МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О. І. Оглобліна, Л. І. Брацихіна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 3

Суми
Сумський державний університет
2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів спеціальностей
6.030504 „Економіка підприємства”,
6.030507 „Маркетинг”, 6.030508 „Фінанси і кредит”,
6.030601 „Менеджмент організацій і адміністрування”
денної та заочної форм навчання

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ
ЧАСТИНА 3

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної та обчислювальної
математики
як конспект лекцій
з дисципліни „Вища математика”.
Протокол № 05 від 28.12.2010 р.

Суми
Сумський державний університет
2011

Вища математика: конспект лекцій у 3 частинах / укладачі: О. І. Оглобліна, Л. І. Брацихіна. – Суми: Сумський державний університет, 2011. – Ч.3. – 209 с.

Кафедра прикладної та обчислювальної математики

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Математичний аналіз вивчає змінні величини та функціональні залежності між ними.

§ 5. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

З курсу елементарної математики вам відомі взаємно обернені математичні дії: додавання – віднімання, множення – ділення, логарифмування – потенціювання та ін. Ще однією парою взаємно обернених математичних операцій є операції диференціювання та ***інтегрування.***

Як відомо, *диференціюванням функції* $y = F(x)$ називається процес знаходження похідної $F'(x) = f(x)$ даної функції, або знаходження її диференціала $dF(x) = F'(x)dx$. Зміст похідної – миттєва швидкість зміни функції $y = F(x)$ у кожній точці області неперервності функції.

Обернена задача – знайти функцію $y = F(x)$, якщо відома її похідна $F'(x) = f(x)$ або диференціал $dF(x) = f(x)dx$. Отже, ***обернена задача являє собою задачу знаходження вигляду функції в разі, коли відома функція її миттєвої швидкості зміни (похідної).***

Процес знаходження функції за її похідною називається ***інтегруванням,*** а розділ математики, що вивчає процес інтегрування і його властивості, називається ***інтегральним численням.***

Приклади задач, які зводяться до застосування інтегрального числення:

1. Знайти закон зміни траєкторії матеріальної точки $S = S(t)$ за відомою швидкістю нерівномірного руху цієї точки $V = V(t)$.

2. Знайти функцію продуктивних витрат $V = V(x)$ виробництва x одиниць продукції, маючи відомою маргінальну функцію витрат $V'(x)$ і т.ін.

5.1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла

Означення 1

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо для кожної точки x з цього проміжку виконується рівність

$$F'(x) = f(x), \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x)dx. \tag{5.1}$$

Наприклад, $ln(x)$ є первісною для функції $y = 1/x$, оскільки $(ln(x))' = 1/x$, і $dln(x) = dx/x$. Але, враховуючи, що похідна від будь - якої сталої C за правилами диференціювання дорівнює 0, можна також записати, що $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$, тобто

$$(ln(x)+1)' = 1/x, \ (ln(x)+1000)' = 1/x, \ (ln(x)-0{,}0003)' = 1/x,$$

і загалом

$$(ln(x)+C)' = 1/x, \ C = const.$$

Отже, функція $y = f(x)$ має нескінченну кількість первісних, які відрізняються одна від одної на сталу величину, –

$$F(x) + C. \tag{5.2}$$

На питання, чи весь клас первісних описує вираз (5.2), відповідає така теорема.

Теорема

Якщо $\boldsymbol{F_1(x)}$ та $\boldsymbol{F_2(x)}$ – первісні для функції $\boldsymbol{f(x)}$ на деякому проміжку $\boldsymbol{X}$, то знайдеться таке число, що буде справедливою рівність

$$\boldsymbol{F_2(x) = F_1(x) + C} . \qquad (5.3)$$

Доведення

Оскільки $\left(F_2(x) - F_1(x)\right)' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$, то, виходячи з наслідку з теореми Лагранжа, знайдеться таке $\boldsymbol{C}$, що $F_2(x) - F_1(x) = C$, або $\boldsymbol{F_2(x) = F_1(x) + C}$, і т.д.

Ця теорема доводить, що вираз (5.2) задає всі первісні для функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Означення 2

Сукупність усіх первісних для функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ на проміжку $\boldsymbol{X}$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ і позначається $\int f(x)dx$, де

$\int$ – знак інтеграла, $\boldsymbol{f(x)}$ – підінтегральна функція, $\boldsymbol{f(x)dx}$ – підінтегральний вираз.

Таким чином, якщо $\boldsymbol{F(x)}$ – деяка первісна для функції $\boldsymbol{y = f(x)}$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C = const . \qquad (5.4)$$

Наприклад, $\frac{x^3}{3}$ – *первісна для* $f(x) = x^2$, *отже,* $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Зауваження

1. У даному разі вважаємо, що $\boldsymbol{x}$ – незалежна змінна, тобто не розглядаємо можливу залежність змінної $\boldsymbol{x}$ від параметра.

2. Візьмемо надалі до уваги, що **достатньою умовою інтегрування** функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ на деякому проміжку $\boldsymbol{X}$ є **неперервність** цієї функції на даному проміжку.

Виходячи з означення невизначеного інтеграла, наведемо його властивості.

Властивість 1

Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює його підінтегральній **функції**, або

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

▪ Диференціюємо (5.4):

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = (F(x))' + (C)' = f(x).$$

Властивість 2

Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному **виразу**, або

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

▪ Згідно з визначенням диференціала функції і властивістю **1** маємо

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

Властивість 3

Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції з точністю до сталої, або

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

▪ Згідно з визначеннями первісної $\boldsymbol{F(x)}$ (5.1) та невизначеного інтеграла (5.4) маємо

$$dF(x) = f(x)dx \Rightarrow \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Висновки

Порівнюючи властивості ***2*** та ***3***, можна зробити висновок, що знаки $\boldsymbol{d}$ та $\int$ ***взаємно знищують*** один одного. У властивості ***3***, що правда, з ***точністю до сталої***.

Властивість 4

Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, або

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$$

де a – деяке число.

▪ Знайдемо похідну функції:

$$g(x) = \int af(x)dx - a\int f(x)dx,$$

$$g'(x) = \left(\int af(x)dx - a\int f(x)dx\right)' = \left(\int af(x)dx\right)' - \left(a\int f(x)dx\right)' =$$

$$= af(x) - a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x) - af(x) = 0.$$

Отже, виходячи з теореми Лагранжа, $\int af(x)dx = a\int f(x)dx + C$. Оскільки невизначений інтеграл знаходиться з точністю до сталої, то для остаточного запису властивості сталу $\boldsymbol{C}$ можна відкинути.

Властивість 5

Інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Ця властивість правильна для будь якої скінченної кількості доданків.

▪ Доводиться, як і властивість **4**.

Використовуючи означення інтеграла і його властивості, можна обчислити невизначені інтеграли від елементарних функцій.

Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій

1. $\int 0dx = C$;

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$;

3. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln(x) + C, \qquad x \neq 0$;

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0, a \neq 1$;

5. $\int e^x dx = e^x + C$;

6. $\int \sin x\, dx = \cos x + C$;

7. $\int \cos x\, dx = -\sin x + C$;

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\, \dfrac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\sin x} - ctg\, x\right| + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\cos x} - tg\, x\right| + C$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C = -\arccos\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \quad -a < x < a, \quad a \neq 0$;

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \ a \neq 0$;

14. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + C = -\dfrac{1}{a} arcctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \ a \neq 0$;

15. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right| + C, \ a \neq 0$;

16. $\int \dfrac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C, \ a \neq 0$.

17. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C,\ a \neq 0$

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C\ .$$

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C\ .$$

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл $\int \left(\frac{1+\sqrt[3]{x^2} + 4x^2 - 7\sqrt{x}}{x^4} \right) dx$.

Розв'язання

Перед тим як обчислити інтеграл, зведемо підінтегральну функцію до алгебраїчної суми елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^4} + \frac{4x^2}{x^4} - \frac{7x^{\frac{1}{2}}}{x^4} = x^{-4} + x^{\frac{2}{3}-\frac{12}{3}} + 4x^{2-4} - 7x^{\frac{1}{2}-\frac{8}{2}} =$$

$$= x^{-4} + x^{-\frac{10}{3}} + 4x^{-2} - 7x^{-\frac{7}{2}}\ .$$

Підставимо перетворену підінтегральну функцію до вихідного інтеграла і застосуємо до результату підстановки властивості №4, 5 невизначеного інтеграла:

$$\int \left(x^{-4} + x^{-\frac{10}{3}} + 4x^{-2} - 7x^{-\frac{7}{2}} \right) dx = \int x^{-4}dx + \int x^{-\frac{10}{3}}dx + \int 4x^{-2}dx -$$

$$-\int 7x^{-\frac{7}{2}}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{-\frac{10}{3}+\frac{3}{3}}}{-\frac{10}{3}+\frac{3}{3}} + 4\frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 7\frac{x^{-\frac{7}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{7}{2}+\frac{2}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3x^3} - \frac{3}{7}x^{-\frac{7}{3}} - 4x^{-1} + 7\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-\frac{5}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3x^3} - \frac{3}{7x^2\cdot\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{x} + \frac{14}{5x^2\cdot\sqrt{x}} + C\,.$$

Приклад 4

Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{dx}{3^x} = \int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln 3^{-1}} + C = \frac{3^{-x}}{-\ln 3} + C = -\frac{1}{3^x\ln 3} + C\,.$$

Приклад 5

Знайти невизначений інтеграл

$$\int 5^{2x-1}dx = \int 5^{2x}\cdot 5^{-1}dx = \frac{1}{5}\int 25^x dx = \frac{1}{5}\frac{25^x}{\ln 25} + C =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{5^{2x}}{\ln 5^2} + C = \frac{5^{-1}\cdot 5^{2x}}{2\ln 5} + C = \frac{5^{2x-1}}{2\ln 5} + C\,.$$

Приклад 6

Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{dx}{4x^2-1} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C\,.$$

Приклад 7

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right| - \frac{1}{2}\ln 2 + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right| + C_1, \quad C_1 = -\frac{1}{2}\ln 2 + C\,.$$

Приклад 8

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{4x^2+25}$.

$$\int \frac{dx}{4x^2+25} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\frac{25}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{5}{2}} arctg\,\frac{x}{\frac{5}{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5} arctg\,\frac{2x}{5}\right) + C = \frac{1}{10} arctg\,\frac{2x}{5} + C\,.$$

Приклад 9

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2dx}{x^2+4}$.

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+4} = \int \frac{\left(x^2+4-4\right)dx}{x^2+4} = \int \frac{\left(x^2+4\right)dx}{x^2+4} - \int \frac{4dx}{x^2+4} =$$

$$= \int dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4} = x + \frac{4}{2} arctg\,\frac{x}{2} + C = x + 2arctg\,\frac{x}{2} + C\,.$$

5.2. Методи інтегрування

Розглянемо основні методи, які застосовуються для знаходження невизначеного інтеграла функції.

5.2.1. Метод заміни змінної

Наведемо ще одну властивість невизначеного інтеграла, на якій базується інтегрування за допомогою заміни змінної.

Властивість 6

Нехай на деякому проміжку $\boldsymbol{X}$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Нехай змінна $\boldsymbol{x}$ на цьому проміжку задана параметрично $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t})$ і є неперервною і диференційованою за параметром $\boldsymbol{t}$, який належить до деякого інтервала **T**. Тоді функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\varphi(\boldsymbol{t}))$, яка задана на інтервалі **T**. У цьому разі

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \tag{5.5}$$

▪ Доводиться так само, як і властивість 4.

Приклад 1

1. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{1-2x}$.

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \left\{ \begin{matrix} 1-2x = t \\ -2dx = dt \\ dx = \dfrac{-dt}{2} \end{matrix} \right\} = \int \frac{-dt}{2t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C\,.$$

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл

$$\int\cos(2x+3)dx=\left\{\begin{aligned}&2x+3=t\\&2dx=dt\\&dx=\frac{dt}{2}\end{aligned}\right\}=\int\frac{\cos t\,dt}{2}=-\frac{1}{2}\sin t+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C\,.$$

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл

$$\int e^{-2x+7}dx=\left\{\begin{aligned}&-2x+7=t\\&-2dx=dt\\&dx=\frac{-dt}{2}\end{aligned}\right\}=\int\frac{-e^t}{2}dt=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x+7}+C\,.$$

Приклад 4

Знайти інтеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}=\left\{\begin{aligned}&\sqrt{4-3x}=t\\&\frac{-3dx}{2\sqrt{4-3x}}=dt;\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}=\frac{-2}{3}dt\end{aligned}\right\}=-\frac{2}{3}\int dt=$$

$$=-\frac{2}{3}t+C=-\frac{2}{3}\sqrt{4-3x}+C\,.$$

У всіх вищенаведених прикладах використовувалася лінійна підстановка $\boldsymbol{t=kx+b}$, де $\boldsymbol{k,b}$ – довільні сталі числа. З урахуванням такої підстановки можна записати властивість невизначеного інтегралу:

Властивість 7

Нехай $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - деяка первісна для функції $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, тобто $\int f(x)dx = F(x)+C$. Тоді

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C, \qquad k,b\in R. \qquad (5.6)$$

Ця властивість показує, що при застосуванні лінійної заміни перед первісною з'являється числовий множник, обернений до коефіцієнта при $\boldsymbol{x}$ в даній лінійній заміні.

Розглянемо ще декілька прикладів інтегрування з використанням заміни змінної.

Приклад 5

Знайти інтеграл

$$\int xe^{-x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} -x^2=t;\ -2xdx=dt \\ xdx=-\dfrac{dt}{2} \end{array}\right\} = -\int\frac{e^t dt}{2} = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Приклад 6

Знайти інтеграл

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x}=t; \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt;\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array}\right\}\int 2e^t dt = 2\int e^t dt =$$

$$= 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Приклад 7

Знайти інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x} = \left\{\begin{array}{l} \ln x=t; \\ \dfrac{dx}{x}=dt \end{array}\right\} = \int\sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C.$$

Приклад 8

Знайти інтеграл

$$\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\begin{Bmatrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{Bmatrix}=$$

$$=\int\frac{-dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

Приклад 9

Знайти інтеграл

$$\int\frac{x^2+1}{x+2}dx=\begin{Bmatrix}x+2=t;\ dx=dt\\ x=t-2\end{Bmatrix}=\int\frac{(t-2)^2+1}{t}dt=$$

$$=\int\frac{t^2-4t+4+1}{t}dt=\int tdt-4\int dt+5\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{t^2}{2}-4t+5\ln|t|+C=\frac{(x+2)^2}{2}-4(x+2)+5\ln|(x+2)|+C.$$

Зауваження

1. Якщо підінтегральний вираз містить корінь типу $\sqrt{a^2-x^2}$*, доцільно застосовувати підстановку* $x=a\cos t$ або $x=a\sin t$.

Приклад 10

Знайти інтеграл

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\begin{Bmatrix}x=a\cos t\\ dx=-a\sin tdt\\ t=\arccos\frac{x}{a}\end{Bmatrix}=\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}(-a\sin t)dt=$$

$$=-\int a^2\sqrt{1-\cos^2 t}\sin tdt=-a^2\int\sqrt{\sin^2 t}\sin tdt=-a^2\int\sin^2 tdt=$$

$$= -a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{a^2}{2}\left(\int dt - \int\cos 2t dt\right) =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = -\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t\right)+C =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a}-\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right)+C =$$

$$= \left\{\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a};\ \cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}\right\} =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

Зауваження

1. Якщо підстановка обрана вдало, то інтеграл спроститься. Інакше підстановка немає сенсу.

2. Приклад однієї з відомих вдалих підстановок, яку винайшов видатний вчений XVIII ст. член Петербурзької академії наук Л.Ейлер. Для отримання невизначеного інтеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ *він застосував підстановку* $t = x+\sqrt{x^2\pm a^2}$;

$$dt = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)dx,\ dt = \left(\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)dx = \frac{t\cdot dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}};$$

$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$, $\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$, що відповідає табличному інтегралу №13.

5.2.2. Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами є оберненим до правила диференціювання добутку двох функцій. Нехай задані функції $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ та $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$. Як відомо з попереднього матеріалу,

$$\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v', \text{ або } \frac{d\left(u \cdot v\right)}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx},$$

або $d\left(u \cdot v\right) = du \cdot v + u \cdot dv$ – диференціал добутку двох функцій.

Виконаємо обернену до диференціювання операцію – операцію інтегрування. Проінтегруємо обидві частини:

$$\int d\left(u \cdot v\right) = \int \left(du \cdot v + u \cdot dv\right).$$

Оскільки $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ та $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, то $du = u'dx$, $dv = v'dx$. Підставимо до інтеграла:

$$\int \left(v \cdot u'dx + u \cdot v'dx\right) = \int \left(u' \cdot v + u \cdot v'\right)dx \underbrace{=}_{\text{власт №5}} \int v \cdot u'dx + \int u \cdot v'dx =$$

$$= \int vdu + \int udv.$$

За властивістю №3 $\int d\left(u \cdot v\right) = uv + C$, отже, $uv = \int vdu + \int udv$.

З останньої формули випливає ***метод інтегрування частинами***. Якщо підінтегральний вираз можна подати як добуток функції $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ та диференціала функції $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, то невизначений інтеграл можна знайти за формулою

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (5.7)$$

За допомогою ***формули інтегрування частинами*** (5.7) значно спрощується процес віднаходження невизначеного інтеграла. Але для продуктивної роботи необхідно в даному підінтегральному виразі правильно вибрати $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{dv}$. Наведемо деякі рекомендації щодо вибору цих величин. Якщо під знаком інтеграла стоять функції типу

$$\int \underbrace{P_n\left(x\right)}_{u} \cdot \underbrace{\left\{\begin{matrix} a^x, e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{matrix}\right\} dx}_{dv},$$

де $P_n\left(x\right)$ – поліном степеня n, в цьому разі поліном беремо за функцію $\boldsymbol{u}$, а прямі тригонометричні та показникові функції разом з $\boldsymbol{dx}$ візьмемо за $\boldsymbol{dv}$.

Якщо під знаком інтеграла стоять функції типу

$$\int \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \log_a x;\ \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arcctgx \end{matrix} \right\}}_{u} \underbrace{P_n\left(x\right)dx}_{dv},$$

де $P_n(x)$ – поліном степеня n, в цьому разі поліном разом з $\boldsymbol{dx}$ беремо за $\boldsymbol{dv}$, а обернені тригонометричні і логарифмічні функції – за $\boldsymbol{u}$.

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл $\int e^{3x+1}(1-9x)dx$.

$$\int e^{3x+1}(1-9x)dx = \left\{ \begin{matrix} 1-9x=u,\ \dfrac{du}{dx}=-9,\ du=-9dx \\ e^{3x+1}dx=dv,\ \ v=\int e^{3x+1}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x+1} \end{matrix} \right\} = uv-\int vdu =$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x+1}(1-9x)-\int\frac{1}{3}e^{3x+1}(-9)dx=\frac{1}{3}e^{3x+1}(1-9x)+\frac{9}{3}\int e^{3x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x+1}(1-9x)+3\frac{1}{3}e^{3x+1}+C=\frac{1}{3}e^{3x+1}(1-9x)+e^{3x+1}+C=$$

$$=\frac{4+9x}{3}e^{3x+1}+C.$$

$$\boxed{\int e^{3x+1}(1-9x)dx=\frac{4+9x}{3}e^{3x+1}+C}.$$

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл $\int(3-8x)arctg\,4xdx$.

$$\int arctg\,4x(3-8x)dx = \left\{ \begin{matrix} u=arctg\,4x,\ \ \dfrac{du}{dx}=\dfrac{4}{1+16x^2},\ du=\dfrac{4dx}{1+16x^2} \\ dv=(3-8x)dx,\ \ v=\int(3-8x)dx=3x-4x^2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= uv - \int v du = \left(3x - 4x^2\right) arctg\, 4x - \int \left(3x - 4x^2\right) \frac{4dx}{1+16x^2} =$$

$$= \left(3x - 4x^2\right) arctg\, 4x + \underbrace{\int \frac{\left(16x^2 - 12x\right)dx}{1+16x^2}}_{I_1};$$

$$I_1 = \int \frac{\left(16x^2 - 12x\right)dx}{1+16x^2} = \int \frac{\left(16x^2 + 1 - 1 - 12x\right)dx}{1+16x^2} =$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+16x^2} - \int \frac{12xdx}{1+16x^2} = x - \frac{1}{4} arctg\, 4x - \int \frac{12xdx}{1+16x^2} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &1+16x^2 = t, \\ &32x = \frac{dt}{dx},\ 4dx = \frac{dt}{8} \end{aligned} \right\} = x - \frac{1}{4} arctg\, 4x - \frac{3}{8} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= x - \frac{1}{4} arctg\, 4x - \frac{3}{8} \ln|t| + C = x - \frac{1}{4} arctg\, 4x - \frac{3}{8} \ln\left|1+16x^2\right| + C;$$

$$\int arctg\, 4x(3-8x)dx = \left(3x - 4x^2\right) arctg\, 4x + x - \frac{1}{4} arctg\, 4x - \frac{3}{8} \ln\left|1+16x^2\right| + C$$

$$\boxed{\int arctg\, 4x(3-8x)dx = \left(3x - 4x^2 - \frac{1}{4}\right) arctg\, 4x + x - \frac{3}{8} \ln\left|1+16x^2\right| + C}.$$

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{aligned} &u = \sqrt{1+x^2},\ du = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &dv = dx,\ v = \int dx = x \end{aligned} \right\} = uv - \int v du =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 + 1 - 1dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C\ .$$

Одержали, що другий доданок збігається з вихідним інтегралом, але має протилежний знак. Перенесемо його ліворуч із зміною знака на додатний, отримаємо:

$$2\int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

Звідси

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C}.$$

Приклад 4

Знайти невизначений інтеграл $\int e^x \sin(3x+1)dx$.

У даному інтегралі підінтегральна функція є добутком двох прямих функцій. У цьому випадку за функцію ***u*** можна обирати будь - яку з них, наприклад тригонометричну функцію:

$$\int e^x \sin(3x+1)dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sin(3x+1), & du = 3\cos(3x+1)dx \\ dv = e^x dx, & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^x \sin(3x+1) - 3\int e^x \cos(3x+1).$$

Інтеграл другого доданка потребує повторного застосування інтегрування частинами. В даному випадку **необхідно послідовно взяти за *u* знову тригонометричну функцію:**

$$e^x \sin(3x+1) - 3\int e^x \cos(3x+1) = \left\{ \begin{matrix} u = \cos(3x+1), & du = -3\sin(3x+1)dx \\ dv = e^x dx, & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^x \sin(3x+1) - 3\left(e^x \cos(3x+1) + 3\int e^x \sin(3x+1)dx\right) =$$

$$= e^x \sin(3x+1) - 3e^x \cos(3x+1) - 9\int e^x \sin(3x+1)dx\ ;$$

В останньому доданку інтеграл співпадає з вихідним, але має коефіцієнт -9. Перенесемо цей доданок ліворуч, отримаємо

$$10\int e^x \sin(3x+1)dx = e^x \sin(3x+1) - 3e^x \cos(3x+1) + C\ ;$$

$$\boxed{\int e^x \sin(3x+1)dx = \frac{e^x}{10}\left(\sin(3x+1) - \frac{3}{10}\cos(3x+1)\right) + C}.$$

Зауваження

У прикладах 3, 4 наведені інтеграли, які в процесі інтегрування відтворюються у правій частині. Щоб обчислити такі інтеграли, потрібно перенести шуканий інтеграл до одного боку (ліворуч), всі інші математичні вирази залишити з іншого боку (праворуч) і розв’язати отримане рівняння відносно шуканого інтеграла.

Інтеграли такого типу називаються **циклічними інтегралами.**

5.2.3. Інтегрування раціональних дробів

Означення

Дріб називається ***раціональним***, коли його чисельник і знаменник є поліномами довільних цілих степенів, тобто дріб має вигляд

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m},$$

де a_i та b_k – коефіцієнти многочленів.

Дріб називається ***правильним***, якщо максимальний степінь змінної $\boldsymbol{x}$ у чисельнику менший за максимальний степінь $\boldsymbol{x}$ у знаменнику, тобто якщо $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{m}$. Якщо $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{m}$, дріб носить назву ***неправильний дріб.***

У разі, коли дріб неправильний, необхідно діленням за правилами ділення многочленів виділити у нього цілу частину, тобто дріб подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

де $\boldsymbol{M_{n-m}}$ – ціла частина дробу, поліном степеня ***n-m***, а $\boldsymbol{R(x)}$ – залишок від ділення, поліном степеня не більшого за ***m-1***,тобто $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб.

Приклад 1

$$\frac{4x^4-4x+5}{x^2-2x+1}=4x^2+8x+12+\frac{12x-7}{x^2-2x+1}.$$

Означення

Елементарними раціональними дробами I, II, III та IV типів називаються такі правильні дроби:

I. $\dfrac{A}{x-\alpha}$, II. $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, $k\geq 2, k\in Z$,

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\left(D=\dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$,

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $\left(k\geq 2,\;\; D=\dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$.

Умова, за якою дискримінант квадратного тричлена від'ємний, означає, що тричлен не розкладається на множники.

