н.С. Мартынова***

СМНПО и.м. Фрунзе, г. Сумы;

Сумский государственный университет

В статье рассматривается решение задачи о нестационарном обтекании лопасти рабочего колеса центробежного насоса, имеющей неострую выходную кромку методом гидродинамических особенностей. В отличие от классических методов расчета обтекания тел с острой выходной кромкой авторами предлагается решение этой задачи методом гидродинамических особенностей с учетом сходящей с его задней кромки вихревой пелены. Вихревой слой на теле моделируется системой вихревых рамок в случаях решения 3D задачи или панельными источниками для 2D задачи. Пелена свободных вихрей за телом замыкается на выходной кромке. Численная реализация задачи осуществляется в дискретные моменты времени с учетом предыстории движения.

Дальнейшее совершенствование энергетических и эксплуатационных характеристик лопастных гидравлических машин возможно только в результате теоретических и опытных исследований, создающих предпосылки для обоснованных методов расчета и проектирования.

Одним из наиболее сложных и мало разработанных разделов теории обтекания лопастных систем гидравлических машин является расчет обтекания тел, имеющих неострую выходную кромку или изломы кривизны на поверхности, которые называют плохообтекаемыми. Как правило, течение при этом носит нестационарный характер, и поэтому решать такие задачи нужно в полной нестационарной постановке.

В данной работе предлагается методика решения задач об обтекании плохообтекаемых тел, основанная на методе гидродинамических особенностей.

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

В последнее время для численного решения уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости широко используется метод гидродинамических особенностей, который в аэродинамике школой С.М.Белоцерковского называют методом дискретных вихрей, а в странах дальнего зарубежья панельными методами. Этот метод можно рассматривать как численный метод решения уравнения Лапласа, решение которого сводится к численному решению одного из типов интегральных уравнений. Такие уравнения можно получить в зависимости от вида гидродинамической особенности и типа краевых условий на границе. Многообразие выбора типа уравнения объясняется тем обстоятельством, что уравнение Лапласа относится к классу дифференциальных уравнений эллиптического типа, общее решение которого удовлетворяет многим функциям и поэтому при выборе нужной руководствуются принципом практической целесообразности. Метод гидродинамических особенностей и ему подобные рассматривают как численный метод решения двумерных или одномерных сингулярных интегральных уравнений теории несущей поверхности первого или второго рода. Он позволяет определять стационарные и нестационарные, линейные и нелинейные гидродинамические характеристики тел как при безотрывном, так и при отрывном обтекании. Настоящая работа посвящена развитию и совершенствованию данного метода применительно к насосам центробежного типа. Существо предлагаемой модификации состоит в применении замкнутых вихревых рамок для

моделирования отдельных элементов вихревых поверхностей в пространственном случае, а в случае двухмерных задач обтекаемая поверхность моделируется системой панельных источников и стоков. Для выполнения постулата Чаплыгина-Жуковского вводится вихревой контур дискретных вихрей, интенсивность которого определяется условиями постулата.

Предлагаемый прием совершенствования метода расчета плоской прямой задачи [1] отличается от рассмотренного в работе [4] тем, что непрерывно распределенная по контуру профиля гидродинамическая особенность на элементарном участке ΔS считается постоянной, а не дискретной. В этом случае при вычислении проекций скоростей на оси декартовой системы координат от отрезка особенностей интегралы вычисляются аналитически. Этот прием существенно повышает точность решения задачи обтекания при одинаковом количестве расчетных точек и позволяет обеспечить требуемую точность решения при значительно меньшем их количестве. Это является особенно актуальным при решении задачи обтекания системы произвольно расположенных профилей, когда количество расчетных точек может достигать нескольких тысяч.

В методе дискретных вихрей гладкий вихревой слой, которым моделируется обтекаемая поверхность S , представляется или подковообразными вихрями, или вихревыми отрезками. Удовлетворяя условию непротекания в ограниченном числе точек обтекаемой поверхности, решение двухмерного сингулярного интегрального уравнения относительно неизвестной циркуляции сводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей.