Інтегрування елементарних дробів

1. Елементарні дроби I і II типів інтегруються безпосередньо:

$$\int\frac{Adx}{x-\alpha}=A\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C,$$

$$\int\frac{Adx}{(x-\alpha)^k}=A\int(x-\alpha)^{-k}d(x-\alpha)=A\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

2. Елементарний дріб III типу інтегрується за допомогою заміни змінної. Спочатку у знаменнику потрібно ***виділити повний квадрат,*** а потім зробити заміну змінної:

$$I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}dx=$$

$$=\int\frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q}dx=\left\{\begin{aligned}&x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt,\\&x=t-\frac{p}{2},\ q-\frac{p^2}{4}=S\end{aligned}\right\}=$$

$$=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+S}dt=A\underbrace{\int\frac{tdt}{t^2+S}}_{I_1}+\left(B-A\frac{p}{2}\right)\underbrace{\int\frac{dt}{t^2+S}}_{I_2};$$

$$I_1=\int\frac{tdt}{t^2+S}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+S\right|+C,$$

$$I_2=\int\frac{dt}{t^2+S}=\frac{1}{\sqrt{S}}arctg\frac{t}{\sqrt{S}}+C;$$

$$I=AI_1+\left(B-A\frac{p}{2}\right)I_2=\frac{A}{2}\ln\left|t^2+S\right|+\frac{\left(B-A\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{S}}arctg\frac{t}{\sqrt{S}}+C.$$

Повертаючись до заміни $t=x+\frac{p}{2}$ *та* $S=q-\frac{p^2}{4}$, будемо мати остаточно

$$I=\frac{A}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right|+\frac{\left(B-A\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C,\text{ або}$$

$$\boxed{I=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{(2B-Ap)}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C}.$$

3. Інтеграл від елементарного дробу IV типу шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від елементарного дробу III типу.

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{5}{3x+4}dx$.

Маємо елементарний дріб I типу. У знаменнику стоїть вираз $kx+b,\ k=3,\ b=4$. Використовуючи властивість №7 для невизначеного інтеграла, маємо

$$\int \frac{5}{3x+4}dx = \frac{5}{3}\ln|3x+4| + C.$$

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{5}{(3x+4)^5}dx$.

$$\int \frac{5}{(3x+4)^5}dx = \left\{\begin{matrix} 3x+4=t, & 3dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{3} & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{5}{3}\int t^{-5}dt = \frac{5}{3}\frac{t^{-5+1}}{-4} + C = -\frac{5}{12}t^{-4} + C = -\frac{5}{12}(3x+4)^{-4} + C.$$

Приклад 4

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{5x-1}{4x^2+1}dx$.

Розв’язання

Маємо елементарний дріб III типу, у якого ***p=0***. Для того, щоб взяти такий інтеграл, його потрібно розкласти на два простіших, отримаємо 2 табличних інтеграли:

$$I = \int \frac{5x-1}{4x^2+1}dx = \underbrace{\int \frac{5xdx}{4x^2+1}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{dx}{4x^2+1}}_{I_2};$$

$$I_1 = 5\int \frac{xdx}{4x^2+1} = \left\{ \begin{matrix} 4x^2+1 = t, \ \ 8xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{8}dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{5}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{5}{8}\ln|t| + C = \frac{5}{8}\ln\left|4x^2+1\right| + C,$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot arctg\,\frac{x}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{4}arctg\,2x + C = \frac{1}{2}arctg\,2x + C;$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5}{8}\cdot\ln\left|4x^2+1\right| + \frac{1}{2}arctg\,2x + C.$$

Приклад 5

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x+4}{x^2+2x+3}dx$.

Розв'язання

Розглянемо тричлен знаменника:

$$x^2+2x+3=0,\ p=2,\ \ q=3,\ \frac{p^2}{4} - q = 1-3 = -2 < 0,$$

отже, знаменник не розкладається на множники. Маємо елементарний дріб III типу. Такий інтеграл береться шляхом виділення у знаменнику повного квадрата. Тим самим інтеграл зводиться до попереднього випадку:

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+1+2}dx = \int \frac{x+4}{(x+1)^2+2}dx = \left\{ \begin{matrix} x+1=t, \ \ dx=dt, \\ x = t-1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int \frac{t-1+4}{t^2+2}dt = \int \frac{tdt}{t^2+2} + 3\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+2\right| + \frac{3}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+2\right| + \frac{3}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|+\frac{3}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\,.$$

Теорема

Будь - який правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних раціональних дробів, коефіцієнти яких знаходяться за ***методом невизначених коефіцієнтів.***

Отже, інтегрування раціонального дробу зводиться у загальному випадку до інтегрування многочлена $\boldsymbol{M_{n-m}}$, що становить цілу частину дробу за умови, що $\boldsymbol{n>m}$, та суми елементарних дробів. Кількість і типи елементарних дробів визначаються коренями знаменника $\boldsymbol{Q_m(x)}$. Можливі такі випадки:

1. $\boldsymbol{Q_m(x)}$ має m дійсних і різних за значенням коренів $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}$. Тоді

$$Q_m(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_m),$$

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{R(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_m)}\,.$$

У цьому випадку дріб розкладається на $\boldsymbol{m}$ елементарних дробів I типу:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+...+\frac{A_m}{x-\alpha_m}\,. \qquad (*)$$

Невизначені коефіцієнти $\boldsymbol{A_1,A_2,...,A_m}$ знаходять із тотожності (*).

2. $\boldsymbol{Q_m(x)}$ має m дійсних коренів. Але серед них є m - k різних коренів $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-k}}$ та k однакових (кратних) коренів $\boldsymbol{\beta}$:

$$Q_m(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_{m-k})(x-\beta)^k,$$

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{R(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_{m-k})(x-\beta)^k}\,.$$

У цьому випадку дріб розкладається на $\boldsymbol{m}$ елементарних дробів I і II типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_{m-k}}{x-\alpha_{m-k}}+$$

$$+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}. \qquad (**)$$

Невизначені коефіцієнти $\boldsymbol{A_1, A_2,..., A_{m-k}}$, $\boldsymbol{B_1, B_2,..., B_k}$ знаходять із тотожності (**).

3. Корені знаменника дійсні, є кратні, але, крім того, знаменник містить квадратний тричлен, якій не розкладається на множники, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k\left(x^2+px+q\right),$$

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{R(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)^k\left(x^2+px+q\right)}.$$

У цьому разі дріб розкладається на елементарні дроби I, II та III типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}+\frac{Dx+E}{x^2+px+q}. \qquad (***)$$

Невизначені коефіцієнти $\boldsymbol{A_1, B_1, B_2,..., B_k, D, E}$ знаходять із тотожності (***).

Приклад 6

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{9-2xdx}{x^2+3x}$.

Розв'язання

Знаменник $\boldsymbol{Q(x)=x^2+3x}$ розкладається на добуток множників $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{(x+3)}$, отже, він має два дійсних різних корені –

$x_1 = 0$ та $x_2 = -3$. Згідно з теоремою підінтегральну функцію можна розкласти на суму елементарних дробів I типу:

$$\frac{9-2x}{x^2+3x} = \frac{9-2x}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)} =$$

$$= \frac{Ax+3A+Bx}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}.$$

Порівняємо вихідний дріб з тим, що отримали. Порівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \left\{\begin{array}{l} 9 = 3A; \\ -2 = A+B. \end{array}\right. \\ x^1 & \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l} A = 3; \\ B = -5. \end{array}\right.$$

Отже, $\frac{9-2x}{x^2+3x} = \frac{3}{x} - \frac{5}{(x+3)}$. Тому підінтегральний вираз можна подати у вигляді

$$\int \frac{9-2x}{x^2+3x}dx = \int\left(\frac{3}{x} - \frac{5}{(x+3)}\right)dx = \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{5}{(x+3)}dx =$$

$$= 3\ln|x| - 5\ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x^3}{(x+5)^5}\right| + C.$$

Відповідь $\boxed{\int \frac{9-2x}{x^2+3x}dx = \ln\left|\frac{x^3}{(x+5)^5}\right| + C}$.

Приклад 7

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x-3}{5x^2+7x-6}dx$.

Розв'язання

Знаменник $Q(x) = 5x^2 + 7x - 6$ має два дійсних різних корені: $x_1 = -2$ та $x_2 = 3/5$, отже, він розкладається на добуток різностей $Q(x) = 5(x - 3/5)(x+2)$. Отже, згідно з теоремою підінтегральну функцію можна розкласти на суму елементарних дробів I типу:

$$\frac{2x-3}{5x^2+7x-6}=\frac{2x-3}{5\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+2)}=\frac{2x-3}{(5x-3)(x+2)}=\frac{A}{(5x-3)}+\frac{B}{(x+2)}=$$

$$=\frac{A(x+2)+B(5x-3)}{(5x-3)(x+2)}=\frac{Ax+2A+5Bx-3B}{(5x-3)(x+2)}=\frac{(A+5B)x+(2A-3B)}{(5x-3)(x+2)}.$$

Порівняємо вихідний дріб з тим, що отримали. Порівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{array}{l|l|l} x^0 & \begin{cases} -3=2A-3B; \\ \ \ 2=A+5B. \end{cases} & \begin{array}{l} \leftarrow \\ \times(-2) \end{array} \\ x^1 & & \end{array}$$

$$\begin{cases} -7=-13B; \\ 2=A+5B. \end{cases} \quad \begin{cases} B=\frac{7}{13}; \\ 2=A+5\cdot\frac{7}{13}. \end{cases} \qquad \begin{cases} B=\frac{7}{13}; \\ A=\frac{26}{13}-\frac{35}{13}=-\frac{9}{13}. \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{2x-3}{5x^2+7x-6}=\frac{-\frac{9}{13}}{(5x-3)}+\frac{\frac{7}{13}}{(x+2)}=\frac{-9}{13(5x-3)}+\frac{7}{13(x+2)}.$$ Тому

підінтегральний вираз можна подати у вигляді

$$\int\frac{2x-3}{5x^2+7x-6}dx=\int\left(\frac{-9}{13(5x-3)}+\frac{7}{13(x+2)}\right)dx=$$

$$=-\frac{9}{13}\int\frac{dx}{(5x-3)}+\frac{7}{13}\int\frac{dx}{(x+2)}=\frac{-9}{13}\frac{1}{5}\ln|5x-3|+\frac{7}{13}\ln|x+2|+C=$$

$$=-\frac{9}{65}\ln|5x-3|+\frac{7}{13}\ln|x+2|+C.$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{2x-3}{5x^2+7x-6}dx=-\frac{9}{65}\ln|5x-3|+\frac{7}{13}\ln|x+2|+C}.$

Приклад 8

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{39-2x}{(x-2)^2(x+5)}dx$.

Розв'язання

Знаменник $\boldsymbol{Q(x)=(x\text{ - }2)^2(x+5)}$ має три дійсних корені: $\boldsymbol{x_1=\text{-}5}$ та та два кратних $\boldsymbol{x_2=x_3=2}$. Отже, згідно з теоремою підінтегральну функцію можна розкласти на суму елементарних дробів I і II типів:

$$\frac{39-2x}{(x-2)^2(x+5)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x+5)}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+5)+B(x+5)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+5)}=$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+5Ax-10A+Bx+5B+Cx^2-4xC+4C}{(3x-2)^2(x+5)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(3A+B-4C)x+(-10A+5B+4C)}{(3x-2)^2(x+5)}.$$

Порівняємо вихідний дріб з тим, що отримали. Порівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{array}{c|} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 39=-10A+5B+4C; \\ -2=3A+B-4C; \\ 0=A+C. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 39=10C+5B+4C; \\ -2=-3C+B-4C; \\ A=-C. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 39=14C+5B; \\ -2=-7C+B; \\ A=-C. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \leftarrow \\ \times(-5) \\ \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 49C=49; \\ -2=-7C+B; \\ A=-C \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} C=1; \\ -2=-7+B; \\ A=-1. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} C=1; \\ B=5; \\ A=-1. \end{array}\right.$$

Отже,

$$\frac{39-2x}{(x-2)^2(x+5)}=-\frac{1}{(x-2)}+\frac{5}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+5)}.$$

Таким чином,

$$\int \frac{39-2x}{(x-2)^2(x+5)}dx = \int\left(-\frac{1}{(x-2)}+\frac{5}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+5)}\right)dx =$$

$$= -\int\frac{dx}{(x-2)}+\int\frac{5dx}{(x-2)^2}+\int\frac{dx}{(x+5)} =$$

$$= -\ln|x-2| - \frac{5}{(x-2)} + \ln|x+5| + C = \ln\frac{(x+5)}{(x-2)} - \frac{5}{(x-2)} + C\ .$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{39-2x}{(x-2)^2(x+5)}dx = \ln\frac{(x+5)}{(x-2)} - \frac{5}{(x-2)} + C}$.

Приклад 9

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{2x}{(x^2+1)(x+2)}dx$.

Розв'язання

Знаменник $\boldsymbol{Q(x)=(x^2+1)(x+5)}$ має 1 дійсний корінь $\boldsymbol{x_1=-5}$ та квадратний двочлен, який не розкладається**.** Отже, згідно з теоремою підінтегральну функцію можна розкласти на суму елементарних дробів І і ІІІ типів:

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x^2+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+(A+2C)}{(x^2+1)(x+2)}\ .$$

Порівняємо вихідний дріб з тим, що отримали. Порівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{array}{l|} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{array}\begin{cases} 0 = A+2C; \\ 2 = 2B+C; \\ 0 = A+B. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = -B+2C; \\ 2 = 2B+C; \\ A = -B. \end{cases} \begin{cases} B = 2C; \\ 2 = 4C+C; \\ A = -B \end{cases} \begin{cases} B = 0.8; \\ C = \dfrac{2}{5} = 0.4 \\ A = -0.8 \end{cases}.$$

Отже,

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x+2)} = -\frac{0.8}{(x+2)} + \frac{0.8x+0.4}{(x^2+1)}.$$

Отже,

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+2)}dx = \int\left(-\frac{0.8}{(x+2)} + \frac{0.8x+0.4}{(x^2+1)}\right)dx =$$

$$= \int\frac{0.8xdx}{(x^2+1)} + \int\frac{0.4dx}{(x^2+1)} - \int\frac{0.8dx}{(x+2)} = 0.4\ln\left|x^2+1\right| + 0.4arctg\, x -$$

$$-0.8\ln|x+2| + C = 0.4\left(\ln\left|\frac{(x^2+1)}{(x+2)^2}\right| + arctg\, x\right) + C.$$

Відповідь $\boxed{\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+2)}dx = 0.4\left(\ln\left|\frac{(x^2+1)}{(x+2)^2}\right| + arctg\, x\right) + C}$.

5.2.4. Інтегрування тригонометричних функцій

I. Інтеграли типу $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx}$,

де $R(\sin x, \cos x)$ - раціональна функція від ***sinx*** та ***cosx***, зводяться до раціональних дробів за допомогою ***універсальної тригонометричної підстановки:***

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = t, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}\right)}.$$

При цьому використовують такі співвідношення:

$$\boxed{x = 2arctg\, t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}};$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2 x + \cos^2 x} =$$

$$=\frac{2}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}=\frac{2}{tg\frac{x}{2}+\dfrac{1}{tg\frac{x}{2}}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{t^2+1},$$

отже, $\boxed{\sin x=\frac{2t}{t^2+1}}$.

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{1-t^2}{t^2+1},$$

отже, $\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}}$.

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$tg\frac{x}{2}=t,\quad x=2arctg\,t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

отримаємо

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)}\cdot\frac{(1+t^2)}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C}$.

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$tg\frac{x}{2}=t,\quad x=2arctg\,t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

отримаємо

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)}\cdot\frac{\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{x}{2}}{ctg\frac{\pi}{4}-tg\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\underbrace{tg\frac{\pi}{4}}_{1}\right|+C=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C\,.$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C}$.

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sin x+3\cos x-4}$.

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$tg\frac{x}{2}=t,\quad x=2arctgt,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

отримаємо

$$\int\frac{dx}{\sin x+3\cos x-4}=\int\frac{2dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}-4\right)\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\int\frac{2dt}{2t+3\left(1-t^2\right)-4\left(1+t^2\right)}=\int\frac{2dt}{2t+3-3t^2-4-4t^2}=$$

$$=\int\frac{2dt}{-7t^2+2t-1}=-\int\frac{2dt}{7t^2-2t+1}.$$

$D=4-28=-24<0$. Отже, знаменник не розкладається на елементарні складові. Маємо дріб III типу.

$$-\int\frac{2dt}{7t^2-2t+1}=-\int\frac{2dt}{7\left(t^2-\frac{2}{7}t+\frac{1}{7}\right)}=-\frac{1}{7}\int\frac{2dt}{t^2-2\frac{1}{7}t+\frac{1}{49}-\frac{1}{49}+\frac{1}{7}}=$$

$$=-\frac{2}{7}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{6}{49}}=\left\{\begin{matrix}t-\frac{1}{7}=u\\ dt=du\end{matrix}\right\}=-\frac{2}{7}\int\frac{du}{u^2+\frac{6}{49}}=$$

$$=\left\{\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C;\quad a=\frac{1}{7}\right\}=-\frac{2}{7}\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{7}}arctg\frac{u}{\frac{\sqrt{6}}{7}}+C=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{6}}arctg\frac{7u}{\sqrt{6}}+C=-\frac{2}{\sqrt{6}}arctg\left[\frac{7\left(t-\frac{1}{7}\right)}{\sqrt{6}}\right]+C=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{6}}arctg\left(\frac{7t-1}{\sqrt{6}}\right)+C==-\frac{2}{\sqrt{6}}arctg\left(\frac{7tg\frac{x}{2}-1}{\sqrt{6}}\right)+C.$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{dx}{\sin x+3\cos x-4}==-\frac{2}{\sqrt{6}}arctg\left(\frac{7tg\frac{x}{2}-1}{\sqrt{6}}\right)+C}$.

II. Інтеграли типу $\boxed{\int\sin^{2k+1}x\cos^m xdx \text{ або } \int\sin^p x\cos^{2l+1}xdx}$.

Розглянемо інтеграл $\boxed{\int \sin^{2k+1} x \cos^m x dx}$. Маємо непарний степінь для ***sinx*** і довільний для ***cosx*** .

У цьому випадку подаємо $\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \cdot \sin x$. Віднесемо виділений ***sinx*** до ***dx*** . Отримаємо $\sin x dx = -d(\cos x)$. За таких перетворень $\sin^{2k} x = (\sin^2 x)^k = (1-\cos^2 x)^k$. Підставимо всі результати перетворень до інтеграла:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^m x dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^m x d(\cos x) =$$

$= \{\cos x = t\} = \int (1-t^2)^k t^m dt$ - отримали інтеграл від степеневої функції.

Приклад 4

Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^3(3x-1)\cos^7(3x-1)dx$.

$$\int \sin^3(3x-1)\cos^7(3x-1)dx = \int \sin^2(3x-1)\cos^7(3x-1)\sin(3x-1)dx =$$

$$= \int (1-\cos^2(3x-1))\cos^7(3x-1)\sin(3x-1)dx = \left\{\begin{array}{l} \cos(3x-1) = t \\ -3\sin(3x-1)dx = dt \\ \sin(3x-1)dx = -\dfrac{dt}{3} \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int (1-t^2)t^7 dt = -\frac{1}{3}\int (t^7 - t^9)dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^{10}}{10}\right) + C =$$

$$= -\frac{\cos^8(3x-1)}{24} + \frac{\cos^{10}(3x-1)}{30} + C .$$

Відповідь

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int \sin^3(3x-1)\cos^7(3x-1)dx = \frac{1}{6}\cos^8(3x-1)\cdot\left(\frac{\cos^2(3x-1)}{5} - \frac{1}{4}\right) + C, \\ C = const. \end{array}}$$

Інтеграл типу $\int \sin^p x \cos^{2l+1} x dx$ береться за аналогією з попереднім інтегралом. Тільки до непарного степеня піднесений тепер ***cosx***, отже виділяють у інтегралі цього типу диференціал функції ***sinx***, тобто $\cos xdx = d(\sin x)$, $\cos^{2l} x = (1-\sin^2 x)^l$, $t = \sin x$. У цьому разі

$$\int \sin^p x \cos^{2l+1} xdx = \int \sin^p x(1-\sin^2 x)^l d(\sin x) = \{\sin x = t\} = \int t^p (1-t^2)^l dt .$$

III. Інтеграли типу $\boxed{\int \sin^{2k} x \cos^{2m} xdx}$.

Для отримання інтеграла цього типу застосовують зниження степеня тригонометричних функцій з використанням формул

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}}.$$

Приклад 5

Знайти невизначений інтеграл $I = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 xdx$.

$$I = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 xdx = \int \sin^4 x \cdot (\sin x \cdot \cos x)^2 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\sin^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\underbrace{\int \sin^2 2xdx}_{I_1} - 2\underbrace{\int \sin^2 2x \cos 2xdx}_{I_2} + \underbrace{\int (\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 dx}_{I_3}\right);$$

$$I_1 = \int \sin^2 2xdx = \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4xdx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C;$$

$$I_2 = \int \sin^2 2x \cos 2xdx = \begin{Bmatrix} \sin 2x = t; \\ 2\cos 2xdx = dt; \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 2x}{6} + C;$$

$$I_3=\int(\sin 2x\cos 2x)^2dx=\int\frac{\sin^2 4x}{4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{(1-\cos 8x)}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int dx-\int\cos 8xdx\right)=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C;$$

$$I=\frac{1}{16}\left(I_1-2I_2+I_3\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x-2\frac{\sin^3 2x}{6}+\frac{1}{8}x-\frac{1}{64}\sin 8x\right)+C=$$

$$=\frac{5}{128}x-\frac{1}{48}\sin^3 2x-\frac{1}{128}\sin 4x-\frac{1}{1024}\sin 8x+C.$$

Відповідь

$$\boxed{I=\int\sin^6 x\cdot\cos^2 xdx=\frac{5}{128}x-\frac{1}{48}\sin^3 2x-\frac{1}{128}\sin 4x-\frac{1}{1024}\sin 8x+C}.$$

IV. Інтеграли типу

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sin^{2k}x\cos^{2m}x};\qquad\int\frac{\sin^{2k}x}{\cos^{2m}x}dx;\quad\int\frac{\cos^{2k}x}{\sin^{2m}x}dx}.$$

В інтегралах наведеного типу у знаменнику стоять парні степені тригонометричних функцій. Для зведення таких інтегралів до табличних використовують тригонометричні формули

$$\boxed{1+tg^2x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\overbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}};$$

$$\boxed{1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}\quad;\qquad\frac{dx}{\cos^2 x}=d(tgx);\qquad\frac{dx}{\sin^2 x}=-d(ctgx)}.$$

Приклад 6

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 2x\cos^2 2x}$.

Розв'язання

$$\int\frac{dx}{\sin^2 2x\cos^2 2x}=\int\frac{dx}{(\sin 2x\cos 2x)^2}=\int\frac{dx}{\left(\frac{\sin 4x}{2}\right)^2}=\int\frac{4dx}{\sin^2 4x}=$$

$$=-\int d(ctg4x)=-ctg4x+C\ .$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{dx}{\sin^2 2x\cos^2 2x}=-ctg4x+C}$.

Приклад 7

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sin^4 5x\cos^2 5x}$.

Розв'язання

$$\int\frac{dx}{\sin^4 5x\cos^2 5x}=\int\frac{\left(1+ctg^2 5x\right)^2 d\left(tg5x\right)}{5}=\int\frac{\left(1+\frac{1}{tg^2 5x}\right)^2 d\left(tg5x\right)}{5}=$$

$$=\int\frac{\left(1+tg^2 5x\right)^2 d\left(tg5x\right)}{5tg^4 5x}=\left\{tg5x=t\right\}=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{5t^4}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\int\frac{1}{t^4}dt+\int\frac{2t^2dt}{t^4}+\int\frac{t^4dt}{t^4}\right)=-\frac{1}{15t^3}+\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{5}\int dt=$$

$$=-\frac{1}{15t^3}-\frac{2}{5t}+\frac{t}{5}+C=-\frac{1}{15tg^3 5x}-\frac{2}{5tg5x}+\frac{tg5x}{5}+C\ .$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{dx}{\sin^4 5x\cos^2 5x}=-\frac{1}{15tg^3 5x}-\frac{2}{5tg5x}+\frac{tg5x}{5}+C}$.

V. Інтеграли типу

$\boxed{\int\sin\alpha x\cos\beta xdx;\quad \int\cos\alpha x\cos\beta xdx;\quad \int\sin\alpha x\sin\beta xdx}$.

Для спрощення таких інтегралів застосовують формули

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sin ax\cdot\sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)x-\cos\left(a+b\right)x\right);\\
&\cos ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)x+\cos\left(a+b\right)x\right);\\
&\sin ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin\left(a-b\right)x+\sin\left(a+b\right)x\right);\\
&\cos ax\cdot\sin bx=\frac{1}{2}\left(\sin\left(a+b\right)x-\sin\left(a-b\right)x\right)
\end{aligned}}.$$

Приклад 8

Знайти невизначений інтеграл $\int\sin(3x+1)\cos(5x-5)dx$.

Використовуючи формули зведення тригонометричних функцій, запишемо підінтегральну функцію

$$\sin(3x+1)\cos(5x-5)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(3x+1-5x+5\right)+\sin\left(3x+1+5x-5\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(6-2x\right)+\sin\left(8x-4\right)\right).$$

Підставимо наведену функцію під інтеграл, отримаємо

$$\int\sin(3x+1)\cos(5x-5)dx=\int\frac{1}{2}\left(\sin\left(6-2x\right)+\sin\left(8x-4\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\sin\left(6-2x\right)dx+\int\sin\left(8x-4\right)dx\right).$$

Обидва інтеграли мають підінтегральні функції, які залежать від лінійної комбінації $\boldsymbol{ax+b}$. Отже, первісна матиме коефіцієнт $\boldsymbol{1/a}$. У першому інтегралі $\boldsymbol{a=-2}$, отже, коефіцієнт попереду первісної буде $\left(\boldsymbol{-1/2}\right)$. У другому інтегралі $\boldsymbol{a=8}$, отже, коефіцієнт попереду первісної буде $\left(\boldsymbol{1/8}\right)$.

$$\int\sin(3x+1)\cos(5x-5)dx=\frac{1}{2}\left(\int\sin\left(6-2x\right)dx+\int\sin\left(8x-4\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\cos\left(6-2x\right)\right)+\frac{1}{8}\left(-\cos\left(8x-4\right)\right)\right)+$$

$$+C=\frac{1}{4}\cos(6-2x)-\frac{1}{16}\cos(8x-4)+C.$$

5.2.5. Інтегрування ірраціональних функцій

I. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_n]{x}\right)$ зводяться до інтегралів від раціональних дробів заміною $\boldsymbol{x=tm}$, де $\boldsymbol{m}$ – найменший спільний знаменник дробових показників $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$.

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)}$.

Розв'язання

Маємо у чисельнику і знаменнику показники степенів $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$. Найменший загальний знаменник для цих дробів буде $\boldsymbol{6}$. Отже, заміна буде $\boldsymbol{x=t^6}$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)}=\left\{\begin{array}{l} x=t^6, dx=6t^5dt \\ t=\sqrt[6]{x} \end{array}\right\}=\int \frac{\sqrt[3]{t^6}\cdot 6\cdot t^5dt}{t^6\left(\sqrt{t^6}-\sqrt[3]{t^6}\right)}=$$

$$=6\int \frac{t^7dt}{t^8(t-1)}=6\int \frac{dt}{t(t-1)}=6\left(\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt\right)=6\left(\int \frac{dt}{t-1}-\int \frac{dt}{t}\right)=$$

$$=6\left(\ln|t-1|-\ln|t|\right)+C=6\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|1-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right|^6+C.$$

Відповідь

$$\boxed{\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)}=\ln\left|1-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right|^6+C}.$$

II. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right)$ в разі, коли $\boldsymbol{ad - bc \neq 0}$ є узагальненням попереднього випадку.

Заміною $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, де $\boldsymbol{s}$ є найменшим спільним знаменником дробових показників $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, ..., \frac{1}{r_n}$, підінтегральна функція зводиться до раціонального дробу.

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

Розв'язання

Маємо під коренем вираз типу $\frac{ax+b}{cx+d}$, $a=-1, b=1, c=1, d=1, ad-bc=-1-1=-2\neq 0$.

Отже, заміною буде $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Виразимо з підстановки $\boldsymbol{x}$

$$1-x = t^2 + xt^2; \quad 1-t^2 = x\left(1+t^2\right); \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$dx = \frac{-2t\left(1+t^2\right) - 2t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \frac{-4tdt}{\left(1+t^2\right)^2}; \quad 1+x = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2};$$

$\frac{1}{1+x} = \frac{1+t^2}{2}$. Підставимо всі заміни до інтеграла

$$\int \sqrt{t^2} \cdot \frac{\left(1+t^2\right)}{2} \cdot \frac{(-4)tdt}{\left(1+t^2\right)^2} = -2\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = -2\int \frac{\left(t^2+1-1\right)dt}{1+t^2} =$$

$$= -2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = -2t + 2arctgt + C =$$

$$=-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C\ .$$

Відповідь $\boxed{\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{1+x}=-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C}.$

III. Розглянемо окремі випадки інтегралів типу $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}$.

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Підкорінний вираз не є повним квадратом. У цьому випадку необхідно виділити повний квадрат:

$$x^2+4x+5=x^2+2\cdot2\cdot x+4+1=(x+2)^2+1\ .$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\left\{\begin{matrix}x+2=t\\dx=dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C\ .$$

Приклад 4

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$.

Підкорінний вираз не є повним квадратом. Знову виділяємо повний квадрат:

$$-x^2+4x+5=-\left(x^2-2\cdot2\cdot x+4-4\right)+5=-(x-2)^2+9\ .$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-2)^2+9}}=\left\{\begin{matrix}x-2=t\\dx=dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x-2}{3}+C.$$

Приклад 5

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Аналогічно з прикладом 1 виділяємо повний квадрат:

$x^2+4x+5=x^2+2\cdot2\cdot x+4+1=(x+2)^2+1$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\left\{\begin{matrix}x+2=t,\ x=t-2\\ dx=dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{(t-2)dt}{\sqrt{t^2+1}}=\underbrace{\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{2dt}{\sqrt{t^2+1}}}_{I_2};$$

$$I_1=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=\left\{\begin{matrix}\sqrt{t^2+1}=u\\ \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=du\end{matrix}\right\}=\int du=u+C=$$

$$=\sqrt{t^2+1}+C=\sqrt{x^2+4x+5}+C;$$

$$I_2=\int\frac{2dt}{\sqrt{t^2+1}}=2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C;$$

$$I=I_1-I_2=\sqrt{x^2+4x+5}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.$$

Приклад 6

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$.

Як і у всіх попередніх випадках, виділяємо повний квадрат:

$-x^2+4x+5=-(x^2-2\cdot2\cdot x+4-4)+5=-(x-2)^2+9$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{-(x-2)^2+9}}=\left\{\begin{matrix}x-2=t;x=t+2\\ dx=dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{(t+2)dt}{\sqrt{9-t^2}}=\int\frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}}+\int\frac{2dt}{\sqrt{9-t^2}}=$$

$$=-\sqrt{9-t^2}+2\arcsin\frac{t}{3}+C=-\sqrt{-x^2+4x+5}+2\arcsin\frac{x-2}{3}+C\,.$$

IV. Інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ знаходять, використовуючи заміну $x=a\cos t;\qquad x=a\sin t$.

Приклад 7

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx$.

Розв'язання

$$\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\left\{\begin{aligned}&x=2\sin t;\\&dx=2\cos t dt\end{aligned}\right\}=\int\frac{\sqrt{\left(4-4\sin^2 t\right)^3}}{2^6\sin^6 t}2\cos t dt=$$

$$=\int\frac{2^3\sqrt{\left(\cos^2 t\right)^3}}{2^6\sin^6 t}2\cos t dt=\int\frac{\cos^4 t}{2^2\sin^6 t}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int ctg^4 t\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{4}\int ctg^4 t d(ctgt)=\{ctgt=u\}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int u^4du=-\frac{1}{4}\cdot\frac{u^5}{5}+C=-\frac{1}{20}ctg^5 t+C\,.$$

Для того щоб отримати значення інтеграла як функції від ***x***, виразимо ***ctgt*** через ***sint*** :

$$ctg^5 t=ctg^4 t\cdot ctgt=\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}\frac{\cos t}{\sin t}=$$

$$=\frac{\left(1-\sin^2 t\right)^2\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^5 t}=\frac{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^5}}{\sin^5 t}\text{, отже,}$$

$$-\frac{1}{20}ctg^5 t+C=-\frac{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^5}}{20\sin^5 t}+C=\left\{\frac{x}{2}=\sin t\right\}=$$

$$=-\frac{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^5}}{\frac{20x^5}{32}}+C=-\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{20x^5}+C.$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx=-\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{20x^5}+C}$.

V. Інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ знаходять, використовуючи заміну

$$x=\frac{a}{\cos t}; \qquad x=\frac{a}{\sin t}.$$

Приклад 8

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sin t}; \quad \sin t=\frac{1}{x}; \quad t=\arcsin\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=\frac{\cos t}{\sin t} \end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{-\cos t dt}{\sin^2 t\frac{1}{\sin t}\frac{\cos t}{\sin t}}=-\int dt=-t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

Відповідь $\boxed{\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{x}+C}$.

VI. Інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ знаходять, використовуючи заміну $x = a\,tg\,t$; $\qquad x = a\,ctg\,t$.

Приклад 9

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$.

Розв'язання

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}} = \left\{\begin{array}{l} x = 3tgt;\ t = arctg\,\dfrac{x}{3} \\ dx = \dfrac{3dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{\left(9+x^2\right)^3} = \sqrt{\left(9+9tg^2t\right)^3} = 27\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^3} = 27\dfrac{1}{\cos^3 t} \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{9tg^2t\cdot 3dt}{\cos^2 t\cdot \dfrac{27}{\cos^3 t}} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \sin t = v;\ \cos t dt = dv;\ \sin^2 t = v^2 \\ \cos^2 t = 1-\sin^2 t = 1-v^2 \end{array}\right\} = \int \frac{v^2dv}{1-v^2} =$$

$$= -\int \frac{v^2-1+1dv}{v^2-1} = -\int\left(1+\frac{1}{v^2-1}\right)dv = -\int dv - \int\frac{dv}{v^2-1} =$$

$$= -v - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| + C = -\sin t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right| + C.$$

Із співвідношення $\frac{1}{\cos^2 t} = 1+tg^2t \Rightarrow 1-\sin^2 t = \frac{1}{1+tg^2t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin t = \sqrt{1-\frac{1}{1+tg^2t}} = \sqrt{\frac{tg^2t}{1+tg^2t}} = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}.$$

З урахуванням заміни $tgt = \frac{x}{3}$

$$\sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Остаточна відповідь

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-1}{\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x-\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}}{\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}}\right|+C=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{9+x^2}}{x+\sqrt{9+x^2}}\right|+C.$$

Відповідь $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{9+x^2}}{x+\sqrt{9+x^2}}\right|+C.$

5.2.6. Інтеграли, які не беруться в елементарних функціях

З основних правил диференціювання функцій випливає, що похідна від елементарних функцій є функцією елементарною. Про невизначений інтеграл це сказати не можна. Доведено, що від будь - якої елементарної функції ***існує*** невизначений інтеграл, але існує цілий клас елементарних функцій, у яких ***первісну не можна подати в елементарних функціях***. Наведемо деякі з таких інтегралів:

$$\int e^{-x^2}dx; \quad \int \frac{\sin x}{x}dx; \quad \int \frac{\cos x}{x}dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$

$$\int \sqrt{1-k\sin^2 x}\,dx; \quad \int \ln(\sin x)dx; \quad \int \ln(\cos x)dx.$$

Ці інтеграли не можна знайти за допомогою наведених вище методів. Але це не означає, що вони не існують або їх неможливо знайти. Просто методи інтегрування таких інтегралів виходять за рамки даного курсу.

5.3. Визначений інтеграл

5.3.1. Означення визначеного інтеграла, його геометричний та економічний зміст

Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[\boldsymbol{a,b}]$ визначена неперервна функція $\boldsymbol{y = f(x) \ge 0}$ для всіх $\boldsymbol{x \in [a,b]}$.

Необхідно знайти площу $\boldsymbol{S}$ криволінійної трапеції, що обмежена кривою $\boldsymbol{y = f(x)}$, відрізком $[\boldsymbol{a,b}]$ та прямими $\boldsymbol{x = a,}$ $\boldsymbol{x = b}$.

1. Для обчислення заданої площі розіб'ємо відрізок $[\boldsymbol{a,b}]$ довільним чином на $\boldsymbol{n}$ частин точками $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b}$. Довжина отриманих частин буде $\boldsymbol{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$, $\boldsymbol{i = 1,2,\ldots,n}$. Проведемо перпендикуляри з кожної точки $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b}$ до перетину з кривою $\boldsymbol{y = f(x)}$, отримаємо $\boldsymbol{n}$ криволінійних трапецій (див. рис. 5.1).

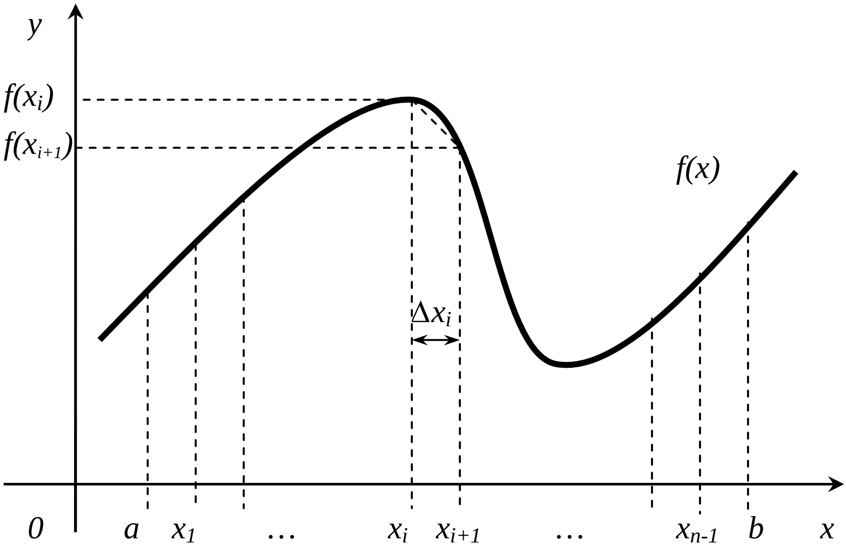

Рисунок 5.1

Усередині кожної трапеції виберемо довільну точку $\boldsymbol{\xi_i}$, $\boldsymbol{i = 1,2,...,n}$ і замінимо кожну з трапецій на прямокутник з довжиною $\boldsymbol{\Delta x_i}$ та висотою $\boldsymbol{y = f(\xi_i)}$. Площа цього прямокутника буде дорівнювати $\boldsymbol{f(\xi_i)\,\Delta x_i}$. Площа всієї криволінійної трапеції наближено знайдеться як

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (2)$$

Означення 1

Сума виду (1) називається ***інтегральною сумою Рімана*** функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Вочевидь, ця сума залежить як від способу ділення відрізка $[\boldsymbol{a,b}]$ точками, так і від вибору точок $\boldsymbol{\xi_i}$, $\boldsymbol{i = 1,2,...,n}$ на кожному з відрізків $[\boldsymbol{x_{i-1}, x_i}]$.

Відмітимо, що площа тим більше наближатиметься до площі криволінійної трапеції, чим щільніше будуть розташовані точки ділення відрізка $[a,b]$. Щоб отримати точну формулу для обчислення площі даної криволінійної трапеції, необхідно в (1) перейти до граничного значення, за умов, що $\Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (2)$$

Означення 2

Нехай границя (2) існує, скінченна і не залежна від способу ділення відрізка $[a,b]$ та добору точок ξ_i, $i = 1,2,...,n$. Тоді границя (2) називається ***визначеним інтегралом*** функції $y = f(x)$ на $[a,b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Сама функція $y = f(x)$ називається ***інтегрованою за Ріманом***, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (3)$$

Точка a називається ***нижньою межею інтегрування, точка b – верхньою межею інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом***. Задача про знаходження $\int_a^b f(x)dx$ є ***задачею інтегрування.***

Відмітимо головну відмінність визначеного інтеграла від невизначеного: якщо невизначений інтеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ є ***сім'єю кривих***, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є ***числом.***

Теорема

Достатня умова існування визначеного інтеграла

Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ неперервна на відрізку $[\boldsymbol{a,b}]$, то границя інтегральної суми (3) існує, тобто $\boldsymbol{y = f(x)}$ є ***інтегрованою*** на $[\boldsymbol{a,b}]$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

З означення визначеного інтеграла випливає, що коли $\boldsymbol{y = f(x)}$ невід'ємна на відрізку $[\boldsymbol{a,b}]$, $\boldsymbol{a < b}$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі $\boldsymbol{S}$ криволінійної трапеції, яка розташована між даною кривою, віссю $\boldsymbol{OX}$ та перпендикулярами $x = a$ та $x = b$.

Наприклад, площа прямокутника, який побудований прямою $\boldsymbol{y = 2}$, $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{b = 4}$ та віссю ***OX,*** буде

$$\int_0^4 2dx = 8.$$

Економічний зміст визначеного інтеграла

Нехай функція $\boldsymbol{z = f(t)}$ описує зміну продуктивності праці деякого виробництва в часі.

Знайдемо обсяг продукції ***U***, що була виготовлена за проміжок часу $[\boldsymbol{0,T}]$.

Нагадаємо, що продуктивність - це кількість виготовленої продукції за одиницю часу. Якщо продуктивність не змінюється з часом (стала функція), то обсяг продукції за проміжок часу $[\boldsymbol{t, t + \Delta t}]$ дорівнює $\boldsymbol{f(t)\Delta t}$, або $\boldsymbol{U = f(t)\mathrm{T}}$, що збігається з площею відповідного прямокутника. Нехай продуктивність є функцією, яка змінюється в часі. Розіб'ємо відрізок часу $[\boldsymbol{0,T}]$ на проміжки точками $\boldsymbol{0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T}$. На кожному проміжку $[\boldsymbol{t_{i-1}, t_i}]$ виберемо точку $\boldsymbol{\xi_i}$ і замінимо криволінійну трапецію на прямокутник із шириною $\boldsymbol{t_i - t_{i-1}}$ та висотою $f(\boldsymbol{\xi_i})$. Тоді обсяг виробництва на всьому інтервалі $[\boldsymbol{0,T}]$ приблизно дорівнювати-

ме $U=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$. Отримали інтегральну Ріманову суму, яка тим більше наближається до точного значення обсягу виробництва, чим ближче $\boldsymbol{\Delta t}$ до 0 ($\boldsymbol{\Delta t \to 0}$).
Отже, точна величина обсягу виробництва дорівнюватиме

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)dt$$ - визначеному інтегралу.

5.3.2. Властивості визначеного інтеграла

Будемо розглядати функції, що інтегруються на заданому проміжку. Використовуючи означення (3) та теореми про границі, виведемо такі властивості визначеного інтеграла.

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, або

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx,$$

де α – деяке число.

Доведення

Нехай задані розподіл інтервалу інтегрування $[\boldsymbol{a,b}]$ на відрізки та спосіб вибору точок $\boldsymbol{\xi_i}$, $\boldsymbol{i=1,2,...,n}$. Використовуючи асоціативний закон додавання, отримаємо таку інтегральну суму:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot f(\xi_i)\Delta\xi_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\xi_i .$$

Переходячи до границь і використовуючи їх властивості, отримаємо

$$\lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha\cdot f(\xi_i)\Delta\xi_i\right)=\lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\xi_i\right)=\alpha\lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\xi_i\right),$$

або

$$\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx \text{ і т. д.}$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій, або

$$\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx .$$

Ця властивість правильна для будь - якої скінченної кількості доданків.

Перейдемо тепер до властивостей, які має ***тільки*** визначений інтеграл

1) Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то числове значення інтеграла змінить знак, або

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx .$$

2) Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює 0:

$$\int_a^a f(x)dx=0 .$$

3) Якщо інтервал інтегрування розділений на частини точкою $\boldsymbol{c}$, тобто $[\boldsymbol{a,b}]=[\boldsymbol{a,c}]\cup[\boldsymbol{c,b}]$, то визначений інтеграл від функції $\boldsymbol{y=f(x)}$ на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ дорівнює сумі визначених інтегралів від цієї самої функції на інтервалах $[\boldsymbol{a,c}]$ та $[\boldsymbol{c,b}]$:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx, \quad c\in[a,b].$$

4) Якщо на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ задані функції $\boldsymbol{g(x)\le f(x)}$, то

$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx.$$

5) (Наслідок з властивості 4).

Нехай на інтервалі інтегрування $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ існують такі числа $\boldsymbol{M}$ та $\boldsymbol{m}$, що $\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{M}$, тобто $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – обмежена на $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, тоді

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

(випливає із 4) та з геометричного змісту формули $\int_a^b dx = b-a$).

6) Теорема про середнє

Якщо функція $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ неперервна на відрізку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, $(\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b})$, то знайдеться така точка $\xi \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Геометрично ця властивість означає, що коли підінтегральна функція неперервна, то всередині інтервалу інтегрування знайдеться така точка ξ, що площу криволінійної трапеції під функцією $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на інтервалі $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ можна замінити на площу прямокутника із шириною $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ та висотою $f(\xi)$.

7) Визначений інтеграл на симетричному інтервалі $[-a,a]$ дорівнює

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx.$$

5.3.3. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона – Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла

Для обчислення визначеного інтеграла необхідно знайти зв'язок між тими знаннями про інтегрування, що у нас є, і новою теорією, тобто між невизначеним і визначеним інтегралами.

Нехай на деякому інтервалі $[a,b]$ задана неперервна функція $f(x)$. Нам відомо, що площею криволінійної трапеції на цьому інтервалі є визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Візьмемо довільну точку $x \in [a,b]$. Якщо існує скінченна площа на всьому інтервалі, то очевидно скінченною величиною буде і площа трапеції для частини інтервалу $[a,x]$. Позначимо змінну на цьому інтервалі через t. Тоді можна записати, що площа на інтервалі $[a,x]$ дорівнює

$$\int_a^x f(t)dt. \tag{4}$$

Оскільки в інтервалі $[a,b]$ вміщується нескінченна кількість точок x, то ми очевидно за такого способу вибору верхньої границі можемо отримати нескінченну кількість значень визначеного інтеграла (4). Отже, ми отримали новий вид функції:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{5}$$

для $x \in [a,b]$.

Означення

Функція, задана згідно з (5) називається ***інтегралом із змінною верхньою межею.***

Розглянемо властивості нової функції, тобто властивості інтеграла із змінною верхньою межею.

Теорема 1

Якщо функція $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то функція $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ теж неперервна на цьому інтервалі.

Теорема 2

Нехай функція $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Тоді в кожній точці цього інтервалу похідна функції $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ за змінною верхньою межею $\boldsymbol{x}$ дорівнює підінтегральні функції. Тобто

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Доведення

Згідно з означенням похідної $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$. Знайдемо, чому дорівнює $\Delta\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$. Надамо аргументу $\boldsymbol{x}$ приріст $\boldsymbol{\Delta x}$. Тоді $\Delta\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$. За визначенням функції із змінною верхньою межею отримаємо

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

До останнього інтеграла застосуємо теорему про середнє (властивість 6 визначеного інтеграла). Тобто на інтервалі $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}]$ знайдеться така точка ξ, що

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)(x+\Delta x-x)= f(\xi)\Delta x.$$

Отже, $\Delta\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\Delta\boldsymbol{x}$. Підставимо у формулу похідної

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x),$$

що й потрібно було довести.

Наслідок

Якщо функція $\boldsymbol{y=f(x)}$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, то для неї на цьому інтервалі обов'язково існує первісна. Причому необов'язково ця первісна є елементарною функцією (зв'язок з інтегралами, що не беруться в елементарних функціях).

Теорема 3 (формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла)

Нехай функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ і $\boldsymbol{F(x)}$ – будь - яка первісна для неї на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$. Визначений інтеграл від функції $\boldsymbol{f(x)}$ на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ дорівнює ***приросту первісної $\boldsymbol{F(x)}$ на цьому інтервалі,*** тобто

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{6}$$

Доведення

Нехай $\boldsymbol{F(x)}$ – деяка первісна для $\boldsymbol{f(x)}$ на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$. Але за означенням інтеграла зі змінною межею $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ теж є первісною $\boldsymbol{f(x)}$ на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$. Як відомо з теорії невизначених інтегралів дві первісні відрізняються лише сталою $\boldsymbol{C}$. Отже, $\boldsymbol{F(x)=\Phi(x)+C}$. Розглянемо праву частину формули (6):

$$\boldsymbol{F(b)-F(a)=(\Phi(b)+C)-\Phi(a)+C=\Phi(b)-\Phi(a)}.$$

За означенням $\boldsymbol{\Phi(x)}$ $\quad \Phi(b)=\int_a^b f(t)dt; \quad \Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0$

(властивість 2).

Отже, $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx-0=\int_a^b f(x)dx$, що й потрібно було довести.

Обчислення визначеного інтеграла з використанням формули Ньютона-Лейбніца виконується за два етапи:

1. Знаходимо невизначений інтеграл з використанням усіх прийомів обчислення невизначеного інтеграла. Вважаємо, що константа $\boldsymbol{C=0}$.

2. Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, знаходимо приріст первісної. Для цього обчислюємо первісну в точках верхньої і нижньої меж інтегрування і знаходимо різницю $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$, яка дорівнює шуканому інтегралу.

Для зручності використання формули Ньютона-Лейбніца введемо позначення

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \tag{7}$$

Приклад

Обчислити $a)\int_0^1 x^2dx;\quad b)\int_1^2 2^{3x-4}dx$.

Розв'язання

$$a)\int_0^1 x^2dx=\left\{\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\right\}=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3};$$

$$b)\int_1^2 2^{3x-4}dx=\left\{\int 2^{3x-4}dx=\frac{2^{3x-4}}{3\ln 2}\right\}=\frac{2^{3x-4}}{3\ln 2}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{2^{3\cdot 2-4}}{3\ln 2}-\frac{2^{3\cdot 1-4}}{3\ln 2}=\frac{2^2}{3\ln 2}-\frac{2^{-1}}{3\ln 2}=\frac{4}{3\ln 2}-\frac{1}{6\ln 2}=\frac{7}{6\ln 2}.$$

5.3.4 Заміна змінної та формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Для обчислення визначеного інтеграла можна застосовувати ті самі методи, що й для знаходження невизначеного інтеграла.

1. Заміна змінної

Теорема 1

Нехай $\boldsymbol{f(x)}$ – неперервна функція на інтервалі $[a,b]$. І нехай $\boldsymbol{x}$, у свою чергу, є неперервною диференційованою функцією від параметра t: $\mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t})$, $\boldsymbol{t}\in[\alpha,\beta]$. Розглянемо $\boldsymbol{f(x)=f(\varphi(t))}$.

- Якщо $\boldsymbol{f(\varphi(t))}$ визначена і неперервна на інтервалі $[\alpha,\beta]$.
- Якщо $\boldsymbol{t}\in[\alpha,\beta]$, то $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a,b}]$, де $\boldsymbol{a}=\varphi(\alpha)$, $\boldsymbol{b}=\varphi(\beta)$,

то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \tag{8}$$

Доведення

Нехай $\boldsymbol{F(x)}$ є первісною $\int_a^b f(x)dx$, а $\boldsymbol{\Phi(t)}$ – первісною $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Згідно із властивістю 6 невизначених інтегралів у наведеного інтеграла є ще одна первісна $\boldsymbol{F(\varphi(t))}$. Тоді $\boldsymbol{\Phi(t)=F(\varphi(t))+C}$, де $\boldsymbol{t}\in[\alpha,\beta]$. Тоді, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, можемо записати $\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=$ $=F(\varphi(\beta))+C-(F(\varphi(\alpha))+C)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)$.