Известно, что вихревой отрезок в отдельности не имеет потенциала. Поэтому в систему алгебраических уравнений вводят согласующие условия, обеспечивающие выполнение закона сохранения циркуляции и потенциальность течения.

В работе в качестве дискретных особенностей используются замкнутые вихревые рамки. Для них установлена аппроксимируемость нормальной к S составляющей скорости, индуцированной в расчетных точках поверхности, расположенных строго внутри S , гладким вихревым слоем, совокупностью замкнутых вихревых рамок, и показано, что матрица системы линейных алгебраических уравнений в этом случае всегда имеет обратную [7]. Поэтому для решения прямой трехмерной задачи будем аппроксимировать непрерывный вихревой слой на обтекаемой поверхности замкнутыми вихревыми рамками для численного решения двухмерного сингулярного уравнения.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в проточной части рабочего колеса течет невязкая несжимаемая жидкость с постоянной плотностью ρ . Положение точек обтекаемой поверхности S в абсолютной системе координат $Oxyz$ (рис.1) определяется уравнением

$$F(x, y, z, \tau) = 0, \quad (2.1)$$

где τ - время.

Так как в элементах рабочего колеса обтекание циркуляционное, будем считать, что с выходных кромок лопаток сходит вихревая пелена $\sigma(x, y, z, \tau)$ свободных вихрей, уходящих в бесконечность по траектории линий тока [5]. Линию L схода вихревой пелены по траектории линий тока с поверхности S полагаем известной.

Поле скоростей $V(\vec{r}, \tau)$ вне S и $\sigma(\vec{r} = r(x, y, z))$ считается потенциальным. Обозначив $\varphi(\vec{r}, \tau)$ потенциал скорости, запишем

$$\vec{V}(\vec{r}, \tau) = \nabla\varphi(\vec{r}, \tau), \quad (2.2)$$

где ∇ - оператор Гамильтона.

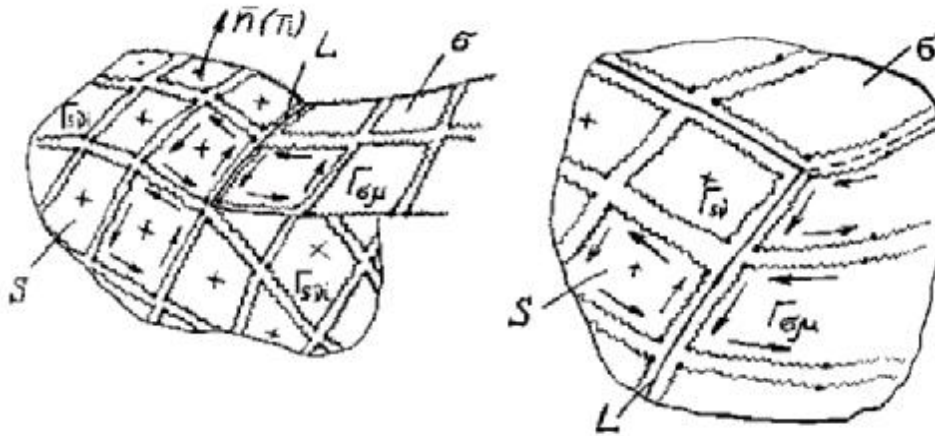


Рисунок 1 – Гидродинамическая модель обтекаемой поверхности

Из уравнения неразрывности $\text{div}\vec{V} = 0$ следует, что потенциал скоростей является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа [5, 6]:

$$\Delta\varphi(\vec{r}, \tau) = 0, \quad \vec{r} \notin S \cup \sigma, \quad (2.3)$$

где Δ - лапласиан.