Але $\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, а $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$. Отже,

$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Використання заміни змінної, як і для невизначеного інтеграла, допоможе спростити інтеграли до табличних.

Є й відмінність: у випадку визначеного інтеграла ***немає потреби повертатися до початкової змінної. Достатньо обчислити значення нових границь інтегрування. Якщо*** $x=\varphi(t)$, ***де*** $\varphi(t)$ ***є неперервною функцією, то існує*** $t=\psi(x)$. ***Тоді***

$$\alpha=\psi(a),\ \beta=\psi(b).$$

Приклад 1

Обчислити визначений інтеграл $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

Розв'язання

$$\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\begin{Bmatrix} x=t^6;\ dx=6t^5dt;\ t=\sqrt[6]{x}; \\ \alpha=\sqrt[6]{0}=0;\ \beta=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2} \end{Bmatrix}=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\cdot t^3+t^2\right)\cdot 6\cdot t^5dt=6\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}}t^8dt+6\int_0^{\sqrt{2}}t^7dt=$$

$$=6\sqrt{2}\left.\frac{t^9}{9}\right|_0^{\sqrt{2}}+6\left.\frac{t^8}{8}\right|_0^{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}\,\frac{2^{\frac{9}{2}}}{9}-0+6\frac{2^4}{2^3}=\frac{2}{3}2^{\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}+12=$$

$$=\frac{2^6}{3}+12=\frac{64}{3}+12\approx 21{,}33+12=33{,}33$$

Відповідь $\boxed{\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=33.33}$.

Приклад 2

Обчислити визначений інтеграл $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\begin{Bmatrix} \ln x=t;\ \dfrac{dx}{x}=dt; \\ \alpha=\ln e^2=2;\ \beta=\ln e=1 \end{Bmatrix}=$$

$$=\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}693\,.$$

Відповідь $\boxed{\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} \approx 0.693}$.

Приклад 3

Обчислити визначений інтеграл $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1+e^x} = t; \quad e^x = t^2 - 1; \quad e^x dx = 2tdt; \\ dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1}; \;\; \alpha = \sqrt{1+e^{\ln 3}} = \sqrt{1+3} = 2; \\ \beta = \sqrt{1+e^{\ln 8}} = \sqrt{1+8} = 3 \end{array}\right\} =$$

$$= \int_2^3 \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = \int_2^3 \frac{2dt}{(t^2-1)} = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 =$$

$$= \ln\left|\frac{2}{4}\right| - \ln\left|\frac{1}{3}\right| = -\ln|2| + \ln|3| = \ln\left|\frac{3}{2}\right| \approx 0{,}405\,.$$

Відповідь $\boxed{\int_{Ln3}^{Ln2} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \approx 0.405}$.

2. Інтегрування частинами

Теорема 2

Нехай функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ та $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ мають неперервні похідні на інтервалі $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Тоді

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du\,, \tag{9}$$

де $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Доведення

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b udv + \int_a^b vdu = \int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b$$, що і т. д.

Приклад 4

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx .$$

Розв'язання

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} \ln x = u; \ \ \dfrac{dx}{x} = du; \\ dv = x^2 dx; \ \ v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3}\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3 dx}{3x} = \frac{8 \ln 2}{3} - \frac{\ln 1}{3} - \left(\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{8 \ln 2}{3} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \approx 1{,}848 - 0.778 \approx 1{,}07 .$$

Відповідь $\int_1^2 x^2 \ln x dx \approx 1.07$.

Приклад 5

$$\int_0^\pi x \sin x .$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x; \ \ du = dx; \ \ dv = \sin x dx; \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right\} =$$

$$= (-x \cos x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx = -\pi \cdot (-1) - 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi .$$

Відповідь $\int_0^\pi x \sin x dx = \pi$.

5.3.5. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

5.3.5.1. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР

1. Нехай на інтервалі $\left[\boldsymbol{a,b}\right]$ задана неперервна невід'ємна функція $\boldsymbol{y = f\left(x\right)}$. Тоді згідно з геометричним змістом визначеного інтеграла площа криволінійної трапеції, обмеженої даною функцією, віссю $\boldsymbol{OX}$ та прямими $\boldsymbol{x = a,\ x = b}$, чисельно дорівнює визначеному інтегралу

$$S = \int_a^b f\left(x\right)dx.$$

Приклад 1

Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $x = \sqrt{y};\ x = 0;\ y = 4$.

Розв'язання

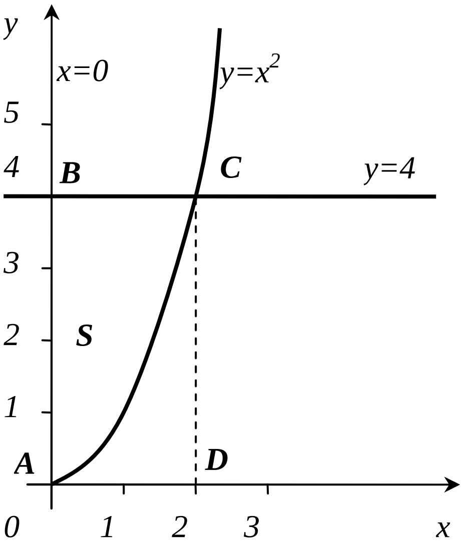

Рисунок 5.2

Подамо функцію $x = \sqrt{y}$ як $y = x^2$.

Це можна зробити, оскільки $x = \sqrt{y}$ неперервна для x∈[0, 2]. З рис. 5.2 бачимо, що шукана площа $\boldsymbol{S=S_{ABCD} - S_{ACD}}$, де $\boldsymbol{S_{ACD}}$ – площа криволінійної трапеції, що розміщена під графіком функції $\boldsymbol{y = x^2}$. Отже, для обчислення площі можна застосувати визначений інтеграл.

Точкою перетину прямої $\boldsymbol{y=4}$ та лінії $\boldsymbol{y=x^2}$ є точка $\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{x=2}$, $\boldsymbol{y=4}$. Отже, інтервал інтегрування буде $[\boldsymbol{0,2}]$.

$$S_{ABCD}=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 4dx=4x\Big|_0^2=8-0=8(\text{кв.од.});$$

$$S_{ACD}=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}(\text{кв.од.})$$

Шукана площа знаходиться так:

$$\boxed{S=S_{ABCD}-S_{ACD}=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\approx 5.33(\text{кв.од.})}.$$

Цю задачу можна було розв'язати й іншим способом.

Оскільки нам була задана функція $x=\sqrt{y}$ й інтервал зміни $\boldsymbol{y}\in[\boldsymbol{0,4}]$, то можна розглядати криволінійну трапецію, яка створюється графіком функції, віссю $\boldsymbol{OY}$ та прямими $\boldsymbol{y=0,\ y=4}$.

Тоді площу $\boldsymbol{S}$ можна обчислити так:

$$\int_0^4\sqrt{y}dy=\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}y\sqrt{y}\Big|_0^4=\frac{2\cdot4\cdot2}{3}-0=\frac{16}{3}(\text{кв.од.}).$$

Зауважимо, що в цьому випадку для додавання інтегральної суми Рімана на проміжки розбивається інтервал $[\boldsymbol{0,4}]$ на осі $\boldsymbol{OY}$: $0=y_0<y_1<...<y_n=4$.

Отже, в разі неперервної функції $\boldsymbol{y=f(x)}$, коли існує обернена функція $\boldsymbol{x=\varphi(y)}$ на замкненому інтервалі $[\boldsymbol{c,d}]$, можна розглядати визначений інтеграл:

$$\int_c^d\varphi(y)dy=\lim_{\max(\Delta y_j\to0)}\sum_{j=1}^{n}\varphi(\xi_j)\Delta y_j\ .$$

Геометричним змістом цього інтеграла теж є площа фігури, але розташована фігура між графіком функції та віссю $\boldsymbol{OY}$.

2. Нехай на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ задана неперервна, але від'ємна функція $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Щоб обчислити площу криволінійної трапеції, яка утворена функцією $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, віссю $\boldsymbol{OX}$ та прямими $\mathrm{x}=\mathrm{a}$, $\mathrm{x}=\mathrm{b}$, розглянемо модуль функції $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, або функцію $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Тоді площа фігури обчислиться за формулою

$$S=\int_a^b(-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

Таким чином, у від'ємної функції $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ фігура буде розташована ***над*** кривою і площа цієї фігури ***відрізнятиметься знаком*** від визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Приклад 1

Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$y=-x^2;\ \ y=x-2;\ \ y=0,\ x=0.$$

Розв'язання

З рис. 5.3 бачимо, що фігура $\boldsymbol{OAB}$ складається з двох фігур, утворених різними лініями: від точки $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ до точки $\boldsymbol{C}$ це фігура, що розташована ***над*** кривою $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}^2$, а від $\boldsymbol{C}$ до $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{2}$ – над прямою $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2}$. Тому розіб'ємо шукану площу на дві: $\mathrm{S}_{\mathrm{OAB}}=\mathrm{S}_{\mathrm{OAC}}+\mathrm{S}_{\mathrm{CAB}}$. Точку $\boldsymbol{C}$ знайдемо з умови рівності в ній ординат обох функцій:

$$x-2=-x^2;\ \ \ x^2+x-2=0;$$

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};$$

$$x_1=-2;\ \ x_2=1.$$

Точка $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{-2}$ не підходить, оскільки потрібна фігура, обмежена прямою $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. Отже, інтервал інтегрування $[\boldsymbol{0,2}]$ розіб'ємо на два $[\boldsymbol{0,1}]$ та $[\boldsymbol{1,2}]$. Оскільки функції від'ємні, то визначені інтеграли на даних інтервалах беремо зі знаком „-" (або підінтегральні функції беремо за модулем).

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB} = -\int_0^1 \left(-x^2\right)dx - \int_1^2 (x-2)dx =$$

$$= -\left(\left.\left(-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 + \left.\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\right|_1^2\right) = -\left(-\frac{1}{3} + 2 - 4 - \frac{1}{2} + 2\right) =$$

$$-\left(-\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) = \frac{5}{6}\left(кв.од.\right).$$

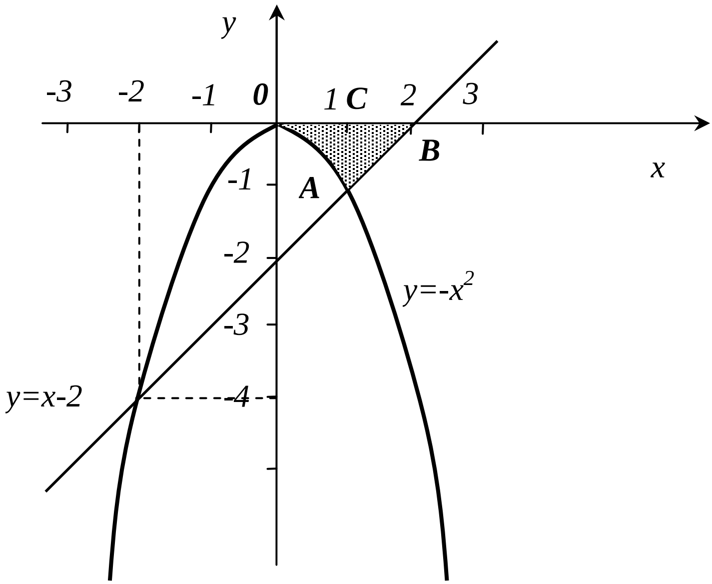

Рисунок 5.3

Якщо ж необхідно обчислити площу фігури, утвореної функцією, яка ***декілька разів змінює знак*** на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, то необхідно інтервал $[\boldsymbol{a,b}]$ розбити на проміжки, на яких функція є або невід'ємною, або недодатною. Обчислити значення точок, у яких функція змінює знак і площу, обчислювати як суму окремих фігур, розташованих кожна на своєму проміжку.

Наприклад, нам необхідно обчислити площу фігури, розташованої між графіком функції $\boldsymbol{y = f(x)}$, віссю $\boldsymbol{OX}$ та прямими $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{x = b}$. Відомі точки всередині інтервалу, в яких функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ змінює знак: від $\boldsymbol{x = a}$ до $\boldsymbol{x = c}$ $\boldsymbol{f(x) > 0}$; від $\boldsymbol{x = c}$ до $\boldsymbol{x = d}$ $\boldsymbol{f(x) < 0}$ і від $\boldsymbol{x = d}$ до $\boldsymbol{x = b}$ $\boldsymbol{f(x) > 0}$. Отже, для обчислення площі необхідно розбити інтервал $[\boldsymbol{a,b}]$ на 3 проміжки і обчислити 3 визначені інтеграли, враховуючи, що на проміжку $[\boldsymbol{c,d}]$ функція від'ємна й інтеграл потрібно брати з протилежним знаком:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

Приклад 2

Дана функція $y = \cos x, \qquad x \in [0, \pi]$.

1. Обчислити визначений інтеграл функції.

2. Обчислити площу фігури, розташованої між даною кривою, віссю $\boldsymbol{OX}$ та прямими $x = 0$, $x = \pi$.

Розв'язання

1. $\int_0^\pi \cos x dx = \sin x\Big|_0^\pi = 0 - 0 = 0$.

2. Функція $y = \cos x$ на інтервалі $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ змінюється від 1 до 0, отже, невід'ємна, а на інтервалі $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$ змінюється від 0 до -1, отже, недодатна. Для обчислення площі фігури розіб'ємо її на дві – $\boldsymbol{S_1}$ на інтервалі $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ та $\boldsymbol{S_2}$ на інтервалі $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$:

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - 0 - 0 + 1 = 2 .$$

3. Якщо на замкненому інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ задані дві неперервні функції і необхідно обчислити площу фігури, яка обмежена цими функціями, то для розв'язання такої задачі застосовують теорему.

Теорема

Нехай на замкненому інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ задані дві неперервні функції $\boldsymbol{y_1 = f_1(x)}$ ***і*** $\boldsymbol{y_2 = f_2(x)}$. Нехай ці функції такі, що $\boldsymbol{f_2(x) \geq f_1(x)}$. Тоді площа фігури, розташованої між цими кривими на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx . \qquad (10)$$

Доведення (ілюстративне)

Приклад 3

Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2;\ \ y = x$.

Розв'язання

Побудуємо графіки (рис 5.4). Знайдемо точки перетину фігур:

$$x^2 - 2 = x; \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},\ \ x_1 = -1,\ \ x_2 = 2 .$$

Необхідно обчислити площу фігури $OABC$. $\mathrm{S_{OABC}} = \mathrm{S_{OABD}} + \mathrm{S_{ODC}}$.

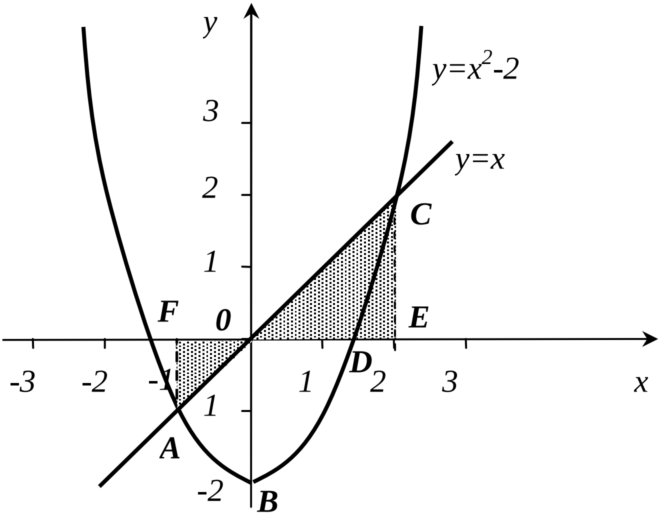

Рисунок 5.4

Згідно з теоремою площа S_{OABC} знайдеться як визначений інтеграл різниці двох функцій: $\boldsymbol{y = x}$ та $\boldsymbol{y = x^2 - 2}$, $\boldsymbol{x \in [-1,2]}$. Згідно з геометричним змістом визначеного інтеграла

$$\int_{-1}^{2} xdx = S_{OCE} - S_{FOA} = S_{OCD} + S_{DCE} - S_{FOA};$$

$$\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 2\right)dx = S_{FABD} + S_{DCE} = -S_{FOA} - S_{OABD} + S_{DCE};$$

$$\int_{-1}^{2} xdx - \int_{-1}^{2} \left(x^2 - 2\right)dx = S_{OCD} + S_{DCE} - S_{FOA} - \left(-S_{FOA} - S_{OABD} + S_{DCE}\right) =$$

$= S_{OCD} + S_{OABD} = S_{OABC}$ - ***отримали площу потрібної фігури.*** Отже, площа фігури, розташованої між двома лініями, дійсно дорівнює

$$S = \int_{a}^{b} \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

5.3.5.2. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ

Нехай крива на площині задана рівнянням $y = f(x)$. Необхідно знайти довжину дуги кривої лінії в межах від $x = a$ та $x = b$. Розіб'ємо інтервал $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Їм відповідають значення функції $A = f(a)$, $M_1 = f(x_1)$,..., $M_{n-1} = f(x_{n-1})$, $B = f(x_n)$. Проведемо хорди $AM_1, M_1M_2, ...,$ $M_{n-1}B$. Довжину хорди на відрізку $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ візьмемо як Δl_i. Тоді довжина отриманої ламаної лінії буде $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$. Якщо $\Delta x_i \to 0$, то $\Delta l_i \to 0$. Отже, дану суму можна взяти за інтегральну суму Рімана.

Означення

Довжиною l дуги AB називають ***границю, до якої прямує*** $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$, коли довжина її найбільшої частини прямує до 0. Або

$$l = \lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

Теорема

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні, то довжина дуги кривої $y = f(x)$, обмеженої прямими $x = a$ та $y = b$, обчислюється за формулою

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx . \tag{11}$$

Доведення

Нехай функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ визначені та неперервні на інтервалі $[a,b]$. Побудуємо ламану лінію так, як для визначення довжини дуги. За теоремою Піфагора довжина хорди на кожному $\boldsymbol{i}$-му інтервалі $\boldsymbol{M_{i-1}M_i}$ дорівнюватиме

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^{\ 2} + \Delta y_i^{\ 2}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^{\ 2}}{\Delta x_i^{\ 2}}}\Delta x_i \,.$$

Згідно з теоремою Лагранжа про диференціювання неперервних функцій на інтервалі $[\boldsymbol{x_{i-1}}, \boldsymbol{x_i}]$ існує така точка $\boldsymbol{\xi_i}$, що

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi), \qquad x_{i-1} < \xi_i < x_i \,,$$

тому

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i \,.$$

Тоді довжина вписаної ламаної буде

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x \,. \qquad (*)$$

Оскільки за умовою $\boldsymbol{f'(x)}$ неперервна, то і (*) неперервна функція, отже, існує скінченна границя

$$l = \lim_{\max(\Delta x_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \,.$$

Наслідок

Якщо дуга задана параметрично $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$, $\boldsymbol{y = \psi(t)}$, $\boldsymbol{t \in [\alpha, \beta]}$, то її довжина становить

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \,. \qquad (12)$$

Приклад 1

Обчислити довжину дуги лінії $y = \ln(\sin x)$, $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання

Використаємо формулу (11). Знайдемо похідну від $y=\ln(\sin x)$: $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. Підставимо до формули

$$l=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} t=tg\dfrac{x}{2};\ x=2arctgt; \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2};\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \alpha=tg\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \beta=tg\dfrac{\pi}{4}=1 \end{array}\right\}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{\left(1+t^2\right)2dt}{2t\left(1+t^2\right)}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dt}{t}=$$

$$=ln|t|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=\ln|1|-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=0-\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right)=\frac{\ln 3}{2}\approx 1{,}098.$$

Приклад 2

Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x=\sqrt{3}t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Розв'язання

Використаємо формулу (12). Знайдемо похідні від $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ за $\boldsymbol{t}$: $x'=2\sqrt{3}\cdot t;\ \ y'=1-3t^2$. Підставимо до формули (11):

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(2\sqrt{3}t\right)^2+\left(1-3t^2\right)^2}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{12t^2+1-6t^2+9t^4}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{9t^4+6t^2+1}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(3t^2+1\right)^2}dt=\int_0^{2\pi}\left(3t^2+1\right)dt=\left(t^3+t\right)\Big|_0^{2\pi}=8\pi^3+2\pi.$$

5.3.5.3. Обчислення об'єму тіла обертання

Задача

Знайти об'єм фігури, яка створена обертанням навколо осі $\boldsymbol{OX}$ криволінійної трапеції, обмеженої неперервною знакосталою функцією $\boldsymbol{y = f(x)}$ та прямими $x = a$, $x = b$.

Для обчислення об'єму зазначеної фігури використаємо таке саме розбиття інтервалу $[\boldsymbol{a, b}]$, як і для обчислення площі (рис. 5.5)

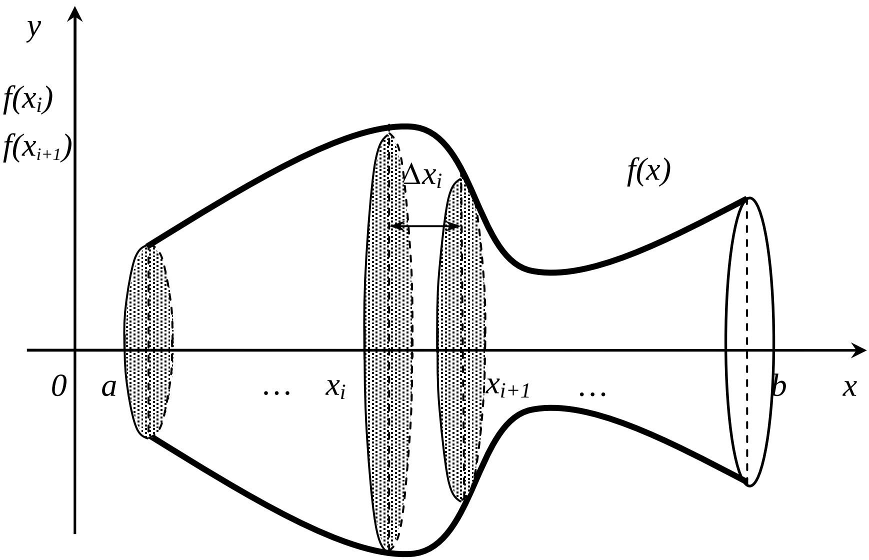

Рисунок 5.5

Знову отримаємо $\boldsymbol{n}$ криволінійних трапецій, у яких висота дорівнює $\boldsymbol{\Delta x_i}$. Виберемо всередині відрізка $[\boldsymbol{x_{i-1}, x_i}]$ довільну точку $\boldsymbol{\xi_i}$ і замінимо криволінійну трапецію на прямокутник з довжиною $\boldsymbol{\Delta x_i}$ і висотою $\boldsymbol{f(\xi_i)}$. Будемо обертати фігуру навколо осі $\boldsymbol{OX}$. Отримаємо $\boldsymbol{n}$ циліндрів із висотою $\boldsymbol{\Delta x_i}$ та радіусом $\boldsymbol{f(\xi_i)}$. Об'єм $\boldsymbol{i}$-го циліндра дорівнюватиме $\Delta V_{OX\,i} = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Загальний об'єм фігури обертання приблизно можна подати як

$V_{OX\,n} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Отримали інтегральну суму Рімана. Оскільки $\boldsymbol{y = f(x)}$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, то й отримана сума теж неперервна, і для неї існує скінченна границя

$$V_{OX} = \lim_{\max(\Delta x_i \to 0)} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{13}$$

Формула (13) і є формулою для обчислення об'єму фігури обертання навколо осі $\boldsymbol{OX}$ знакосталої неперервної функції для деякого кінцевого інтервалу $[\boldsymbol{a,b}]$.

Якщо потрібно обчислити об'єм фігури обертання навколо осі $\boldsymbol{OY}$, то розглядаємо функцію $\boldsymbol{x = g(y)}$ для $\boldsymbol{y \in [c,d]}$. Така функція існує, оскільки $\boldsymbol{y = f(x)}$ – неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, причому $\boldsymbol{a = g(c)}$, $\boldsymbol{b = g(d)}$. Використовуючи міркування, аналогічні попереднім, отримаємо, що об'єм фігури обертання навколо осі $\boldsymbol{OY}$ знаходиться за формулою

$$V_{OY} = \pi \int_c^d g^2(y)dy. \tag{14}$$

Приклад 1

Обчислити об'єм тіла, отриманого від обертання фігури, обмеженої лініями $\boldsymbol{y = e - x}$, $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$ навколо осі $\boldsymbol{OX}$.

Розв'язання

Використаємо формулу (13):

$$V_{OX} = \pi \int_0^1 \left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-2x}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{\pi}{2} e^{-2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)(куб.од.).$$

Приклад 2

Обчислити об'єм тіла, отриманого від обертання фігури, обмеженої лініями $\boldsymbol{y = x^2}$, $\boldsymbol{y = x^3}$ навколо осі $\boldsymbol{OY}$.

Розв'язання

Оскільки обертання відбувається навколо осі *OY*, то запишемо функції, обернені до вихідних: $x = \sqrt{y}$; $x = \sqrt[3]{y}$. Знайдемо межі інтегрування: $\sqrt{y} = \sqrt[3]{y}$; $\left(\sqrt{y}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{y}\right)^6$; $y^3 = y^2$; $y^2(y-1) = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = 1$. Отже, інтервал інтегрування буде $[\boldsymbol{0,1}]$. Згідно з графіком фігуру обертання ми отримаємо як різницю двох фігур: перша обмежена кривою $x = \sqrt[3]{y}$ та прямими $\boldsymbol{y = 0;\ y = 1}$, друга – кривою $x = \sqrt{y}$ та прямими $\boldsymbol{y = 0;\ y = 1}$. Використаємо формулу (14):

$$V_{OY} = \pi\int_0^1 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy - \pi\int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \left.\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_0^1 - \pi \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{3\pi}{5} - 0 - \frac{\pi}{2} + 0 = \pi\left(\frac{6}{10} - \frac{5}{10}\right) = 0.1\pi(\textit{куб.од.}).$$

5.3.6. Невласні інтеграли

Згідно з теоремою існування визначеного інтеграла основними умовами його існування є:

1) визначеність і неперервність функції $\boldsymbol{y = f(x)}$;

2) замкненість інтервалу інтегрування $[\boldsymbol{a,b}]$.