Тогда поле давлений в произвольной точке пространства определяется интегралом Коши - Лагранжа для уравнений движения Эйлера [5]

$$P(\vec{r}, \tau) = f(\tau) - \rho\left(\frac{\partial\varphi(\vec{r}, \tau)}{\partial\tau} + \frac{1}{2}V^2(\vec{r}, \tau)\right) \quad (2.4)$$

(массовыми силами пренебрегаем). Функция $f(\tau)$ определяется из граничных условий на бесконечности. Так, полагая возмущение убывающими при бесконечном удалении от S и σ

$$\varphi(\vec{r}, \tau) \rightarrow 0, \quad |\nabla\varphi(\vec{r}, \tau) \rightarrow 0|, \quad (2.5)$$

а давление на бесконечности ($P = P_\infty$), получаем

$$P(\vec{r}, \tau) = P_\infty - \rho\left(\frac{\partial\varphi(\vec{r}, \tau)}{\partial\tau} + \frac{1}{2}V^2(\vec{r}, \tau)\right). \quad (2.6)$$

Искомое воздействие жидкости на обтекаемое тело определяется интегрированием давления по поверхности S :

$$\vec{R} = - \int_S P(\vec{r}_s, \tau) \cdot \vec{n}(\vec{r}_s, \tau) dS. \quad (2.7)$$

Здесь $\vec{n}(\vec{r}_s, \tau)$ - орт внешней нормали к S .

Таким образом, решение прямой задачи состоит в отыскании потенциала скоростей $\varphi(\vec{r}, \tau)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа (2.3) и следующим граничным условиям:

1) на S - условию непротекания

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, \tau)}{\partial n} = \vec{W} * (\vec{r}_s, \tau) \cdot \vec{n}(\vec{r}_s, \tau), \quad (2.8)$$

где $\vec{W} * (\vec{r}_s, \tau)$ - скорость движения жидкости в точках поверхности S ;

2) на бесконечности - условию убывания возмущений (2.5);

3) на заданных участках кромки поверхности S - условию Чаплыгина-Жуковского;

4) на свободной пелене σ - кинематическому условию совместности течений и условию отсутствия перепада давлений.

3 ОБЩИЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Рассмотрим обтекание плохообтекаемого тела в виде сечения лопатки рабочего колеса центробежного насоса, изображенного на рис. 2 в системе координат, ось Ox которой совмещена с хордой профиля.

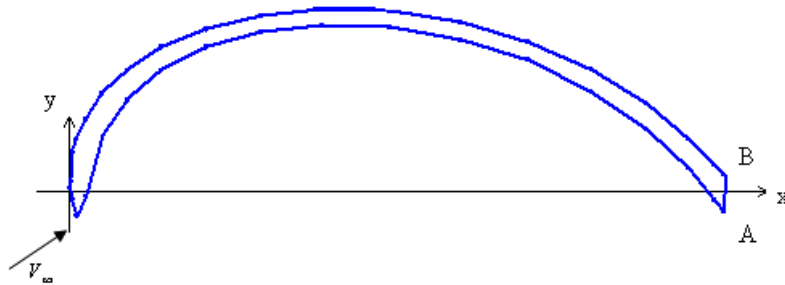


Рисунок 2 – Профиль лопатки центробежного насоса

Нестационарную задачу об обтекании лопатки можно рассматривать как двухмерную или трехмерную методом гидродинамических особенностей. В нестационарной постановке при безотрывном обтекании сход вихревых пелен допускается только с угловых точек A и B . Контур профиля в 2D задаче моделируется дискретными вихрями или как в [1] панельными источниками и вихрями, а в пространственном случае замкнутыми вихревыми рамками [2].