На практиці виникає необхідність узагальнення теорії визначених інтегралів на випадок, коли хоча б одна з названих умов порушується. В цьому разі мова йтиме про ***невласні інтеграли***.

За типом порушення умов невласні інтеграли розділяються на два типи:

1) невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування;

2) невласні інтеграли від функції, розривної в межах інтегрування.

Розглянемо кожний з типів невласних інтегралів окремо.

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

Нехай функція $\boldsymbol{f(x)}$ визначена і неперервна на довільному відрізку $[\boldsymbol{a,t}]$, $\boldsymbol{t>a}$. Для неї існує функція $\Phi(t)=\int\limits_a^t f(x)dx$.

Означення

Невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею інтегрування на півінтервалі $[\boldsymbol{a,\infty})$ називається границя функції $\boldsymbol{\Phi(t)}$ за умови, що $\boldsymbol{t\to+\infty}$, або

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx. \tag{15}$$

Якщо границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називається ***збіжним***. Якщо ж границя ***не існує*** або дорівнює ***нескінченності***, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***.

Аналогічно визначається ***невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею інтегрування*** на півінтервалі $(\boldsymbol{-\infty,b}]$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^b f(x)dx. \tag{16}$$

Введемо поняття ***невласного інтеграла на інтервалі*** $(\boldsymbol{-\infty,\infty})$.

Нехай для будь - якого числа $\boldsymbol{a}$ невласні інтеграли $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ збігаються, тобто їх границі є числа. Тоді розглянемо

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ - ***невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування.***

Цей інтеграл теж буде мати скінченну границю, тобто число. Такий ***невласний інтеграл*** називається ***збіжним***. Коли ж хоча б один із складових інтегралів є розбіжним (тобто його границя не існує або нескінченна), то і підсумковий інтеграл теж ***розбіжний.***

Останню формулу зазвичай записують так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (17)$$

Приклад 1

Знайти невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Розв'язання

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) \Bigg|_{1}^{b} = -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} + 1 = 1,$$

отже, інтеграл ***збіжний***.

Приклад 2

Знайти невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x} dx.$$

Розв'язання

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b e^x dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(e^x\right)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} e^b - \lim_{a\to-\infty} e^a = \infty - 0 = \infty,$$

отже, інтеграл ***розбіжний.***

Зауваження

У курсі теорії ймовірності дуже важливу роль виграє невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Цей інтеграл не можна виразити в елементарних функціях, але доведено, що він збіжний і дорівнює $\boldsymbol{2\pi}$. Крива $y = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ отримала назву ***кривої гауссівського розподілу***, або просто ***кривої Гаусса.*** Площа нескінченної фігури, яка розташована між віссю ***OX*** та цією кривою скінченна і дорівнює ***1***.

2. Невласні інтеграли від функції, необмеженої в скінченній кількості точок на інтервалі інтегрування.

Нехай функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ визначена, але необмежена на інтервалі $[\boldsymbol{a,b})$.

Означення

Невласним інтегралом від функції, необмеженої на інтервалі $[\boldsymbol{a,b})$, називається скінченна границя визначеного інтеграла на інтервалі $[\boldsymbol{a,b-\varepsilon}]$, $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо ***границя скінченна***, то інтеграл ***збіжний***. Якщо границя ***не існує*** або дорівнює ***нескінченності***, то інтеграл – ***розбіжний***.

Геометрично такий інтеграл означає, що ми шукаємо площу фігури, яка розташована між графіком функції і віссю ***OX***, відступивши від правої межі на нескінченно малий інтервал $\varepsilon > 0$. Якщо така „звужена” площа скінченна, то інтеграл – збіжний.

Аналогічно вводиться поняття невласного інтеграла від функції, необмеженої на інтервалі $(\boldsymbol{a,b}]$. Тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Геометрично такий інтеграл означає, що ми шукаємо площу фігури, яка розташована між графіком функції і віссю ***OX***, відступивши від лівої межі на нескінченно малий інтервал $\varepsilon > 0$. Якщо така „звужена” площа скінченна, то інтеграл – збіжний.

Якщо ж функція розривна всередині інтервалу в точці $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a,b}]$, то інтервал ділять на два незамкнених інтервали $[\boldsymbol{a,b}] = [\boldsymbol{a,c}) \cup (\boldsymbol{c,b}]$ і невласний інтеграл подають як ***суму двох невласних інтегралів від функції, необмеженої на кінцях інтервалу інтегрування:***

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)dx, \ (\delta>, \varepsilon>0, \delta\neq\varepsilon).$$

Приклад 1

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Розв’язання

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^1 = 2 - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{0+\varepsilon}\right) = 2 - 0 = 2,$$

отже, інтеграл ***збіжний.***

Приклад 2

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}.$$

Розв'язання

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^{1}\frac{dx}{x}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x|\right)\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}+\lim_{\delta\to 0}\left(\ln|x|\right)\Big|_{0+\delta}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|0-\varepsilon|\right)-\ln|-1|+$$

$$+\ln|1|-\lim_{\delta\to 0}\left(\ln|0+\delta|\right)=-\infty-0+0+\infty=\infty,$$

інтеграл розбіжний.

Приклад 3

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_{0}^{1}\frac{4xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання

$$\int_{0}^{1}\frac{4xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{4xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}\right)-(-2\cdot 1)=0+2=2,$$

інтеграл ***збіжний.***

5.3.7. ВИКОРИСТАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ В ЕКОНОМІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

1. Задачі знаходження обсягу продукції

У п.5.3.2 ми визначили, що обсяг виготовленої продукції за час $\boldsymbol{\Delta t}$ є визначеним інтегралом від функції продуктивності. Розглянемо декілька прикладів економічних задач, в яких необхідно обчислити обсяг деякого економічного показника, який моделюється площею криволінійної трапеції.

Приклад 1

Визначити обсяг продукції, виготовленої робітником за третю годину робочого дня, якщо продуктивність праці характеризується функцією

$$f(t)=\frac{3}{(3t+1)}+4.$$

Розв'язання

Якщо неперервна функція $\boldsymbol{f(t)}$ характеризує продуктивність праці робітника залежно від часу $\boldsymbol{t}$, то об'єм продукції, виробленої робітником за проміжок часу від t_1 до t_2 буде виражатися формулою

$$V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

У задачі необхідно обчислити обсяг продукції, виготовленої за третю годину робочого дня, тобто за час від $\boldsymbol{t_1=2}$ до $\boldsymbol{t_2=3}$. Тобто у нашому випадку

$$\int_2^3\left(\frac{3}{3t+1}+4\right)dt=\left(\ln(3t+1)+4t\right)\Big|_2^3=$$

$$=\ln(3\cdot3+1)+4\cdot3-\ln(3\cdot2+1)-4\cdot2=\ln10+12-\ln7-8=\ln\frac{10}{7}+4.$$

Приклад 2

Визначити запас товарів у магазині, накопичений упродовж трьох днів, якщо надходження товарів характеризується функцією $f(t)=2t+5$.

Розв'язання

Запас товару знову - таки можна змоделювати як площа криволінійної трапеції, що розташована між кривою функції поставок, віссю ОХ та прямими $t_1 = 0$; $t_2 = 3$. Тут змінна t характеризує кількість днів. Маємо

$$\int_0^3 (2t+5)dt = \left(\frac{2t^2}{2} + 5t\right)\Bigg|_0^3 = 9 + 15 = 24(од.).$$

2. Задача максимізації прибутку за часом

Нехай функції $V(x), D(x), P(x)$ є неперервними функціями витрат, доходу та прибутку підприємства відповідно. Тоді прибуток можна отримати як функцію $P(t) = D(t) - V(t)$, тобто дохід мінус витрати на виробництво продукції. Згідно з необхідною умовою існування екстремуму функції однієї змінної функція $P(t)$ матиме максимальне значення в точці t, де $P'(t) = D'(t) - V'(t) = 0$. Тобто в процесі виробництва існує такий час t_1, коли швидкість зміни доходу від виробництва продукції дорівнює швидкості зміни витрат на це виробництво (однакові маргінальні значення доходу та витрат). У цій точці часової осі прибуток набуває максимального значення. Знайти загальний прибуток за цей час можна за формулою

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} P'(t)dt = \int_0^{t_1} (D'(t) - V'(t))dt.$$

Приклад 3

Маргінальні витрати та дохід задані функціями $V'(t) = 2\sqrt[3]{t^2} + 5;\quad D'(t) = 17 - \sqrt[3]{t^2}$. $D(t), V(t)$ – млн грн. Визначити, як довго підприємство було прибутковим і який загальний прибуток воно отримало за цей час.

Розв'язання

Підприємство було прибутковим до того часу, поки не досягнуло максимуму прибутку, тобто доти, поки швидкість зміни доходу не зрівнялася зі швидкістю зміни витрат, тобто доти, поки не стало $P'(t)=V'(t)$, або

$$2\sqrt[3]{t^2}+5=17-\sqrt[3]{t^2};$$

$$3\sqrt[3]{t^2}=12;$$

$$\sqrt[3]{t^2}=4 \quad t^2=64;$$

$$t=\sqrt{64}=8\ (\textit{років}).$$

За цей час максимальний прибуток досягнув значення

$$P(8)=\int_0^8\left(D'(t)-V'(t)\right)dt=\int_0^8\left(17-\sqrt[3]{t^2}-2\sqrt[3]{t^2}-5\right)dt=$$

$$=\int_0^8\left(12-3\sqrt[3]{t^2}\right)dt=12t\Big|_0^8-\left.\frac{3\cdot 3\cdot t^{\frac{5}{3}}}{5}\right|_0^8=96-\frac{9\cdot 32}{5}=$$

$$=\frac{480-288}{5}=\frac{192}{5}=38,4\ \textit{млн грн}.$$

Отже, дане підприємство 8 років було прибутковим і отримало за цей час максимальний прибуток у 38,4 млн грн.

3. Дисконтування вкладеного капіталу.

Нехай підприємство або особа поклали в банк капітал ***K*** під проценти. Частка капіталу, яка щорічно буде додаватися банком до вкладеного капіталу, обумовлюється наперед і становить ***p%***. Величина ***p*** називається щорічною ***обліковою ставкою***. Процес нарощування капіталу за один рік відбувається за формулою

$$K_1=K+K\cdot\frac{p}{100\%}=K\left(1+\frac{p}{100\%}\right)$$

Якщо для розрахунків застосовуються складні проценти, то за ***t*** років сума становитиме $K_t=K\left(1+\frac{p}{100\%}\right)^t$. Якщо кількість періодів нарощування суми за рік збільшити до ***2*** на рік, то кінцева сума капіталу буде становити $K_t = K\left(1 + \frac{p}{2 \cdot 100\%}\right)^{2t}$, до ***n*** на рік: $K_t = K\left(1 + \frac{p}{n \cdot 100\%}\right)^{nt}$.

Процес обчислення початкової суми $\boldsymbol{K}$ за її кінцевою величиною $\boldsymbol{K_t}$, отриманою за період часу $\boldsymbol{t}$, та при щорічній обліковій ставці $\boldsymbol{p}$ у фінансовому аналізі називається ***процесом дисконтування.*** Величина ***i=p/100%*** називається ***коефіцієнтом дисконтування.*** Суму $\boldsymbol{K}$ називають ***дисконтною,*** або ***сучасною сумою.***

Отже, задача дисконтування капіталу за період часу $\boldsymbol{t}$ при скінченній кількості періодів нарощування суми розв'язується за формулою

$$K = \frac{K_t}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}} = K_t \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{-nt}.$$

Якщо ж вважати нарощування капіталу неперервним (наприклад, нарощування капіталу від виробництва), то через $\boldsymbol{t}$ років капітал $\boldsymbol{K}$ накопичиться до суми

$$K_t = K \cdot \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{t \cdot n} = K \cdot \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i} \cdot i \cdot t} = K \cdot e^{it}.$$

Якщо ж відома кінцева сума $\boldsymbol{K_t}$**,** то сучасна сума $K = K_t \cdot e^{-it}$.

Якщо ж щорічний дохід не є постійним, а змінюється за неперервним законом $\boldsymbol{K_t = f(t)}$, то дисконтний дохід $\boldsymbol{K}$ за період $\boldsymbol{t \in [0, T]}$ обчислюється за формулою

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt .$$

Розглянемо конкретний приклад.

Приклад 4
Вибір стратегії розвитку підприємства

Компанія повинна обрати одну з двох можливих стратегій розвитку

1) вкласти 10 млн. грн. у нове обладнання й одержувати по 3 млн грн прибутку кожного року протягом 10 років;

2) закупити за 15 млн грн більш сучасне обладнання, яке дозволить отримувати щорічний прибуток у 5 млн грн протягом 7 років.

Яку стратегію потрібно обрати підприємству, якщо номінальна щорічна облікова ставка дорівнює ***p=10%.***

Розв'язання

Нехай дохід підприємства за період $\boldsymbol{t}$ від вкладання капіталу в нове обладнання задається неперервною функцією $\boldsymbol{f(t)}$. Вважаємо, що оскільки процес виробництва неперервний, то і нарощування прибутку на дохід згідно зі ставкою $\boldsymbol{p}$ іде неперервно. Коефіцієнт дисконтування $\boldsymbol{i = 0{,}1}$.

Тоді, згідно з першою стратегією, функція доходу дорівнює $\boldsymbol{f(t) = 3}$, період часу, за який потрібно провести дисконтування суми, – $[\boldsymbol{0{,}10}]$. Отже, дійсне значення загального прибутку за ***10*** років з урахуванням вкладених ***10 млн грн*** буде

$$P_1 = \int_0^{10} 3e^{-0.1t} dt - 10 = \frac{3}{-0.1} e^{-0.1t} \Big|_0^{10} - 10 = -30 \cdot e^{-1} + 30 \cdot 1 - 10 =$$

$$= 30\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 10 \approx 8.96 \text{ (млн грн).}$$

Згідно з другою стратегією функція доходу дорівнює $\boldsymbol{f(t) = 5}$, період часу, за який потрібно провести дисконтування суми, – $[0,7]$. Отже, дійсне значення загального прибутку за ***7*** років з урахуванням вкладених ***15 млн грн*** буде

$$P_2 = \int_0^7 5e^{-0.1t}dt - 15 = \frac{5}{-0.1}e^{-0.1t}\Big|_0^7 - 15 = -50 \cdot e^{-0.7} + 50 \cdot 1 - 15 =$$

$$= 50\left(1 - \frac{1}{e^{0.7}}\right) - 15 \approx 10.17 \text{ (млн грн).}$$

Висновок

Бажано вибрати ***другу*** стратегію, оскільки вона приносить підприємству більш високий прибуток. $\boldsymbol{P = 10{,}17}$ ***млн грн за 7 років*** порівняно з 8,96 млн грн за 10 років.

4. Задача оцінювання виграшу споживача та постачальника на ринку товарів

За підсумками маркетингового дослідження на ринку є товар, який має неперервну функцію попиту $\boldsymbol{p = f(x)}$ (крива $\boldsymbol{D}$, рис. 5.6). $\boldsymbol{x}$ ***– кількість товару***, $\boldsymbol{p}$ ***– ціна одиниці товару***. Згідно з цими ж дослідженнями постачання товару на ринок відбувається за неперервним законом $\boldsymbol{p = g(x)}$ (крива $\boldsymbol{S}$, рис. 5.4). Значення функцій попиту і постачання вимірюються в грошових одиницях. Точка перетину цих двох кривих $(\boldsymbol{x_0, y_0})$ означає точку ***ринкової рівноваги*** – споживач може купити товар за тією самою ціною, за якою постачальник хоче його продати.

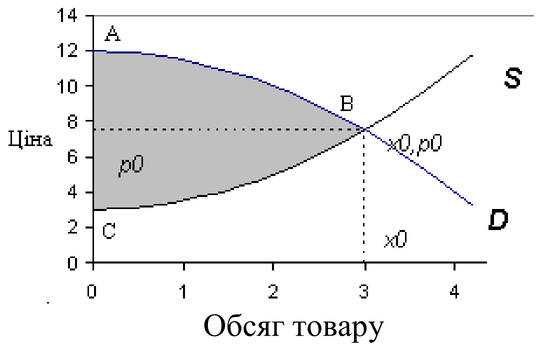

Рисунок 5.6

Постановка задачі

Знайти виграш споживача ***C*** та виграш постачальника ***P*** від встановлення ринкової рівноваги.

Звернемося до рис. 5.4. Кількість грошей, яку споживач витратив на придбання товару до встановлення ринкової рівноваги дорівнює площі криволінійної трапеції $\boldsymbol{OABx_0}$. Величина $\boldsymbol{x_0 p_0}$ є грошовою масою, витраченою споживачем на купівлю або отриманою постачальником за продаж товару за умов ринкової рівноваги. Графічно ця грошова маса подана площею прямокутника $\boldsymbol{Op_0Bx_0}$. Очевидно, що за умов рівноваги ринку споживач виграє кількість грошей, що дорівнює різниці між площею $\boldsymbol{OABx_0}$ та прямокутником $\boldsymbol{Op_0Bx_0}$. Або, використовуючи визначений інтеграл,

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 .$$

Кількість грошей, яку може отримати постачальник до встановлення ринкової рівноваги, є площею криволінійної трапеції $\boldsymbol{OCBx_0}$. Якщо ринок урівноважений, то постачальник отримує грошей $\boldsymbol{x_0 p_0}$, що збігається з площею прямокутника $\boldsymbol{Op_0Bx_0}$. Отже, виграш постачальника становитиме різницю між площею прямокутника $\boldsymbol{Op_0Bx_0}$ та трапеції $\boldsymbol{OCBx_0}$, або

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx .$$

Приклад 5

Відомі закони попиту та пропозиції

$$p = 116 - x^2; \quad p = \frac{5}{3}x + 20 .$$

Значення функції вимірюються в грошових одиницях.

Знайти виграші споживачів та постачальників за умови встановлення ринкової рівноваги.

Розв'язання

1. Знайдемо точку ринкової рівноваги:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20;\;\; 3x^2 + 5x - 288;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 3456}}{6} = \frac{-5 \pm 59}{6};$$

$$x_1 = \frac{-5 - 59}{6} = -\frac{32}{3};\;\; x_2 = \frac{-5 + 59}{6} = 9.$$

Оскільки кількість товару не може бути від'ємною величиною, маємо точку ринкової рівноваги $\boldsymbol{x_0 = 9}$; $\boldsymbol{p_0 = 116 - 81 = 35}$.

2. Знайдемо грошову масу, яка переміщується від споживача до постачальника за умови ринкової рівноваги:

$$\boldsymbol{x_0 p_0 = 9 \cdot 35 = 315}.$$

3. Знайдемо шукані виграші

для споживача:

$$C = \int_0^9 \left(116 - x^2\right) dx - 315 = 116x\Big|_0^9 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^9 - 315 =$$

$$= 1044 - 243 - 315 = 486;$$

для постачальника

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20\right) dx = 315 - \frac{5}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^9 - 20x\Big|_0^9 =$$

$$= 315 - \frac{405}{6} - 180 = 67.5.$$

Висновок

За умови своєчасного аналізу ринку і встановлення ціни на товар, яка відповідає ринковій рівновазі, і постачальник, і споживач отримають економію грошей. Постачальник – на 67,5 (грош. од), споживач – на 486 (грош. од.).

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ. ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Під час вивчення інтегралів перед нами стояла задача: знайти $\boldsymbol{y}$, якщо $\boldsymbol{y' = f(x)}$, або

$$\boldsymbol{dy = f(x)dx}\,. \tag{1.1}$$

Розв'язання, як відомо, зводиться до обчислення невизначеного інтеграла:

$$y = \int f(x)dx\,.$$

Однак на практиці значно частіше зустрічається більш складна **ЗАДАЧА**

- *знайти функцію* $\boldsymbol{y}$, *якщо відомо, що вона задовольняє співвідношення виду*

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{1.2}$$

де $\boldsymbol{F}$ є функцією від $\boldsymbol{n+2}$ змінних, $\boldsymbol{n \geq 1}$.

Такого роду співвідношення, що зв'язують незалежну змінну $\boldsymbol{x}$, невідому функцію $\boldsymbol{y}$ і її похідні до деякого порядку $\boldsymbol{n}$ включно, називаються ***диференціальними рівняннями***. При цьому порядок $\boldsymbol{n}$ найстаршої похідної диференціального рівняння називається ***порядком диференціального рівняння***.

Наприклад, диференціальне рівняння $\boldsymbol{dy = f(x)dx}$ (або $\boldsymbol{y' = f(x)}$) є рівнянням 1-го порядку, диференціальне рівняння $\boldsymbol{x^2(y''') - xy(y')^5 + 8 = 0}$ – диференціальне рівняння 3-го порядку.

Якщо шукана функція залежить від однієї змінної $\boldsymbol{y = f(x)}$, то диференціальні рівняння називаються ***звичайними диференціальними рівняннями.***

Якщо ж вона залежить від $\boldsymbol{m}$ змінних $\boldsymbol{y = f(x_1, x_2, ..., x_m)}$, то диференціальні рівняння називаються ***диференціальними рівняннями у частинних похідних.***

Наш курс передбачає вивчення ***тільки звичайних диференціальних рівнянь***, тому слово *звичайні* буде в подальшому опущене.

Диференціальне рівняння $\boldsymbol{n}$***-го*** порядку називається розв'язаним відносно старшої похідної в разі, коли співвідношення (1.2) можна подати у вигляді

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{1.3}$$

У диференціальному рівнянні, таким чином, ***невідомою*** є функція, ***що входить у рівняння під знаком похідних*** (або диференціалів) того або іншого порядку.

Розв'язком диференціального рівняння $\boldsymbol{n}$***-го порядку (1.3) на інтервалі*** $\boldsymbol{(a,b)}$ ***називається функція*** $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, ***визначена на цьому інтервалі разом зі своїми похідними до*** $(\boldsymbol{n})$***-го порядку включно***, яка при підстановці у рівняння ***дає тотожність***. Тобто

$$\varphi(x)^{(n)} \equiv f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\right).$$

Наприклад, функція $\boldsymbol{y = sinx}$ є розв'язком диференціального рівняння $\boldsymbol{y'' + y = 0}$, оскільки при підстановці до рівняння дає тотожність. Дійсно, маємо

$$\boldsymbol{y = sinx;\ \ y'' = -sinx;\ \ -sinx + sinx = 0;\ \ 0 \equiv 0} \text{ – тотожність.}$$

Задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння називається ***задачею інтегрування*** даного диференціального рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається ***інтегральною кривою***.

Приклад 1

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\boldsymbol{y' = 5x + 3}$.

Розв'язання

Як відомо, в цьому разі шукана функція знаходиться простим інтегруванням, оскільки $\boldsymbol{y' = dy/dx}$, отже, $\boldsymbol{dy = (5x + 3)dx}$:

$$\int dy = \int (5x + 3)dx; \qquad y = \frac{5}{2}x^2 + 3x + C .$$

Розв'язком диференціального рівняння є функція $y = \frac{5}{2}x^2 + 3x + C;\ C - const$.

Очевидно, що вона не є однозначною, тобто являє собою ***сім'ю інтегральних*** кривих, які визначаються значенням константи $\boldsymbol{C}$.

Приклад 2

Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' = x^2$.

Розв'язання

У даному разі другу похідну від шуканої функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ можна розглядати як першу похідну від першої похідної шуканої функції, тобто

$$\frac{d(y')}{dx} = x^2,\ \text{або}\ \ d(y') = x^2 dx .$$

Отже, знайдемо спочатку значення $\boldsymbol{y'(x)}$:

$$\int d(y') = \int x^2 dx; \qquad y' = \frac{x^3}{3} + C_1 .$$

Тепер, проінтегрувавши ще раз, знайдемо вже шукану функцію:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} + C_1; \qquad dy = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx;$$

$$\int dy = \int\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)dx; \quad y=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2 .$$

Розв'язком диференціального рівняння є функція

$$y=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2; \;\; C_1, C_2 - const .$$

Даний розв'язок теж є сім'єю інтегральних кривих, які визначаються значеннями сталих $\boldsymbol{C_1}$ і $\boldsymbol{C_2}$.

Взагалі, якщо ми будемо шукати розв'язок диференціального рівняння $\boldsymbol{n}$-го порядку, то отримаємо сім'єю кривих, кожна з яких визначається значенням $\boldsymbol{n}$ сталих $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$,..., $\boldsymbol{C_n}$.

Щоб конкретизувати значення сталих у кожному з розв'язків, необхідно задати якусь точку площини інтегральних кривих. Тим самим із множини інтегральних кривих оберемо одну таку, яка проходить через задану точку. Причому:

• якщо диференціальне рівняння має ***порядок 1***, то точка задається значенням $\boldsymbol{x_0}$ та $\boldsymbol{y_0}$. Для прикладу **1** візьмемо $\boldsymbol{x_0=0}$, $\boldsymbol{y_0=1}$. Підставимо точку до розв'язку $y=\frac{5}{2}x^2+3x+C$; $C-const$, отримаємо $\boldsymbol{1=0+C}$, отже, для точки $\boldsymbol{y(0)=1}$ маємо $\boldsymbol{C=1}$. У цьому разі отримаємо конкретну інтегральну криву $y=\frac{5}{2}x^2+3x+1$;

• якщо диференціальне рівняння має ***порядок 2***, то точка задається значенням $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{y_0}$ та $\boldsymbol{y_0'}$. Для прикладу **2** візьмемо $\boldsymbol{x_0=0}$, $\boldsymbol{y_0=10}$, $\boldsymbol{y_0'=5}$. Підставимо точку до розв'язку $y=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$; $C_1, C_2 - const$ та до сім'ї кривих, що описують похідну шуканої функції $y'=\frac{x^3}{3}+C_1$, отримаємо $\boldsymbol{5=0+C_1}$;

$\boldsymbol{10 = 0 + 0 + 10}$; отже, $\boldsymbol{C_1 = 5}$; $\boldsymbol{C_2 = 10}$, а із сім'ї інтегральних кривих вибереться одна як розв'язок $y = \frac{x^4}{12} + 5x + 10$;

• якщо диференціальне рівняння має ***порядок n***, то точка задається значенням $\boldsymbol{x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}}$, тобто для вибору інтегральної кривої із сім'ї кривих нам потрібно задати точку $\boldsymbol{x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}}$.

У теорії диференціальних рівнянь розв'язок, який відповідає сім'ї інтегральних кривих

$$\boldsymbol{y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)}, \tag{1.4}$$

називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння.

Бувають випадки, коли розв'язок диференціального рівняння складно подати у вигляді $\boldsymbol{y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)}$. Функція, яка має в собі шукану функцію у, є неявною, тобто

$$\boldsymbol{\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0}. \tag{1.5}$$

Такий вигляд розв'язку диференціального рівняння називається його ***загальним інтегралом***.

Розв'язок, який можна отримати із загального шляхом задавання точки з площини розв'язків і який становить конкретну інтегральну криву, називається ***частинним розв'язком*** диференціального рівняння.

Точка з площини розв'язків, для якої ми шукаємо частковий розв'язок, називається ***початковими умовами розв'язку диференціального рівняння.*** Задача знаходження часткового розв'язку диференціального рівняння для даних початкових умов називається ***задачею Коші.***

Для прикладу 1 (рівняння ***1-го*** порядку) початковими умовами буде точка $\boldsymbol{x_0 = 0}$, $\boldsymbol{y_0 = 1}$, розв'язком задачі Коші буде крива $y = \frac{5}{2}x^2 + 3x + 1$, для прикладу 2 (рівняння ***2-го*** порядку) - $\boldsymbol{x_0 = 0}$, $\boldsymbol{y_0 = 10}$, $\boldsymbol{y_0' = 5}$, розв'язком задачі Коші буде крива

$y = \frac{x^4}{12} + 5x + 10$, для рівняння $\boldsymbol{n}$***-го*** порядку початковими умовами буде точка $\boldsymbol{x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}}$, розв'язком задачі Коші буде частинний розв'язок, що відповідає заданій початковій умові.

1.2. Приклади задач, що приводять до розв'язку диференціальних рівнянь

До розв'язання диференціальних рівнянь приводить дуже велика кількість задач макроекономіки, економічного аналізу, екології, фізики і т. ін. Наведемо деякі з них.

Моделювання динаміки демографічного процесу

Перед аналітичним відділом було поставлене завдання - ***знайти закон зміни чисельності населення з часом***.

Зі статистичних даних відомо, що для цієї країни чисельності народжених і померлих за одиницю часу пропорційні чисельності населення з коефіцієнтами $\boldsymbol{k_1}$ та $\boldsymbol{k_2}$- відповідно. Нехай $\boldsymbol{y = y(t)}$ – чисельність жителів країни на момент часу $\boldsymbol{t}$. Приріст населення $\boldsymbol{\Delta y}$ за час $\boldsymbol{\Delta t}$ дорівнює різниці між числом народжених і померлих за цей час, тобто

$$\boldsymbol{\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t = y \Delta t (k_1 - k_2)}.$$

Якщо позначити $\boldsymbol{(k_1 - k_2) = k}$, то $\boldsymbol{\Delta y = y \Delta t k}$, або $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$.

Переходячи до границі за умови, що $\boldsymbol{\Delta t \to 0}$, отримаємо

$\boldsymbol{y' = ky}$ – диференціальне рівняння першого порядку.

Знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{dt} = ky; \quad \frac{dy}{y} = kdt; \quad \int \frac{dy}{y} = \int kdt; \quad \ln|y| = kt + C,$$

або $y = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^C = Ce^{kt}$.

Отже, загальний розв'язок даного диференціального рівняння є сім'єю кривих $y = Ce^{kt}$, $\boldsymbol{C - const}$. Цей розв'язок показує динаміку демографічного становища в даній країні (тобто закон, за яким змінюється приріст населення в даній країни з часом). Стала $\boldsymbol{C}$ залежить від чисельності населення в початковий момент, тобто в точці $\boldsymbol{t = 0}$.

Наприклад, нехай на початок досліджень $\boldsymbol{t = 0}$ чисельність населення країни становила 25 млрд людей. Тоді частинний розв'язок даного рівняння знайдеться так: $25 = Ce^{k \cdot 0} = C$; $y = 25e^{kt}$.

Частинний розв'язок для *початкових умов* $\boldsymbol{y(0) = 25}$ ***млрд людей*** становить $y = 25e^{kt}$.

Знаходження рівняння кривих, у кожній точці яких відрізок дотичної, розташований між осями координат ділиться навпіл точкою дотику.

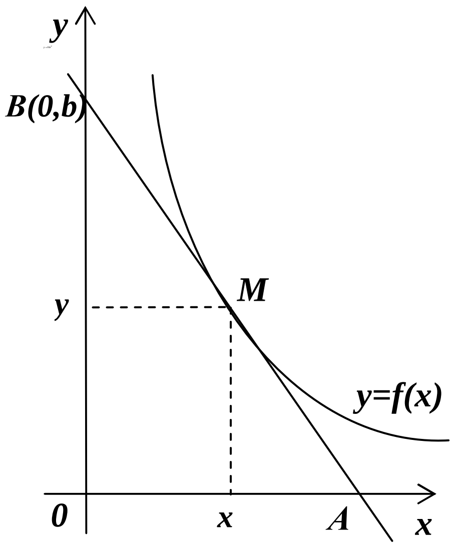

Рисунок 1

Ставиться задача. Знайти рівняння кривих, у кожній точці яких відрізок дотичної, розташований між осями координат, ділиться навпіл точкою дотику.

Розв'язання

Нехай $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – довільна точка кривої заданого типу. Дотична в точці $\boldsymbol{M}$ має рівняння $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{kx}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{k}$ – кутовий коефіцієнт, з теорії диференціального числення відомо, що $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{y}'$, $\boldsymbol{b}$ – ордината в точці перетину дотичною осі $\boldsymbol{OY}$, тобто ордината точки $\boldsymbol{B}$.

Оскільки точка $\boldsymbol{M}$ за умовою ділить $\boldsymbol{AB}$ навпіл, то $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{2y}$. Підставимо до рівняння дотичної: $y=y'x+2y$; $y'x=-y$; $y'=-\dfrac{y}{x}$. Отримали диференціальне рівняння. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x};\qquad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x};\qquad \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+C=-\ln|x|+\ln|C|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,\qquad y=\frac{C}{x}.$$

Отримали загальний розв'язок – сім'ю гіпербол.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ

2.1. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ. ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ

Згідно з означеннями, які ми навели вище, диференціальне рівняння 1-го порядку має вигляд

$$F(x,y,y')=0. \tag{2.1}$$

Якщо диференціальне рівняння подано у вигляді

$$y'=f(x,y), \tag{2.2}$$

то воно називається ***диференціальним рівнянням, розв'язаним відносно 1-ї похідної.***

Якщо рівняння (1.2) з урахуванням того, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, подано у вигляді

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,, \tag{2.3}$$

то кажуть, що диференціальне рівняння ***подано у диференціалах***.

Функцію $y=\varphi(x)$, яка визначена і неперервна на інтервалі $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, будемо називати ***розв'язком*** (2.2), якщо на цьому інтервалі для всіх точок $\boldsymbol{x}$ існує $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})$ і

$\varphi'(x) \equiv f\left(x, \varphi(x)\right)$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку називається сім'я інтегральних кривих $y=\varphi(x,C),\ \ C = const$.

Загальним інтегралом диференціального рівняння 1-го порядку називається сім'я інтегральних кривих $\Phi(x,y,C)=0,\ \ C=const$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку для ***початкових умов*** $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ ***(розв'язком задачі Коші)*** називається функція $y=\varphi(x)$, для якої визначене значення сталої $\boldsymbol{C}$ із загального розв'язку в точці $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$.

Частинним інтегралом диференціального рівняння 1-го порядку для ***початкових умов*** $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ ***(розв'язком задачі Коші)*** називається функція $\Phi(x,y)=0$, для якої визначене значення сталої $\boldsymbol{C}$ із загального розв'язку в точці $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$.

Зміст розв'язання диференціального рівняння 1-го порядку розглянемо на прикладі рівняння типу (2.2). Позначимо через $\boldsymbol{\Gamma}$ область визначення функції двох змінних.

Будемо вважати, що ця область відкрита (тобто *кожна точка* $\boldsymbol{x}$ *входить в область* $\boldsymbol{\Gamma}$ *із деяким своїм околом*). Похідна функції $\boldsymbol{y'}$ є кутовим коефіцієнтом (тангенсом кута нахилу

$tg(\alpha)$) дотичної до кривої $y=\varphi(x)$ в кожній точці з абсцисою x.

Отже, рівняння (2.2) ставить у відповідність кожній точці (x,y) області Γ напрямок $tg(\alpha)=f(x,y)$ дотичної до інтегральної кривої $y=\varphi(x)$ у цій точці.

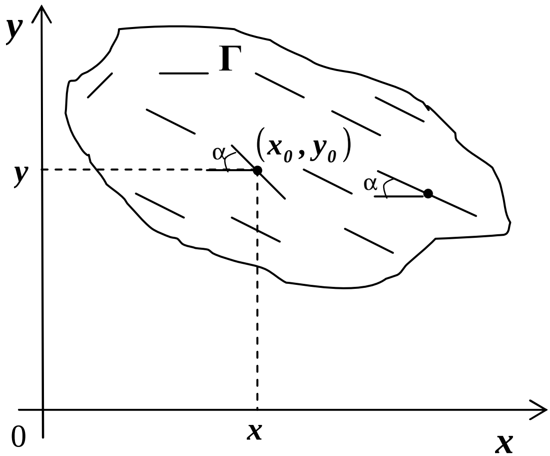

Рисунок 2

Кажуть, що рівняння (2.2) задає ***поле напрямків*** в області Γ (рис.2)

Розв'язати диференціальне рівняння (2.2) – знайти сім'ю кривих, яке відповідає заданому полю напрямків.

Нехай у рівнянні (2.2) функція $f(x,y)$ та її частинна похідна $\dfrac{\partial f(x,y)}{dy}$ неперервні на відкритій множині Γ координатної площини Oxy. Тоді:

1) $\forall(x_0,y_0)$ множини Γ існує розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння (2.2), який задовольняє умову $y_0=\varphi(x_0)$;

2) якщо два розв'язки $y_1=\varphi_1(x)$ та $y_2=\varphi_2(x)$ збігаються хоча б для однієї точки x_0, тобто $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$, то ці розв'язки збігаються для всіх значень x, для яких вони визначені.

Геометричний зміст теореми

Через кожну точку області $\boldsymbol{\Gamma}$ проходить одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (2.2).

Зауваження 1

В окремих випадках ***може існувати*** розв'язок диференціального рівняння, який ***не можна отримати із загального розв'язку при будь - якому значенні сталої C***. В цьому випадку розв'язок називають ***особливим***, в тому розумінні, що для нього не виконується теорема Коші.

Зауваження 2

Оскільки в диференціальних рівняннях 1-го порядку розглядаються функції $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$, $\boldsymbol{y = y(x)}$ неперервні на $(\boldsymbol{a,b})$, то разом з ними можна розглядати функції $\boldsymbol{x = x(y)}$ та $\boldsymbol{x' = g(x, y)}$, де $x' = \dfrac{dx}{dy}$; $g(x, y) = \dfrac{1}{f(x, y)}$. Заміна шуканої функції на обернену буває дуже корисною для спрощення виду диференціального рівняння.

Наприклад. Замість рівняння $(2e^y - x)y' = 1$ простіше розглянути рівняння $x' = 2e^y - x$.

2.2. Типи диференціальних рівнянь 1-го порядку і методи їх розв'язання

Розглянемо основні типи звичайних диференціальних рівнянь і методи їх розв'язання. Всі методи, що будуть викладені нижче, націлені на те, щоб будь - яке диференціальне рівняння першого порядку звести до рівняння вигляду

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \; \textit{або} \; P(x)dx = Q(y)dy, \qquad (2.4)$$

тобто до рівняння, яке можна інтегрувати. Тому й почнемо саме з рівнянь, які з самого початку мають такий вигляд.

2.2.1. Рівняння з відокремленими змінними

Означення

Диференціальним рівнянням ***з відокремленими змінними*** називається рівняння вигляду

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \qquad (2.5)$$

де $\boldsymbol{P(x), Q(y)}$ – неперервні функції.

Загальний інтеграл цього рівняння буде

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C, \qquad C = const.$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл диференціального рівняння)

$$\frac{dx}{x} - \ln|y|dy = 0.$$

Розв'язання

Дане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. $P(x) = \dfrac{1}{x}$, $Q(y) = -\ln y$.

Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{dx}{x} - \int \ln|y|dy = C \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|;$$

$$\int \ln|y|dy = \begin{Bmatrix} \ln|y| = u; \; du = \dfrac{dy}{y} \\ dy = dv; \; v = y \end{Bmatrix} = y\ln|y| - \int \frac{ydy}{y} = y(\ln|y| - 1).$$

Загальний інтеграл буде

$$\ln|x| - y(\ln|y| - 1) = C; \; C = const.$$

Перевірка

Візьмемо похідну від лівої і правої частин за змінною $\boldsymbol{x}$:

$$\left(\ln|x| - y(\ln|y| - 1)\right)' = (C)';$$

$$\frac{1}{x} - y'(\ln|y| - 1) - y\left(\frac{y'}{y}\right) = 0;$$

$$\frac{1}{x} - y'\ln|y| + y' - y' = 0; \ \frac{1}{x} - \frac{dy}{dx}\ln|y| = 0;$$

$\dfrac{dx}{x} - \ln|y|dy = 0$ - отримали вихідне рівняння.

Отже, розв’язок правильний.

Зауваження

Мета методів і перетворень будь - якого диференціального рівняння 1-го порядку – для отримання загального розв’язку (інтеграла) спочатку необхідно звести вихідне рівняння до рівняння з відокремленими змінними, тобто ***відокремити змінні***.

2.2.2. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ Й ЗВЕДЕНІ ДО НИХ

Означення 1

Диференціальним рівнянням ***з відокремлюваними змінними*** називається рівняння вигляду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy, \tag{2.6}$$

тобто рівняння типу (2.3), в якому $P(x,y) = M_1(x)N_1(y); \ Q(x,y) = M_2(x)N_2(y)$ є добутками двох функцій від однієї змінної. Причому $M_1(x)$, $M_2(x)$, $N_1(y)$, $N_2(y)$ – неперервні функції. Це найпростіше рівняння для задачі відокремлення змінних.

Для того щоб відокремити змінні, помножимо ліву і праву частини рівняння на множник $\dfrac{1}{N_1(y)M_2(x)}$ за умови, що $\boldsymbol{N_1(y)M_2(x) \neq 0}$.

Отримаємо рівняння $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$ - рівняння з відокремленими змінними.

Отже, загальний інтеграл цього рівняння матиме вигляд

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,\ \ C = const\,.$$

Приклад 1

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$$(x + xy^2)dx + \sqrt{y^2 - y^2x^2}\,dy = 0\,.$$

Розв'язання

Для того щоб визначити тип рівняння, зробимо деякі спрощення:

$$(1 + y^2)xdx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0\,.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними.

Причому

$M_1(x) = x; N_1(y) = (1 + y^2); M_2(x) = \sqrt{1 - x^2};\ N_2(y) = y$. Щоб відокремити змінні, помножимо ліву і праву частин на множник:

$$\frac{1}{(1 + y^2)\sqrt{1 - x^2}};\ \ x^2 < 1\ \ |x| < 1.$$

Отримаємо рівняння

$$\frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0\,.$$

Змінні відокремили, можна інтегрувати:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{ydy}{1 + y^2} = 0\,;\ -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|1 + y^2\right| = C;\ \ C = const\,.$$

Отже, *загальний інтеграл рівняння* буде $\ln\left|1 + y^2\right| = 2\sqrt{1 - x^2} + C;\ \ C = const\,.$

Отже, у вихідному рівнянні область визначення по змінній $\boldsymbol{x}$ є $|x| \le 1$, а після відокремлювання змінних випали з розгляду точки $x_1 = 1;\ x_2 = -1$.

Зауваження

Накладаючи умову на добуток функцій $\boldsymbol{N_1(y)M_2(x) \neq 0}$, ми тим самим маємо ймовірність втрати розв'язків. Після отримання загального розв'язку (інтеграла) вихідного рівняння необхідно впевнитися, що розв'язки в точках $(\boldsymbol{x, y})$, що відповідають умові, є частинними розв'язками рівняння. Тобто необхідно підставити ці точки до загального інтегралу й отримати визначену сталу $\boldsymbol{C}$. Якщо ж розв'язок у таких точках не можна отримати за будь - яких значень $\boldsymbol{C}$, то маємо в цих точках ***особливий розв'язок***.

У вищенаведеному прикладі у вихідному рівнянні область визначення за змінною $\boldsymbol{x}$ є $|x| \le 1$, а після відокремлювання змінних випала з розгляду точки $x_1 = 1;\ x_2 = -1$. Отже, в точках $x_1 = 1;\ x_2 = -1$ розв'язок може бути загубленим. Перевіримо, підставивши точки до розв'язку:

$$\ln\left|1 + y^2\right| = 2\sqrt{1-1} + C;$$

$$\ln\left|1 + y^2\right| = C;$$

$$1 + y^2 = e^C = \overline{C};$$

$$y^2 = \overline{C} - 1; \qquad y = \pm\sqrt{\overline{C} - 1}.$$

Отримали, що для $\boldsymbol{C \ge 1}$ і точок $\boldsymbol{x_1 = 1,\ x_2 = -1}$ значення $\boldsymbol{y}$ існують, тобто через точки $x_1 = 1;\ x_2 = -1$ проходить частинний розв'язок. ***Особливих розв'язків немає***.

Якщо рівняння подано у вигляді $y' = \dfrac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_2(y)}$, то для відокремлення змінних з урахуванням того, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, ліву і праву частини рівняння необхідно помножити на множник $\dfrac{N_2(y)dx}{N_1(y)}$; $\left(N_1(y)\neq 0\right)$. Отримаємо таке ж саме рівняння з відокремленими змінними.

Приклад 2

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$$y' = (2y+1)tg(x).$$

Розв'язання

Подамо дане рівняння в диференціалах $\dfrac{dy}{dx} = (2y+1)\,tgx$.

Для відокремлення змінних помножимо рівняння на множник $\dfrac{dx}{2y+1}$ за умови, що $2y+1\neq 0;\ \ y\neq -\dfrac{1}{2}$.

Отримаємо рівняння $\dfrac{dy}{2y+1} = tgxdx$.

Змінні відокремлені, інтегруємо

$$\int\frac{dy}{2y+1} = \int tgxdx; \qquad \frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\ln|2y+1| + 2\ln|\cos x| = C; \quad \ln\left|(2y+1)\cdot\cos^2 x\right| = C; \quad C = const;$$

$$(2y+1)\cos^2 x = e^C; \quad 2y+1 = \frac{\overline{C}}{\cos^2 x};$$

$$y = \frac{\overline{C}}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}; \quad \overline{C} = e^C = const.$$

Перевіримо тип розв'язку для $y = -\dfrac{1}{2}$. Підставимо значення ***y*** до рівняння. Отримаємо

$$-\frac{1}{2} = \frac{\overline{C}}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}; \qquad \frac{\overline{C}}{2\cos^2 x} = 0.$$

Даний розв'язок відповідає загальному розв'язку для $\boldsymbol{C = 0}$.

Отже, $y = -\dfrac{1}{2}$ ***не є особливим розв'язком***, входить до сім'ї інтегральних кривих загального розв'язку.

Означення 2

Диференціальне рівняння типу

$$y' = ax + by + c \tag{2.7}$$

називається ***рівнянням, що зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.***

Щоб відокремити змінні, використаємо заміну $z(x) = ax + by + c, \quad \textit{або} \quad y' = z(x)$. Тоді

$$z'(x) = a + by' = a + bz(x), \quad \frac{dz}{dx} = a + bz \Big| \cdot \frac{dx}{a+bz}, \quad (a + bz \neq 0);$$

$$\frac{dz}{a+bz} = dx.$$

У цьому випадку загальний інтеграл буде отриманий так:

$$\int \frac{dz}{a+bz} = \int dx; \qquad \frac{1}{b}\ln|a+bz| = x + C;$$

$$\ln|a + b(ax + by + c)| = bx + C; \;\; C = const.$$

Приклад 3

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$$y' = 5x - 3y.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $z = 5x - 3y$; $z' = 5 - 3y' = 5 - 3z$.

Оскільки $z = z(x)$, то $z' = \dfrac{dz}{dx} = 5 - 3z$.

Щоб відокремити змінні, помножимо ліву і праву сторони рівняння на множник $\dfrac{dx}{5-3z}$ з урахуванням умови

$5-3z\neq 0;\ 3z\neq 5;\ z\neq\frac{5}{3};\ 5x-3y\neq\frac{5}{3};\ y\neq\frac{5}{3}x-\frac{5}{9}$. Отримаємо $\frac{dz}{5-3z}=dx$. Тепер можна інтегрувати

$$\int\frac{dz}{5-3z}=\int dx;$$

$$-\frac{1}{3}\ln(5-3z)=x+C;\ \ln\left(\frac{1}{5-3(5x-3y)}\right)=3x+C;\ \ C=const,$$

або

$$\ln\left(\frac{1}{5-15x+9y}\right)=3x+C;\ \ C=const.$$

Визначимо тип розв'язку для точок, що відповідають умові $y=\frac{5}{3}x-\frac{5}{9}$. Підставимо дане значення $\boldsymbol{y}$ до загального розв'язку:

$$\ln\left(\frac{1}{5-15x+9\left(\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{5-15x+15x-5}\right)\to\infty.$$

Отже, множина точок, зв'язаних рівнянням $y=\frac{5}{3}x-\frac{5}{9}$, є ***особливим розв'язком вихідного диференціального рівняння.***

2.2.3. Однорідні рівняння 1-го порядку й зведені до них зводяться

Означення 1

Функція $\boldsymbol{P(x,y)}$ називається ***однорідною функцією виміру*** m**,** якщо підстановкою $\boldsymbol{x=tx}$, $\boldsymbol{y=ty}$ ($\boldsymbol{t}$ **–** довільне число) її можна перетворити таким чином:

$$P(tx,ty)=t^mP(x,y)$$

Означення 2

Диференціальне рівняння першого порядку, подане в диференціалах

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,, \tag{2.8}$$

називається ***однорідним***, якщо функції $\boldsymbol{P(x, y)}$ та $\boldsymbol{Q(x, y)}$ є однорідними функціями одного виміру, тобто

$P(tx, ty) = t^m P(x, y)$;

$Q(tx, ty) = t^m Q(x, y)$.

Означення 3

Диференціальне рівняння першого порядку, подане в нормальному вигляді

$$y' = f(x, y)\,, \tag{2.9}$$

є однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Для розв'язання однорідних рівнянь використовується заміна:

$z(x) = \dfrac{y}{x};\;\; y = zx;\;\; y' = z'x + z$

(або $z(y) = \dfrac{x}{y};\;\; x = zy;\;\; x' = z'y + z,\;\; x \neq 0$).

Така заміна зводить диференціальне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xydy = 0$.

Розв'язання

Дане диференціальне рівняння записане в диференціалах і вже має вигляд

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0;\;\; P(x, y) = x^2 - 3y^2;\;\; Q(x, y) = 2xy\,.$$

Перевіримо функції ***P(x,y), Q(x,y)*** на однорідність

$$P(tx,ty)=(tx)^2-3(ty)^2=t^2x^2-3t^2y^2=t^2\left(x^2-3y^2\right)=t^2P(x,y);$$

$$Q(tx,ty)=2txty=t^2 2xy=t^2Q(x,y).$$

Отже, обидві функції однорідні й мають вимір 2. Дане диференціальне рівняння – однорідне. Перетворимо рівняння до нормального вигляду:

$$y'=\frac{3y^2-x^2}{2xy}=\frac{3y}{2x}-\frac{x}{2y}.$$

Введемо заміну $z(x)=\frac{y}{x};\ y=zx;\ y'=z'x+z;\ x\neq 0$. Підставимо заміну до рівняння

$$z'x+z=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2z};\ 2z'x=z-\frac{1}{z};\ 2z'x=\frac{z^2-1}{z};\ 2x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2-1}{z}.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні, помноживши ліву і праву частини рівняння на множник $\frac{zdx}{x\left(z^2-1\right)}$, отримаємо рівняння

$$\frac{zdz}{z^2-1}=2xdx.$$

Змінні відокремлені. Можна інтегрувати:

$$\int\frac{zdz}{z^2-1}=\int 2xdx;\quad \frac{1}{2}\ln\left|z^2-1\right|=x^2+C;$$

$$\ln\left|z^2-1\right|=2x^2+C;\ C=const.$$

$$z^2-1=e^{2x^2+C};\ z^2=e^{2x^2}e^C+1=\overline{C}e^{2x^2}+1;$$

замість ***z*** підставимо $z=\frac{y}{x}$. Отримаємо загальний інтеграл

$$\frac{y^2}{x^2}=\overline{C}e^{2x^2}+1;\qquad y^2=\overline{C}x^2e^{2x^2}+x^2;\qquad y=\pm\sqrt{\overline{C}x^2e^{2x^2}+x^2}.$$

Якщо $\boldsymbol{x=0}$, то і $\boldsymbol{y=0}$. Отже, особливих розв’язків немає.