Дискретный свободный вихрь, сходящийся в данный момент с угловых точек A и B и движущийся в потоке с постоянной циркуляцией, располагается на кромке, а не сдвигается с кромки, как это делалось традиционно ранее. Такое моделирование основано на гипотезе Чаплыгина-Жуковского для нестационарных течений – присоединенный вихревой слой при подходе к угловой точке, с которой сходит пелена, обращается в нуль. Эта гипотеза была высказана давно, а доказана в [3] математически для линейной нестационарной задачи. Используя эти результаты, дискретные вихри, расположенные в углах, будем считать свободными. Если же тело гладкое и места отрыва фиксировать не удастся, то применяется подход [4], согласно которому схема идеального

течения дополняется моделью нестационарного пограничного слоя. В этом случае поверхность тела также моделируется системой дискретных гидродинамических особенностей – вихрей Γ , а свободные вихри δ будут сходиться в поток в тех сечениях пограничного слоя, где происходит отрыв. Уравнение нестационарного пограничного слоя интегрируется численно. Циркуляции первых свободных вихрей равны количеству завихренности, попадающей в область невязкого течения из пограничного слоя в соответствующих сечениях, а их положение определяется по средним скоростям в этих сечениях. Согласно этой схеме течение вне тела принимается потенциальным, а задача обтекания сводится к нахождению потенциала течения, удовлетворяющего уравнению Лапласа вне тела и условию непротекания поверхности тела в расчетных точках.

В общем случае обтекание твердого тела с поступательной скоростью \vec{V}_∞ и угловой скоростью $\vec{\omega}$ в безграничной несжимаемой жидкости удовлетворяет условию непротекания на поверхности тела

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{W}^* \cdot \vec{n} = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\vec{W} = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \vec{W}^* = \vec{V}_\infty + [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad \vec{n} = i \cos nx + j \cos ny + k \cos nz.$$

Здесь ϕ - потенциал возмущенных скоростей; \vec{W} - возмущенная скорость; \vec{W}^* - невозмущенная скорость; \vec{n} - единичная внешняя нормаль к поверхности тела; \vec{r} - радиус-вектор точки, в которой выполняется условие непротекания; i, j, k - орты координатных осей.

Если обтекаемое тело конечной толщины с замкнутой поверхностью S задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (3.2)$$

тогда во всех точках поверхности (2) орт нормали определяется уравнением

$$\vec{n} = \text{grad}F = \frac{F'_x \cdot i + F'_y \cdot j + F'_z \cdot k}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}. \quad (3.3)$$

Выполняя граничные условия непротекания в расчетных точках T_i (рис.3) и теорему Томсона о сохранении циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему тело и его след, получим систему уравнений для определения неизвестных циркуляций Γ_μ^r , $\mu = 1, 2, \dots, N_e$ - количество дискретных вихрей на контуре, $r = 1, 2, \dots, R$ - конечный шаг по времени.

Задачу решаем как нестационарную. В трехмерной задаче всю поверхность S разобьем замкнутыми гладкими контурами L_i на n открытых непересекающихся областей ΔS_i в общем случае с неодинаковой шириной панелей. В каждой из областей ΔS_i выберем по одной точке T_i

с радиус-вектором $\vec{r}_i = x_i i + y_i j + z_i k$ и ортом нормали в ней \vec{n}_i . Контуры L_i будем считать замкнутыми вихревыми нитями, циркуляции которых Γ_i подлежат определению.

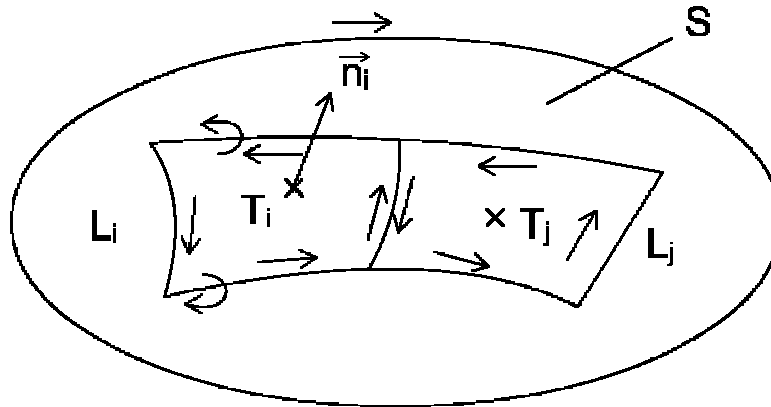


Рисунок 3

За положительные направления обхода L_i и циркуляции Γ_i примем указанные на рис. 3.