Розглянемо деякі різновиди однорідного рівняння.

1. Диференціальне рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) \tag{2.10}$$

теж є однорідним рівнянням.

Приклад 2

Довести, що рівняння $y' = \dfrac{5x - 3y}{y + 2x}$ є однорідним.

Розв'язання

Дане диференціальне рівняння є рівнянням у нормальній формі типу $y' = f(x, y)$.

Підставимо в рівняння замість x, y заміну $tx,\ ty$:

$$y' = \frac{5tx - 3ty}{ty + 2tx} = \frac{t(5x - 3y)}{t(y + 2x)} = \frac{5x - 3y}{y + 2x}.$$

Отримали, що функція $f(x, y)$ є однорідною нульового виміру. Отже, дане диференціальне рівняння теж однорідне.

2. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2.11}$$

є таким, що зводиться до однорідного за умови, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо умова виконується, рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними, виконавши заміну

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases},$$

де $\boldsymbol{u,v}$ – нові змінні, $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ – розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Приклад 3

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл диференціального рівняння

$$y' = \frac{2x - y - 1}{5 - x + 2y}.$$

Розв'язання

Складемо визначник із коефіцієнтів лінійних комбінацій у чисельнику і знаменнику правої частини диференціального рівняння:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0.$$

Виконується умова можливості зведення вихідного рівняння до однорідного. Запишемо підстановку:

$$\begin{cases} x = u + \alpha, & u, v - \textit{нові змінні}, \\ y = v + \beta; & dx = du,\ dy = dv. \end{cases}$$

Значення $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ знайдемо із системи

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - 1 = 0; \\ -\alpha + 2\beta + 5 = 0; \end{cases} \quad \left.\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1; \\ -\alpha + 2\beta = -5; \end{cases}\right| \times 2; +$$

$$\begin{cases} 3\beta = -9; \\ 2\alpha - \beta = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -1; \\ 2\alpha + 3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -3; \\ \alpha = -1. \end{cases}$$

Отже, підстановка буде

$$\begin{cases} x = u - 1, & u, v - \textit{нові змінні}, \\ y = v - 3; & dx = du;\ dy = dv. \end{cases}$$

Підставимо до рівняння

$$\frac{dv}{du}=v'=\frac{2(u-1)-(v-3)-1}{5-(u-1)+2(v-3)}=\frac{2u-2-v+2}{5-2u-2+3v-3}=\frac{2u-v}{-u+2v}.$$

Отримали однорідне рівняння. Введемо заміну:

$$\frac{v}{u}=z;\quad v=uz;\quad v'=z'u+z.$$

Отримаємо

$$z'u+z=\frac{2u-uz}{-u+2uz}=\frac{2-z}{2z-1}.$$

Відокремимо змінні:

$$z'u=\frac{2-z}{2z-1}-z=\frac{2-z-2z^2+z}{2z-1},$$

$$\frac{dz}{du}u=\frac{2(z^2-1)}{1-2z}.$$

Помножимо рівняння на множник $\dfrac{(1-2z)du}{u(z^2-1)}$. Отримаємо

$\dfrac{(1-2z)dz}{z^2-1}=\dfrac{2du}{u}$. Змінні відокремлені. Можна інтегрувати.

$$\int\frac{(1-2z)dz}{z^2-1}=2\int\frac{du}{u}.$$

Знайдемо інтеграли лівої і правої частини рівняння окремо:

$$2\int\frac{du}{u}=\ln u^2+C.$$

$$I=\int\frac{(1-2z)dz}{z^2-1}=\underbrace{\int\frac{dz}{z^2-1}}_{I_1}-2\underbrace{\int\frac{zdz}{z^2-1}}_{I_2};$$

$$I_1=\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C;\ C=const;$$

$$I_2=2\int\frac{zdz}{z^2-1}=\int\frac{d(z^2-1)}{z^2-1}=\ln\left|z^2-1\right|+C;\ C=const;$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \ln\left|z^2 - 1\right| + C;\ C = const.$$

Підставимо отримані інтеграли до рівняння

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \ln\left|z^2-1\right| = \ln u^2 + C;\ \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \ln\left(z^2-1\right)^2 = \ln u^4 + \ln\overline{C};$$

$$\ln\left|\frac{z-1}{(z+1)\left(z^2-1\right)^2}\right| = \ln\left|u^4\overline{C}\right|;$$

$$\frac{1}{(z+1)^3(z-1)} = u^4 \cdot C;\ C = const$$ – загальний інтеграл однорідного рівняння.

Підставимо заміну:

$$\frac{1}{\left(\frac{v}{u}+1\right)^3\left(\frac{v}{u}-1\right)} = u^4 \cdot C; \qquad \frac{u^4}{(u+v)^3(v-u)} = u^4 \cdot C;\ C = const,$$

або $(u+v)^3(v-u) = C$.

Підставимо заміну $\begin{cases} u = x+1 \\ v = y+3 \end{cases}$, отримаємо

$$(x+1+y+3)^3(y+3-x-1) = C;$$

$$(x+y+4)^3(-x+y+2) = C;\ C = const.$$

Відповідь

Загальний інтеграл вихідного рівняння дорівнює $(x+y+4)^3(-x+y+2) = C;\ C = const$.

У разі якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то заміною змінних $a_1 = ka_2;\ b_1 = kb_2$ вихідне рівняння зводиться до рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = g\left(a_2x+b_2y\right).$$

Останнє рівняння заміною $z = a_2 x + b_2 y$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 4

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$$y' = \frac{2x - 4y - 1}{5 - x + 2y}.$$

Розв'язання

Складемо визначник із коефіцієнтів лінійних комбінацій чисельника і знаменника правої частини диференціального рівняння: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$. Умова не виконується. Відмітимо, що $2x - 4y = -2(-x + 2y)$. Отже, рівняння набирає вигляду

$$y' = \frac{-2(-x + 2y) - 1}{5 - x + 2y}.$$

Зробимо ще одну заміну:

$$-x + 2y = z;$$

$$z' = -1 + 2y' = -1 + 2 \cdot \frac{-2z - 1}{5 + z} = \frac{-4z - 2 - 5 - z}{5 + z} = \frac{-5z - 7}{5 + z}.$$

Підставимо до рівняння $\frac{dz}{dx} = \frac{-5z - 7}{5 + z}$; $\qquad \frac{(5 + z)dz}{-(5z - 7)} = dx$.

Змінні відокремили, інтегруємо:

$$\int \frac{(5 + z)dz}{-(5z - 7)} = \int dx;$$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{(5 + z)dz}{z + 1.4} = -\frac{1}{5}\int \frac{((z + 1.4) + 3.6)dz}{(z + 1.4)} = -\frac{1}{5}\int \frac{(z + 1.4)dz}{(z + 1.4)} -$$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{3.6dz}{(z + 1.4)} = -\frac{1}{5}\int dz - \frac{1}{5} \cdot 3.6 \ln|z + 1.4| =$$

$$= -\frac{1}{5}z - 0.72\ln|z+1.4| + C;\ \ C = const\,.$$

Зробимо обернену підстановку:

$$-\frac{1}{5}(-x+2y) - 0.72\ln|-x+2y+1.4| + C;\ C = const\,,\ \text{або}$$

$$-\frac{1}{5}(-x+2y) - 0.72\ln|-x+2y+1.4| + C;\ C = const$$

$$-\frac{1}{5}(-x+2y) - 0.72\ln|-x+2y+1.4| = x + C\,.$$

Відповідь

Загальний інтеграл диференціального рівняння дорівнює

$$-0.72\ln|-x+2y+1.4| = \frac{4x+2y}{5} + C\,.$$

2.2.4. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ТА НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ

Означення

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{2.12}$$

де $\boldsymbol{p(x), g(x)}$ – неперервні функції змінної $\boldsymbol{x}$.

Якщо у (2.11) функція $\boldsymbol{g(x) = 0}$, тобто

$$y' + p(x)y = 0\,, \tag{2.13}$$

то таке рівняння називається ***однорідним лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку.***

Розглянемо спочатку розв’язання **лінійного однорідного рівняння**. Це рівняння одночасно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні. Отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y;\ \ \frac{dy}{y} = -p(x)dx;\ \ (y \neq 0).$$

Інтегруємо отримане рівняння $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C$,

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C, \qquad y = e^{-\int p(x)dx + C}, \qquad C = const.$$

Отже, загальним розв’язком лінійного однорідного диференціального рівняння є інтеграл

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \; C = const.$$

Приклад 1

Знайти частинний розв’язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$$y' + ytg(3 - 5x) = 0$$

для початкової умови $y(0.6) = 2$ (розв’язати задачу Коші).

Розв’язання

Спочатку знайдемо загальний розв’язок диференціального рівняння.

Маємо лінійне однорідне рівняння 1-го порядку.

$$\boldsymbol{p(x) = tg(3 - 5x)}.$$

Отже, загальний розв’язок буде $y = Ce^{-\int tg(3-5x)dx}$.

Знайдемо інтеграл у показнику степеня:

$$\int tg(3-5x)dx = -\int \frac{\sin(3-5x)}{\cos(3-5x)}dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos(3-5x) = u \\ du = -\sin(3-5x)\cdot(-5)dx = 5\sin(3-5x)dx \\ \sin(3-5x)dx = \dfrac{du}{5} \end{array} \right\} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\cos(3-5x)|;$$

отриманий інтеграл підставляємо до розв’язку:

$$y = Ce^{-\int tg(3-5x)dx} = Ce^{-\frac{1}{5}\ln|\cos(3-5x)|} = C\left(e^{\ln|\cos(3-5x)|}\right)^{-\frac{1}{5}} =$$

$$= C\cos^{-\frac{1}{5}}(3-5x) = \frac{C}{\sqrt[5]{(3-5x)}}; \qquad C = const.$$

Отримали загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння:

$$y = \frac{C}{\sqrt[5]{(3-5x)}};\ C = const.$$

Тепер розв’яжемо задачу Коші для початкової умови $y(0.6) = 2$:

$$2 = \frac{C}{\sqrt[5]{\cos(3-5\cdot 0.6)}} = \frac{C}{1}; \qquad C = 2.$$

Отже, частинним розв’язком для умови $y(0.6) = 2$ буде інтегральна крива $\boxed{y = \frac{2}{\sqrt[5]{\cos(3-5x)}}}$.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння (2.12) $y' + p(x)y = g(x)$. Розв’язок цього рівняння можна шукати двома методами:

1 – методом варіації довільної сталої, або методом Лагранжа;

2 – методом підстановки Бернуллі.

Розглянемо перший метод – метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Метод варіації довільної сталої для розв’язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається з чотирьох етапів:

1. Знаходимо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $\boldsymbol{y' + p(x)y = 0}$ – $y = \varphi(x, C)$.

2. Припускаємо, що $\boldsymbol{C = C(x)}$, тобто що $\boldsymbol{C}$ – невідома функція від $\boldsymbol{x}$. Виходячи з цього припущення, заміняємо у вихідно-

му ***неоднорідному*** рівнянні $\boldsymbol{y}$ на $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}'$ на $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})$. Маємо на це право, оскільки $y=\varphi(x,C)$ - ***розв'язок однорідного рівняння.***

3. Розв'язуємо нове диференціальне рівняння відповідно $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$.

4. Отримане значення сталої $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ підставляємо до загального розв'язку однорідного рівняння.

Приклад 2

Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (розв'язати задачу Коші):

$$(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy, \quad y(0)=1.$$

Розв'язання

I. Спочатку знайдемо загальний розв'язок, або загальний інтеграл, даного диференціального рівняння.

Спробуємо перетворити дане рівняння до стандартного вигляду лінійного диференціального рівняння $\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$:

$$(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy;$$

$$(2x+y-4\ln y)dy = ydx;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x+y-4\ln y}.$$

Отримали складний тип диференціального рівняння, який не є лінійним.

Розглянемо диференціальне рівняння відносно $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$. Отримаємо

$$\frac{dx}{dy}=2\frac{x}{y}+1-4\frac{\ln y}{y}; \quad x'-\frac{2}{y}x=1-4\frac{\ln y}{y}.$$

Відносно $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ рівняння є лінійним неоднорідним 1-го порядку. Тут $p(y)=-\frac{2}{y}$; $g(y)=1-4\frac{\ln y}{y}$. Розв'яжемо його за методом Лагранжа.

1. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $x' - \frac{2}{y}x = 0$;

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}; \qquad x \neq 0; \qquad \ln|x| = 2\ln|y| + \ln C;$$

$$\ln|x| = \ln\left|y^2 \cdot C\right|; \qquad x = Cy^2; \; C = const.$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння буде $x = Cy^2$.

2. Вважаємо, що $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{y})$. Тоді $x = C(y)y^2$; $\quad x' = C'y^2 + 2Cy$.

Підставимо до неоднорідного лінійного рівняння $x' - \frac{2}{y}x = 1 - 4\frac{\ln y}{y}$:

$$C'y^2 + 2Cy - \frac{2Cy^2}{y} = 1 - 4\frac{\ln y}{y}; \qquad C'y^2 = 1 - 4\frac{\ln y}{y}.$$

3. Розв'язуємо нове диференціальне рівняння відносно $C = C(y)$:

$$\frac{dC}{dy} = \frac{1}{y^2} - 4\frac{\ln y}{y^3}; \qquad dC = \frac{dy}{y^2} - 4\frac{\ln y dy}{y^3}.$$

Можемо інтегрувати: $\int dC = \underbrace{\int \frac{dy}{y^2}}_{I_1} - 4\underbrace{\int \frac{\ln y dy}{y^3}}_{I_2}$;

$$I_1 = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C_1;$$

$$I_2 = \int \frac{\ln y dy}{y^3} = \left\{ \begin{array}{l} \ln y = u; \; \dfrac{dy}{y} = du \\ \dfrac{dy}{y^3} = dv; \; v = \displaystyle\int \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{2y^2} \end{array} \right\} = -\frac{\ln y}{2y^2} + \int \frac{dy}{2y^3} =$$

$$= -\frac{\ln y}{2y^2} - \frac{1}{4y^2} + C_2; \; C_1, C_2 - const;$$

$$C(y) = -\frac{1}{y} - 4\left(-\frac{\ln|y|}{2y^2} - \frac{1}{4y^2}\right) + \overline{C};$$

$$C(y) = -\frac{1}{y} + \frac{2\ln|y|}{y^2} + \frac{1}{y^2} + \overline{C} = \frac{2\ln|y| - y + 1}{y^2} + \overline{C}; \quad \overline{C} = C_1 - 4C_2.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння відносно $\boldsymbol{C(y)}$:

$$C(y) = \frac{2\ln|y| - y + 1}{y^2} + \overline{C};\ \overline{C} = const.$$

4. Підставимо значення $\boldsymbol{C(y)}$ до загального розв'язку однорідного рівняння:

$$x = \left(\frac{2\ln|y| - y + 1}{y^2} + \overline{C}\right)y^2 = 2\ln|y| - y + 1 + \overline{C}y^2;\ \overline{C} - const.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння такий:

$$x = 2\ln|y| - y + 1 + \overline{C}y^2;\ \overline{C} - const.$$

ІІ. Розв'яжемо задачу Коші для початкової умови $\boldsymbol{y(0) = 1}$:

$$0 = \overline{C} \cdot 1 + 2\ln|1| - 1 + 1;\ \overline{C} = 0$$

Отже, частинний розв'язок для початкової умови $\boldsymbol{y(0) = 1}$ буде

$$x = 2\ln|y| - y + 1.$$

Розглянемо другий метод – метод підстановки Бернуллі.

Згідно з цим методом розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $\boldsymbol{y' + p(x)y = g(x)}$ знаходимо у вигляді добутку двох функцій. Тобто $\boldsymbol{y = \varphi(x) = u(x)v(x)}$. Тоді $\boldsymbol{y' = \varphi'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$. Підставляємо $\boldsymbol{\varphi(x)}$ та $\boldsymbol{\varphi'(x)}$ до лінійного неоднорідного рівняння, отримаємо

$$u' \cdot v + v' \cdot u + p(x) \cdot u \cdot v = g(x).$$

Перетворимо рівняння – зведемо подібні члени. Отримаємо: $u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = g(x)$. Вважаємо, що $\boldsymbol{v(x)}$ - така функція, що $v' + p(x)v = 0$. Тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0; \\ u'v = g(x). \end{cases}$$

Розв'язання системи ***завжди*** розпочинаємо з ***першого*** рівняння:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx; \quad \ln|v| = -\int p(x)dx; \quad v = e^{-\int p(x)dx}$$

- беремо будь - який частинний розв'язок, наприклад для $C = 0$.

Підставляємо $\boldsymbol{v(x)}$ у ***друге*** рівняння:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int p(x)dx} = g(x); \quad \frac{du}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx};$$

$$du = \left(g(x)e^{\int p(x)dx} \right) dx; \; u = \int \left(g(x)e^{\int p(x)dx} \right) dx + C.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння буде

$$y = uv = \left(\int \left(g(x)e^{\int p(x)dx} \right) dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад 3

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' - y = e^x.$$

Розв'язання

Дане рівняння – лінійне неоднорідне першого порядку. Розв'яжемо його за методом Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'.$$

Підставимо до вихідного рівняння

$$u'v + uv' - uv = e^x; \qquad u'v + u(v' - v) = e^x.$$

Будуємо систему

$$\begin{cases} v'-v=0; \quad \dfrac{dv}{dx}=v; \quad \dfrac{dv}{v}=dx; \quad \ln|v|=x; \quad v=e^{x}; \\ u'v=e^{x}; \quad u'e^{x}=e^{x}; \quad \dfrac{du}{dx}=1; \quad du=dx; \quad u=x+C; \quad C=const. \end{cases}$$

Загальний розв’язок вихідного рівняння буде

$$y=uv=(x+C)e^{x}; \qquad C=const .$$

2.2.5. Рівняння Бернуллі

Означення

Диференціальним рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=g(x)y^{n}; \quad n\in Z , \tag{2.14}$$

де $\boldsymbol{p(x), g(x)}$ – неперервні функції змінної $\boldsymbol{x}$.

Розв’язати таке рівняння можна двома методами.

1. ***Методом Бернуллі*** – так, як розв’язувалося лінійне неоднорідне рівняння 1-го порядку.

2. ***Заміною*** $z=y^{-n+1}$ рівняння Бернуллі зводиться ***до лінійного*** неоднорідного рівняння відносно $\boldsymbol{z(x)}$ і далі вже розв’язується одним з методів розв’язання цього рівняння.

Приклад

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$xy'-4y=x^{2}\sqrt{y} .$$

Розв’язання

$y'-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$ – рівняння Бернуллі.

$$p(x)=-\frac{4}{x}; \qquad g(x)=x; \quad n=\frac{1}{2}.$$

1. ***Розв’яжемо його за методом Бернуллі***. Розв’язок шукаємо у вигляді $y=uv; \quad y'=u'v+uv'$.

Підставимо до вихідного рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv}; \qquad u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x\sqrt{uv}.$$

Будуємо систему:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{4v}{x} = 0; \quad \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{4v}{x}; \quad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{4dx}{x}; \ \ln|v| = \ln x^4; \ v = x^4; \\ u'x^4 = x\sqrt{ux^4}; \ u'x^4 = x^3\sqrt{u}; \ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{\sqrt{u}}{x}; \ \dfrac{du}{\sqrt{u}} = \dfrac{dx}{x}; \quad \begin{array}{l} 2\sqrt{u} = \ln x + \ln C; \\ C = const \end{array} \end{cases}$$

$$u = \left(\frac{1}{2}\ln|xC|\right)^2 = \ln^2\sqrt{xC}; \ C = const.$$

Загальний розв’язок вихідного рівняння буде: $y = uv = x^4 \ln^2\sqrt{xC}; \quad C = const$.

2. Зведемо вихідне рівняння Бернуллі $y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}$ ***з*** $\boldsymbol{n = 1/2}$ до лінійного неоднорідного.

Спочатку поділимо ліву і праву частини рівняння на величину $\sqrt{y} \neq 0$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Зробимо заміну $z = y^{-\frac{1}{2}+1} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}; \quad z' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}; \quad \dfrac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$.

Підставимо до рівняння

$2z' - \dfrac{4}{x}z = x; \quad z' - \dfrac{2}{x}z = \dfrac{x}{2}$ – ***отримали лінійне неоднорідне рівняння відносно*** $z(x)$**.**

Розв’яжемо його за методом Бернуллі: $z = uv; \ z' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = \frac{x}{2}; \qquad u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = \frac{x}{2};$$

$$\begin{cases} v' - \frac{2v}{x} = 0; \ \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}; \quad \ln|v| = 2\ln|x|; \quad v = x^2; \\ u'v = \frac{x}{2}; \quad u'x^2 = \frac{x}{2}; \quad du = \frac{xdx}{2x^2}; \quad \int du = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}; \\ \qquad u = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C| = \frac{1}{2}\ln|xC|. \end{cases}$$

Загальний розв’язок лінійного рівняння відносно $\boldsymbol{z}$

$$z = \frac{1}{2}x^2 \ln|xC| = x^2 \ln\sqrt{xC}; \quad C = const.$$

Загальний розв’язок рівняння Бернуллі

$$z = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = z^2 \Rightarrow y = \left(x^2 \ln\sqrt{xC}\right)^2 = x^4 \ln^2 \sqrt{xC}; \quad C = const.$$

Розв’язки двома методами збігаються.

2.2.6. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Розглянемо диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2.15}$$

де $\boldsymbol{P(x,y)}$, $\boldsymbol{Q(x,y)}$ – ***довільні неперервні диференційовані функції 2-х змінних*** $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

Використовуючи теорію функції двох змінних, таке рівняння можна подати як диференціал деякої функції $\boldsymbol{U(x,y)}$. За таким поданням $P(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$; $Q(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$, отже, вихідне рівняння можна подати як

$$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = 0.$$

З теорії функції двох змінних відомо, що змішані частинні похідні 2-го порядку функції двох змінних у точках своєї неперервності є рівними.

Оскільки $P(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$; $Q(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ – довільні неперервні диференційовані функції, то для них повинна виконуватися умова

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x}.$$

Означення

Якщо для диференціального рівняння (2.15) виконується умова

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \tag{2.16}$$

то таке рівняння є повним диференціалом деякої функції двох змінних $\boldsymbol{U(x,y)}$ і називається ***рівнянням у повних диференціалах.***

Якщо умова (2.16) виконана, то рівняння можна подати у вигляді

$$dU(x,y)=0.$$

Для розв’язання рівняння інтегруємо обидві частини рівняння, отримаємо загальний інтеграл $U(x,y)=C,\ C=const$.

Якщо функції $\boldsymbol{P(x,y)},\ \boldsymbol{Q(x,y)}$ не є очевидними частинними похідними по x та y деякої функції $\boldsymbol{U(x,y)}$, то розв’язок рівняння знаходимо за формулою

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=C, \tag{2.17}$$

або

$$\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx=C. \tag{2.17 a}$$

Тут точка $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ *– довільна точка з області визначення функції* $\boldsymbol{U(x,y)}$.

Приклад 1

Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$$\left(3x^2y+y^2\right)dx+\left(x^3+2xy\right)dy=0\,.$$

Розв’язання

Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Розглянемо функції $\boldsymbol{P(x,y)}$, $\boldsymbol{Q(x,y)}$:

$$P(x,y)=3x^2y+y^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2y,\qquad Q(x,y)=x^3+2xy;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+2y\,.$$

Отже, умова $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ виконується і дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Спробуємо знайти функцію $\boldsymbol{U(x,y)}$, яка відповідає даному рівнянню:

$$3x^2ydx+y^2dx+x^3dy+2xydy=0;$$

$$\left(3x^2ydx+x^3dy\right)+\left(y^2dx+2xydy\right)=0;\quad d\left(x^3y\right)+d\left(y^2x\right)=0;$$

$$d\left(x^3y+y^2x\right)=0;\quad \int d\left(x^3y+y^2x\right)=C;\quad x^3y+y^2x=C,\ C=const\,.$$

Отже, враховуючи правила диференціювання функції двох змінних, ми підібрали функцію $U(x,y)=x^3y+y^2x=C$, яка є загальним інтегралом вихідного диференціального рівняння.

Приклад 2

Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$$\left(2xy-e^xy^3-y\sin xy\right)dx+\left(x^2-3e^xy^2-x\sin xy\right)dy=0\,.$$

Розв’язання

Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Розглянемо функції $\boldsymbol{P(x,y)}$, $\boldsymbol{Q(x,y)}$:

$$P(x,y)=2xy-e^x y^3-y\sin xy;\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x-3e^x y^2-\sin xy-yx\cos xy,$$

$$Q(x,y)=x^2-3e^x y^2-x\sin xy;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x-3e^x y^2-\sin xy-xy\cos xy.$$

Отже, умова $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ виконується і дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Для знаходження розв’язку використаємо формулу (2.17):

$$\int_{x_0}^{x}\left(2xy-e^x y^3-y\sin xy\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left({x_0}^2-3e^{x_0}y^2-x_0\sin x_0 y\right)dy=$$

$$=\left(x^2y-e^x y^3+\frac{y}{y}\cos xy\right)\Bigg|_{x_0}^{x}+\left({x_0}^2y-e^{x_0}y^3+\frac{x_0}{x_0}\cos xy\right)\Bigg|_{y_0}^{y}=$$

$$=x^2y-e^x y^3+\cos xy-\left({x_0}^2y-e^{x_0}y^3+\cos x_0 y\right)+{x_0}^2y-e^{x_0}y^3+$$

$$+\cos x_0 y\underbrace{-{x_0}^2y_0-e^{x_0}{y_0}^3+\cos x_0 y_0}_{C}=x^2y-e^x y^3+\cos xy+C,$$

$C=const.$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння буде $x^2y-e^x y^3+\cos xy+C,\ C=const$.