Возмущенное поле скоростей от описанной системы n вихревых контуров L_i с циркуляциями Γ_i определяется суммированием

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \vec{W}_j(\vec{r}), \quad (3.4)$$

где \vec{W}_j - вектор безразмерных скоростей от вихревых отрезков контура L_j , который может быть записан двумя различными способами [5,6].

$$\vec{W}_j(\vec{r}) = \oint_{L_j} \frac{(\vec{\rho} - \vec{r}) \times d\vec{l}_\rho}{|\vec{\rho} - \vec{r}|^3} = -grad \int_{S_j} \frac{\vec{n}_\rho (\vec{\rho} - \vec{r})}{|\vec{\rho} - \vec{r}|^3} dS. \quad (3.5)$$

Первый из интегралов (по контуру L_i) является записью закона Био-Савара, а второй (по S_i) определяет тождественно равное поле скоростей от слоя диполей постоянной интенсивности, распределенных по поверхности S_i . Нормальная компонента возмущенной скорости в расчетных точках поверхности S запишется следующим образом:

$$V_n(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \vec{n}_i \vec{W}_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j W_{ij}, \quad (3.6)$$

где

$$W_{ij} = \oint_{L_j} \frac{\vec{n}_i (\vec{\rho} - \vec{r}_i) \times d\vec{l}_\rho}{|\vec{\rho} - \vec{r}_i|^3} = -\vec{n}_i grad \int_{S_j} \frac{\vec{n}_\rho (\vec{\rho} - \vec{r}_i)}{|\vec{\rho} - \vec{r}_i|^3} dS, \quad (3.7)$$

$$W = \{W_{ij}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.8)$$

Коэффициент давления на поверхности тела определяется через интеграл Коши – Лагранжа

$$\bar{P} = 1 - W_S^2 - 2 \frac{\partial \varphi^+}{\partial \tau}. \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) W_S – безразмерная скорость на поверхности тела; φ^+ – безразмерный потенциал; $\tau = \frac{V_\infty \cdot t}{b}$ – безразмерное время (t – время; b – характерный линейный размер).

Обозначая через Γ – вектор-столбец неизвестных циркуляций, а B – вектор-столбец правых частей, получаем, в матричной записи систему уравнений для определения циркуляций в случае нестационарного обтекания

$$W_S \Gamma_S = B - W_\sigma \Gamma_\sigma, \quad (3.10)$$

Здесь W_σ – скорость на поверхности тела от свободных вихрей.

Равенство (3.10) рассматривается как система алгебраических уравнений и используется для определения циркуляций Γ_S .

При отрывном обтекании телесного профиля в первый расчетный момент времени дискретные вихри располагаются только на контуре. Все вихри, за исключением угловых в точках A и B , представляют суммарный вихревой слой в точках контура.

В следующий момент времени свободные вихри сдвигаются в поток по местной скорости V на вектор $V \Delta \tau$ ($\Delta \tau$ – расчетный шаг по времени) без изменения своей циркуляции, так как среда считается идеальной. Во второй расчетный момент будем иметь дискретные вихри неизвестной циркуляции, находящиеся на контуре, и по одному свободному вихрю известной циркуляции около каждого угла. В дальнейшем свободные вихри движутся со скоростями частиц, с которыми они совпадают. Выполняя условие непротекания в расчетных точках, найдем неизвестные циркуляции, решая следующие линейные алгебраические уравнения для R -го расчетного момента:

$$\gamma_{0\Pi} + \sum_{k=1}^p \Gamma_k^{ir} W_{k,m} = - \sum_{R=1}^4 \sum_{S=1}^{r-1} \delta_{R,S}^i W_{S,m}^R + 2\pi f_m^i, \quad m = 1, \dots, p, \quad (3.11)$$

$$\sum_{k=1}^p \Gamma_k^{ir} = \sum_{R=1}^4 \sum_{S=1}^{r-1} \delta_{R,S}.$$

Последнее уравнение в системе (3.11) получено из условия выполнения теоремы Томсона о постоянстве циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему тело и след.

В (3.11) $\gamma_{0\Pi}$ – регуляризирующая переменная; Γ_k^{ir} – интенсивность замкнутой вихревой рамки; W_{km} – скорость, индуцированная в точке M вихревой рамкой, единичной интенсивности, помещенной в точке M , f_m^i –

значение функции f^i в точке M ; p – количество вихревых рамок; δ – интенсивность свободного вихря.

Расположение дискретных вихрей в следующий расчетный момент находится по формулам:

$$\begin{aligned}x_{R,r+1} &= x_{R,r} + v_x \Delta t, \\y_{R,r+1} &= y_{R,r} + v_y \Delta t.\end{aligned}\tag{3.12}$$

4 ПОСТРОЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ТЕЛ

Если поверхность тела S замкнута и разбивается на n замкнутых вихревых ячеек, внутри берется по одной расчетной точке и составляется система n уравнений с n неизвестными, то матрица (3.11) является вырожденной. В этом случае решать задачи пространственного обтекания для замкнутых тел помогает введение регуляризирующей переменной, аналогичной предложенной ранее И.К.Лифановым для решения двумерных задач обтекания замкнутых профилей [8].

Суть этого приёма в таких задачах состоит в следующем.

Произвольно один из контуров, например, n -й выбрасывается из рассмотрения, однако соответствующая ему расчетная точка сохраняется. Величина Γ_n перестает быть циркуляцией контура L_n и становится фиктивной переменной, имеющей физический смысл величины протекания (одинаковой для всех контрольных точек T_i). Составляется матрица, последний столбец которой составлен из единичных элементов.

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n-1} & 1 \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1} & W_{n2} & \dots & W_{nm-1} & 1 \end{pmatrix},\tag{4.1}$$

а остальные элементы W_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n-1}$) определяются формулами (3.7) и вместо системы уравнений (3.10) решается система

$$\tilde{W}\Gamma = f.\tag{4.2}$$

Двораком А.В. [7] доказывается, что матрица \tilde{W} невырождена. Чтобы убедиться в этом, в практических задачах достаточно лишь проверить выполнение неравенства знаков для элементов матрицы:

$$W_{ij} > 0, \quad (i = j), W_{ij} < 0, \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (i \neq j).\tag{4.3}$$

Отметим, что циркуляция замкнутого вихревого контура имеет физический смысл скачка потенциала при переходе через поверхность, "натянутую" на этот контур. Таким образом, выбросив из рассмотрения контур L_n , мы тем самым предположили, что при переходе через S в точке T_n потенциал не терпит разрыв. Это предположение вполне законно, поскольку в задаче Неймана потенциал определен с точностью до постоянного слагаемого. Из физических соображений заданный интеграл от скачка потенциала по поверхности S в дискретном виде дает дополнительное уравнение

$$\sum_{i=1}^n S(i)\Gamma_i = f_{n+1}, \quad (4.4)$$

которое вместе с (3.10) приводит к переопределенной системе уравнений. В (4.4) $S(i)$ обозначена площадь соответствующих участков S_i . Переопределенная система (3.10), (4.4) решается с введением регуляризирующей переменной, а именно, решается система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными

$$W_{n+1}\Gamma = f \quad (4.5)$$

с матрицей

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{1n} & 1 \\ \ddots & & \ddots & \vdots \\ S_1^{n1} & \dots & S_{1n}^{nn} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Матрица (4.6) не вырождена.

5 ПРИМЕР РАСЧЕТА

В работе [9] приведены результаты расчета поля скоростей в проточной части центробежного насоса и гидродинамических сил на элементах проточной части по изложенному в работе алгоритму, и указаны основные размеры и расчетные режимы.

На рис.4 приведен график распределения относительной скорости по контуру профиля срединного сечения лопатки рабочего колеса центробежного насоса в нулевой момент времени по изложенному методу для случая обтекания её трехмерным потоком.

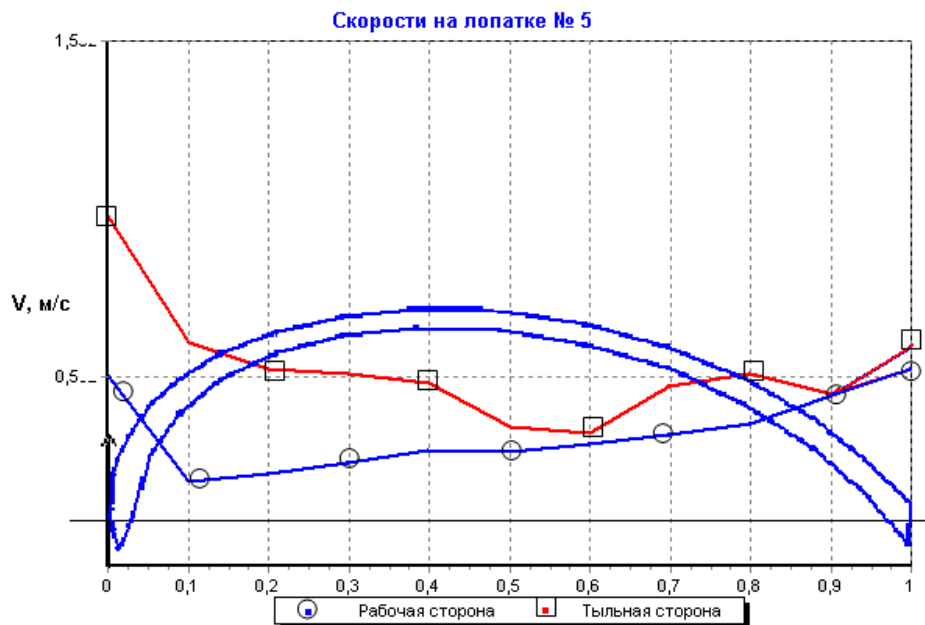


Рисунок 4

SUMMARY

This article considers solution of non-stationary flow of bodies, having sharp egress edge. Proposed solution uses method of hydrodynamic features, dispensed over surface of body. Modeling of vortex trace separation, that follows body, in case of bigger angle of attack, is taken into consideration.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хатунцев А.Ю., Мартинова Н.С., Косторной С.Д. Розв'язування задачі обтікання в плоскому потоці методом гідродинамічних особливостей // Вісник Сумського національного аграрного університету. – 2002.- Випуск 9.- С.17-19.
2. Давиденко А.К., Косторной А.С. Численное решение прямой задачи течения жидкости в проточной части центробежного насоса // Насосы & Оборудование. Отраслевой журнал. - 2004.- №2(25).- С.32-35.
3. Полтавский Л.Н. К условию Чаплыгина-Жуковского в линейной нестационарной задаче для профиля // Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Труды ВВИА им. Н.Е.Жуковского. -1986. - Выпуск 1313. - С.419-423.
4. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.:Наука, 1988. – 231 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1978.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1976. – Т.2.
7. Дворак А.В. Невырожденность матрицы метода дискретных вихрей в задачах пространственного обтекания // Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Труды ВВИА им. Н.Е.Жуковского. - 1986. - Выпуск 1313. - С.441-453.
8. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. - М.: Наука, 1985.
9. Косторной А.С. Исследование нестационарных характеристик потока в проточной части центробежного насоса // Насосы & Оборудование Отраслевой журнал. -2005.-№1(30). - С.18-19.

А.С. Косторной, СМНПО им. Фрунзе,
г. Сумы

Н.С. Мартынова, канд. техн. наук,
СумГУ, г. Сумы

Поступила в редакцию 29 марта 2007 г.