Загалом рівняння, для яких виконується умова (2.16), складають досить обмежений клас звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку. Але існує метод, завдяки якому в багатьох випадках вдається звичайне диференціальне рівняння звести до рівняння у повних диференціалах. Цей метод складається з побудови так званого ***інтегруючого множника.***

Нехай для довільного рівняння (2.15) не виконується умова (2.16). Припустимо, однак, що якщо помножити $\boldsymbol{P(x,y)}$ та $\boldsymbol{Q(x,y)}$ на множник $\boldsymbol{\mu(x,y)}$, то умова виконається.

Ставиться задача ***знайти такий множник $\mu(x,y)$, за допомогою якого вихідне довільне рівняння (2.15) зводиться до рівняння у повних диференціалах.***

Припустимо, що такий множник існує, тоді умова (2.16) буде мати вигляд

$\frac{\partial(\mu(x,y)\cdot P(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)\cdot Q(x,y))}{\partial x}$, або за правилами диференціювання

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}P(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}Q(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \text{ або}$$

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}P(x,y)-\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}Q(x,y)=$$

$$=\mu(x,y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\mu(x,y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\mu(x,y)\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)\partial y}P(x,y)-\frac{\partial\mu(x,y)}{\mu(x,y)\partial x}Q(x,y)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\ln|\mu(x,y)|}{\partial y}P(x,y)-\frac{\partial\ln|\mu(x,y)|}{\partial x}Q(x,y)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \quad (2.18)$$

З останнього рівняння за конкретних умов можна знайти інтегруючий множник $\boldsymbol{\mu(x,y)}$.

1. $\mu=\mu(x)$.

У цьому випадку $\frac{\partial\ln|\mu(x,y)|}{\partial y}=0$. Тоді (2.18) матимеУ вигляд

$$-\frac{\partial\ln|\mu(x,y)|}{\partial x}Q(x,y)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Множник $\boldsymbol{\mu(x)}$ знайдеться так:

$$\frac{\partial \ln|\mu(x,y)|}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{Q(x,y)};$$

$$\ln|\mu(x,y)|=\int-\frac{\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{Q(x,y)}dx.$$

2. $\mu=\mu(y)$.

У цьому випадку $\dfrac{\partial \ln|\mu(x,y)|}{\partial x}=0$. Тоді (2.18) матиме вигляд

$$\frac{\partial \ln|\mu(x,y)|}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Множник $\boldsymbol{\mu(y)}$ знайдеться так:

$$\frac{\partial \ln|\mu(x,y)|}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)};$$

$$\ln|\mu(x,y)|=\int\frac{\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)}dy.$$

3. $\boldsymbol{\mu=\mu(x,y)}$.

У цьому випадку інтегруючий множник знаходиться підбором і потребує наявності суттєвого досвіду розв’язання диференціальних рівнянь.

§ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Не зменшуючи узагальнення, розглянемо типи і методи розв’язку диференціальних рівнянь вищих порядків на прикладі звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

3.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0\,, \tag{3.1}$$

або

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3.2}$$

де $f(x, y, y')$ - визначена і неперервна в деякій області $\boldsymbol{\Gamma}$ функція від трьох аргументів.

Загальним розв'язком диференціального рівняння 2-го порядку (3.2) називається функція

$y = \varphi(x, C_1, C_2),\ C_1, C_2 - const$,

яка при підстановці у рівняння (3.2) дає тотожність.

Частинним розв'язком диференціального рівняння 2-го порядку (3.2) для початкових умов $y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y'_0$ називається функція

$y = \varphi(x)$,

в якій сталі C_1 і C_2 визначаються початковими умовами.

Визначити сталі C_1 та C_2, як і для диференціального рівняння першого порядку, - означає розв'язати задачу Коші – знайти таку єдину інтегральну криву, яка відповідає даним початковим умовам.

Теорія побудови розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків (другого порядку зокрема) спирається на той факт, що оператор диференціювання є ***лінійним оператором***, а множина розв'язків будь - якого диференціального рівняння створює лінійний простір. Тобто для розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку правильними будуть теореми, які випливають із визначення лінійного простору.

Теорема 1

Якщо функція $y=\varphi(x)$ є частинним розв'язком диференціального рівняння (3.2), то $y=C\varphi(x)$, $C\in R-const$ ***теж є розв'язком*** того самого рівняння.

Згадаємо, що лінійною комбінацією функцій $\boldsymbol{\varphi_1},\boldsymbol{\varphi_2}$ та сталих $\boldsymbol{C_1}$ і $\boldsymbol{C_2}$ називається вираз $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$. Якщо лінійна комбінація $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)=0$ тільки у випадку, коли сталі дорівнюють $\boldsymbol{0}$ (тобто $\boldsymbol{C_1=0}$ та $\boldsymbol{C_2=0}$), тоді функції $\boldsymbol{\varphi_1},\boldsymbol{\varphi_2}$ називаються ***лінійно незалежними***, в іншому випадку – ***лінійно залежними***.

Приклад

Перевірити лінійну незалежність функцій:

$a)e^{k_1x}\ i\ e^{k_2x},\ \ k_1\neq k_2;\ b)e^{kx}\ \ i\ \ xe^{kx}$.

Розв'язання

а) якщо $C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}\equiv 0$, то $C_1=C_2e^{(k_2-k_1)x}$. Оскільки $\boldsymbol{k_1\neq k_2}$, то $\boldsymbol{(k_1-k_2)\neq 0}$, і, відповідно, $e^{(k_2-k_1)x}\neq const$. Таким чином, щоб $\boldsymbol{C_1}$ була сталою, необхідно, щоб $\boldsymbol{C_2=0}$, а отже, і $\boldsymbol{C_1=0}$. Отже, $C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}\equiv 0$ виконується тільки за умови, що $C_1=C_2=0$, а функції $e^{k_1x}\ i\ e^{k_2x},\ \ k_1\neq k_2$ - ***лінійно незалежні;***

б) $C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}=e^{kx}(C_1+xC_2)\equiv 0\Rightarrow(C_1+xC_2)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow C_1=-xC_2$. Щоб $\boldsymbol{C_1}$ була сталою, необхідно, щоб $\boldsymbol{C_2=0}$, а отже і $\boldsymbol{C_1=0}$. Таким чином, $C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}=0$ тільки за умови, що $C_1=C_2=0$, а функції $e^{kx}\ \ i\ \ xe^{kx}$ - ***лінійно незалежні.***

Теорема 2

Якщо функції $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$ є лінійно незалежними частинними розв'язками диференціального рівняння (3.2), то лінійна комбінація цих розв'язків $y=y_1+y_2=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$, $C_1,C_2\in R-const$ ***теж є розв'язком*** цього рівняння.

3.1.1. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Значним класом диференціальних рівнянь другого порядку є ***лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами***. Такі рівняння мають загальний вигляд

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{3.3}$$

де $a, b, c \in R - const$; $f(x)$ - довільна функція, неперервна і диференційована в області визначення рівняння.

Якщо $f(x) = 0$ для будь - якої точки з області визначення диференціального рівняння, то (3.3) називається ***лінійним однорідним*** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

У разі коли $f(x) \neq 0$ хоча б в одній з точок області визначення диференціального рівняння, то (3.3) називається ***лінійним неоднорідним*** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо послідовно структуру розв'язків і методи розв'язання спочатку однорідного, а потім неоднорідного рівняння.

3.1.1.1. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$ay'' + by' + cy = 0 . \tag{3.4}$$

Теорема про структуру розв'язку

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (3.4) є лінійною комбінацією всіх лінійно незалежних частинних розв'язків. Тобто, якщо $\boldsymbol{\varphi_1(x)}$ та $\boldsymbol{\varphi_2(x)}$ – лінійно незалежні частинні розв'язки (3.4), то загальним розв'язком рівняння (3.4) буде функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \quad C_1, C_2 \in R - const . \tag{3.5}$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (3.4) у вигляді $y = e^{kx}$, де $\boldsymbol{k}$ – деяке невідоме дійсне число. Знайдемо необхідні похідні:

$y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$.

Підставимо y, y', y'' до рівняння:

$a \cdot k^2 \cdot e^{kx} + b \cdot k \cdot e^{kx} + c \cdot e^{kx} = 0$.

Тоді $e^{kx}\left(a \cdot k^2 + b \cdot k + c\right) = 0$.

$e^{kx} \neq 0,\ a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0$.

Отже, функція $y = e^{kx}$ є розв'язком (3.4), якщо $\boldsymbol{k}$ є коренем рівняння

$$a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0. \tag{3.6}$$

Це рівняння називається ***характеристичним рівнянням лінійного однорідного диференціального рівняння*** (3.4).

Розв'язок квадратного рівняння визначається його дискримінантом $D = b^2 - 4ac$. Можливі три випадки:

1. $D = b^2 - 4ac > 0$;
2. $D = b^2 - 4ac = 0$;
3. $D = b^2 - 4ac < 0$.

Розглянемо кожний випадок окремо.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$. В цьому випадку $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$ – корені дійсні та різні. Частинні розв'язки диференціального рівняння (3.4) мають вигляд: $y_1 = e^{k_1 x}$ *і* $y_2 = e^{k_2 x}$. Вище було показано, що ці функції лінійно незалежні. Отже, згідно з теоремою про структуру розв'язку ***загальний розв'язок*** рівняння (3.4) матиме вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \qquad C_1, C_2 - const \tag{3.7}$$

2. $D = b^2 - 4ac = 0$. У цьому випадку характеристичне рівняння має два однакових кореня $\boldsymbol{k}$. Лінійно незалежними частинними розв'язками будуть: $y_1 = e^{kx}$ *і* $y_2 = xe^{kx}$. Лінійна незалежність цих функцій показана вище. Отже, загальний розв'язок (3.4) в цьому разі буде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right), \qquad (3.8)$$

$C_1, C_2 - const$.

3. $D = b^2 - 4ac < 0$. У цьому випадку характеристичне рівняння дійсних коренів не має. Але є два комплексно-спряжених кореня:

$$k_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad i \quad k_2 = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{-4ac - b^2}}{2a}.$$

Позначимо $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$; $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$. Тоді коренями характеристичного рівняння (3.6) будуть комплексно спряжені числа $k_1 = \alpha + i\beta$; $k_2 = \alpha - i\beta$. Оскільки числа комплексно спряжені, для розв'язку достатньо взяти один із коренів. Нехай це буде $k_1 = \alpha + i\beta$.

Розв'язком диференціального рівняння (3.4) буде функція

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}.$$

Застосуємо відому формулу Ейлера

$$e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos \beta x + i \sin \beta x\right).$$

За один частинний розв'язок візьмемо дійсну частину отриманого комплексного числа, а за другий – уявну, отримаємо

$$y_1 = \operatorname{Re}\left(e^{\alpha x}\left(\cos \beta x + i \sin \beta x\right)\right) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2 = \operatorname{Im}\left(e^{\alpha x}\left(\cos \beta x + i \sin \beta x\right)\right) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці функції лінійно незалежні. Отже, ***загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння у випадку комплексних коренів*** буде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x =$$

$$= e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right), \quad C_1, C_2 - const.$$

Зауваження

Для того щоб виписати характеристичне рівняння для лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $ay'' + by' + cy = 0$, достатньо замінити у ньому похідні параметром $\boldsymbol{k}$ у степені, що відповідає порядку відповідної похідної ($y'' \leftrightarrow k^2$; $y' \leftrightarrow k$; $y \leftrightarrow 1$). Отримаємо рівняння

$$a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0.$$

Приклад 1

Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ за початкових умов $y(0) = 3,\ y'(0) = 4$.

Розв'язання

а) Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння.

Дане рівняння – лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Будемо шукати розв'язок у вигляді $y = e^{kx}$. Знайдемо потрібні похідні: $y' = ke^{kx};\ y'' = k^2 e^{kx}$. Підставимо y, y', y'' до рівняння

$$k^2 e^{kx} - 3ke^{kx} + 2e^{kx} = 0; \quad e^{kx}\left(k^2 - 3k + 2\right) = 0.$$

Характеристичне рівняння для вихідного диференціального рівняння має вигляд

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$k_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}; \quad k_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1;\ k_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Отже, отримали два частинних розв'язки:

$$y_1 = e^x; \qquad y_2 = e^{2x}.$$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}; \qquad C_1, C_2 - const.$$

б) Тепер розв'яжемо задачу Коші для початкових умов $y(0) = 3,\ y'(0) = 4$.

Підставимо умову $y(0)=3$ у загальний розв'язок:

$$3=C_1e^0+C_2e^{2\cdot 0}=C_1+C_2 .$$

Знайдемо похідну від загального розв'язку:

$$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x} .$$

Підставимо умову $y'(0)=4$ у формулу для $\boldsymbol{y'}$:

$$4=C_1e^0+2C_2e^{2\cdot 0}=C_1+2C_2 .$$

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1+C_2=3; \\ C_1+2C_2=4. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} C_1+C_2=3; \\ C_1+2C_2=4. \end{cases} \begin{cases} C_1+1=3; \\ C_2=1. \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=2; \\ C_2=1. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі Коші (частинним розв'язком для початкових умов $y(0)=3,\ y'(0)=4$) буде функція

$$y=2e^x+e^{2x} .$$

Приклад 2

Знайти частинний розв'язок рівняння $y''-2y'+y=0$ за початкових умов $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Розв'язання

а) Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння.

Дане рівняння – лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння, зробивши заміну

$$y''\leftrightarrow k^2;\ y'\leftrightarrow k;\ y\leftrightarrow 1;$$

$$k^2-2k+1=0; \qquad (k-1)^2=0 .$$

Це рівняння має 2 однакових корені $k=1$ (корінь $\boldsymbol{k=1}$ має кратність 2).

Частинні розв’язки будуть

$y_1 = e^x; \qquad y_2 = xe^x.$

Як було показано вище, ці розв’язки – лінійно незалежні функції. Загальний розв’язок матиме вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 xe^x = e^x (C_1 + xC_2); \qquad C_1, C_2 - const.$$

б) Тепер розв’яжемо задачу Коші для початкових умов $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Підставимо умову $y(0)=1$ у загальний розв’язок:

$1 = e^0 (C_1 + 0 \cdot C_2) = C_1.$

Знайдемо похідну від загального розв’язку:

$y' = C_1 e^x + C_2 e^x + xC_2 e^x = e^x (C_1 + (1+x)C_2).$

Підставимо умову $y'(0)=0$ у формулу для $\boldsymbol{y'}$:

$0 = e^0 (C_1 + (1+0)C_2) = C_1 + C_2.$

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_1 + C_2 = 0, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Отже, розв’язком задачі Коші (частинним розв’язком для початкових умов $y(0)=1,\ y'(0)=0$) буде функція

$y = e^x (1-x).$

Приклад 3

Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$ за початкових умов $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

Розв’язання

а) Знайдемо спочатку загальний розв’язок рівняння.

Дане рівняння – лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння, зробивши заміну:

$y'' \leftrightarrow k^2;\ y' \leftrightarrow k;\ y \leftrightarrow 1;$

$k^2 - 2k + 2 = 0$.

Розв'яжемо його:

$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$.

Отримали комплексно спряжені корені характеристичного рівняння:

$k_1 = 1 + i;$ $\qquad k_2 = 1 - i$. Для цих коренів $\alpha = 1;\ \beta = 1$.

Отже, отримали два частинних розв'язки.

Частинні розв'язки будуть:

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^x \cos x; \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^x \sin x$.

Ці розв'язки – лінійно незалежні функції. Загальний розв'язок матиме вигляд

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x);$

$C_1, C_2 - const$.

б) Тепер розв'яжемо задачу Коші для початкових умов $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

Підставимо умову $y(0) = 1$ у загальний розв'язок:

$1 = e^0 (C_1 \cos 0x + C_2 \sin 0x) = C_1$.

Знайдемо похідну від загального розв'язку:

$y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x (-C_1 \sin x + C_2 \cos x) =$
$= e^x (C_1 (\cos x - \sin x) + C_2 (\cos x + \sin x))$.

Підставимо умову $y'(0) = 1$ у формулу для $\boldsymbol{y'}$:

$1 = e^0 (C_1 (\cos 0 - \sin 0) + C_2 (\cos 0 + \sin 0)) = C_1 + C_2$.

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_1 + C_2 = 1, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі Коші (частинним розв'язком для початкових умов $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$) буде функція $y = e^x \cos x$.

3.1.1.2. Неоднорідні рівняння

Лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку має вигляд

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{3.9}$$

де $\boldsymbol{f(x)}$ – довільна неперервна і диференційована в області свого визначення функція від змінної $\boldsymbol{x}$.

Теорема про структуру розв'язку

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.9) є доданком загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $ay'' + by' + cy = 0$ і будь якого частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння, або

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}. \tag{3.10}$$

Найбільш відомими методами розв'язання рівнянь типу (3.9) є:

1. Метод варіації сталої Лагранжа.

2. Метод підбору частинного розв'язку вихідного рівняння $y_{ч.н.}$ відповідно до вигляду правої частини рівняння $\boldsymbol{f(x)}$. Рівняння, які можна розв'язати таким методом носять назву ***лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із спеціальною правою частиною.***

I. Розглянемо спочатку ***метод варіації сталої Лагранжа***. За схемою це є узагальнення методу варіації сталої для розв'язання лінійного неоднорідного рівняння 1-го порядку. Тобто складається він із таких етапів.

1) Шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $ay'' + by' + cy = 0$.

$y_{з.о.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

2) Припускаємо, що в загальному розв'язку диференціального рівняння C_1, C_2 є невідомі функції $C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$, розв'язок $y_{з.о.}$ набирає вигляду

$$y_{з.о.}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x).$$

Знаходимо відповідні похідні:

$$y'_{з.о.}=C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)+C_1(x)y'_1(x)+C_2(x)y'_2(x).$$

Припускаємо, що $C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)=0$, тоді

$$y'_{з.о.}=C_1(x)y'_1(x)+C_2(x)y'_2(x),$$
$$y''_{з.о.}=C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)+C_1(x)y''_1(x)+C_2(x)y''_2(x).$$

Підставляємо до вихідного рівняння (3.9) $ay''+by'+cy=f(x)$:

$$a\left(C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)+C_1(x)y''_1(x)+C_2(x)y''_2(x)\right)+$$
$$+b\left(C_1(x)y'_1(x)+C_2(x)y'_2(x)\right)+c\left(C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)\right)=f(x).$$

Виконаємо перетворення:

$$a\left(C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)\right)+C_1(x)\left(ay''_1(x)+by'_1(x)+cy_1(x)\right)+$$
$$+C_2(x)\left(y''_2(x)+by'_2(x)+cy_2(x)\right)=f(x).$$

У дужках біля $\boldsymbol{C_1(x)}$ та $\boldsymbol{C_2(x)}$ стоять лінійні однорідні рівняння, до яких підставлені розв’язки $\boldsymbol{y_1(x)}$ та $\boldsymbol{y_2(x)}$, отже, ці дужки дорівнюють $\boldsymbol{0}$.

Отримали систему

$$\begin{cases} C'_1y_1+C'_2y_2=0, \\ C'_1y'_1+C'_2y'_2=\dfrac{f(x)}{a}. \end{cases}$$

3) Розв’язуємо систему відносно $C'_1(x)$ *і* $C'_2(x)$. Інтегруємо отримані розв’язки. Отримуємо функції

$$C_1(x)=C_1\left(x,\overline{C}_1\right);\quad C_2(x)=C_2\left(x,\overline{C}_2\right);\quad \overline{C}_1;\overline{C}_2-const.$$

4) Підставляємо $C_1(x); C_2(x)$ до загального розв’язку однорідного рівняння.

Приклад 1

Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 12xe^{5x}$.

Розв'язання

Дане рівняння – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку. Права частина – $f(x) = 12xe^{5x}$.

Розв'язок рівняння має структуру $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

1. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\boldsymbol{y_{з.о.}}$ відповідного однорідного рівняння:

$y'' - 3y' + 2y = 0$.

З попереднього прикладу (приклад 1, п. 3.1.1.1) нам відомо, що загальним розв'язком даного рівняння є функція

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. Покладемо $C_1 = C_1(x);\ C_2 = C_2(x)$. Отже, $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Складемо систему відносно $C_1'(x)$ *і* $C_2'(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 12xe^{5x}. \end{cases}$$

3. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} C_2'(x)e^{2x} = 12xe^{5x}; \\ C_1'(x)e^x = -12xe^{5x}. \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x) = -12xe^{4x}; \\ C_2'(x) = 12xe^{3x}. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{dC_1(x)}{dx} = -12xe^{4x}; \\ \dfrac{dC_2(x)}{dx} = 12xe^{3x}. \end{cases}$$

Інтегруємо рівняння системи

$$\begin{cases} dC_1(x) = -12xe^{4x}dx; \\ dC_2(x) = 12xe^{3x}dx. \end{cases} \quad \begin{cases} \int dC_1(x) = -12\int xe^{4x}dx; \\ \int dC_2(x) = 12\int xe^{3x}dx. \end{cases}$$

Знайдемо окремо інтеграли правих частин системи:

$$\int xe^{3x}dx=\left\{\begin{aligned}&u=x;\ du=dx\\&dv=e^{3x}dx;\ v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{aligned}\right\}=\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=$$

$$=\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+\overline{C}_2=\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}+\overline{C}_2;\ \ \overline{C}_2=const\ .$$

$\int xe^{4x}dx=\dfrac{e^{4x}(4x-1)}{16}+\overline{C}_1;\ \overline{C}_1-const$ - за аналогією з попереднім.

Отже,

$$\begin{cases}C_1(x)=-12\cdot\left(\dfrac{e^{4x}(4x-1)}{16}+\overline{C}_1\right)=-\dfrac{3e^{4x}(4x-1)}{4}+\overline{C}_1;\\C_2(x)=12\cdot\left(\dfrac{e^{3x}(3x-1)}{9}+\overline{C}_2\right)=\dfrac{4e^{3x}(3x-1)}{3}+\overline{C}_2.\end{cases}$$

4. Підставимо $C_1(x); C_2(x)$ до загального розв'язку однорідного рівняння $y=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}$:

$$y=\left(-\frac{3e^{4x}(4x-1)}{4}+\overline{C}_1\right)e^x+\left(\frac{4e^{3x}(3x-1)}{3}+\overline{C}_2\right)e^{2x}=$$

$$=\overline{C}_1e^x+\overline{C}_2e^{2x}-e^x\,\frac{3e^{4x}(4x-1)}{4}+e^{2x}\,\frac{4e^{3x}(3x-1)}{3};$$

$$y=\overline{C}_1e^x+\overline{C}_2e^{2x}-\frac{3e^{5x}(4x-1)}{4}+\frac{4e^{5x}(3x-1)}{3}=$$

$$=\overline{C}_1e^x+\overline{C}_2e^{2x}+e^{5x}\left(\frac{-9(4x-1)+16(3x-1)}{12}\right)=$$

$$=\overline{C}_1e^x+\overline{C}_2e^{2x}+e^{5x}\left(\frac{-36x+9+48x-16}{12}\right)=$$

$$=\overline{C}_1e^x+\overline{C}_2e^{2x}+e^{5x}\left(\frac{12x-7}{12}\right)=\overline{C}_1e^x+\overline{C}_2e^{2x}+e^{5x}\left(x-\frac{7}{12}\right).$$

Загальний розв'язок рівняння

$$y=\overline{C}_1 e^{x}+\overline{C}_2 e^{2x}+e^{5x}\left(x-\frac{7}{12}\right);\ \overline{C}_1,\overline{C}_2-const\,.$$

Тут $y_{з.о.}=\overline{C}_1 e^{x}+\overline{C}_2 e^{2x};\ \overline{C}_1,\overline{C}_2-const;\quad y_{ч.н.}=e^{5x}\left(x-\frac{7}{12}\right).$

II. Тепер розглянемо ***лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.***

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (3.9):

$$ay''+by'+cy=f(x).$$

Посилаючись на формулу (3.10), запишемо структуру розв'язку цього рівняння: $y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння розшукується, як і раніше, за методом Ейлера. Частинний же розв'язок будемо шукати залежно від вигляду правої частини рівняння $\boldsymbol{f(x)}$.

Загальний вигляд спеціальної правої частини лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами є таким

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),\tag{3.11}$$

де α,β - дійсні числа; $P_n(x),\ Q_m(x)$ – поліноми степенів $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{m}$ відповідно.

Але в теорії розв'язання таких рівнянь зазвичай розрізняють два види спеціальних правих частин $\boldsymbol{f(x)}$ залежно від значення величин α і β:

1) $\alpha\neq 0,\beta=0$. Права частина набере вигляду

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x};\tag{3.12}$$

2) $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$. Права частина набере вигляду

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x\right).\tag{3.13}$$

Розглянемо методи визначення частинних розв'язків неоднорідного рівняння для кожного виду правої частини окремо.

►***1. Права частина неоднорідного рівняння має вигляд***

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}. \tag{3.14}$$

Тут $\boldsymbol{P_n(x)}$ – поліном степеня $\boldsymbol{n,\alpha\in R}$. Наприклад, $P_0=A-const;\ \ P_1=Ax+B,\ P_2=Ax^2+Bx+C$ і т. ін.

Розглянемо випадок, коли у (3.14):

$\boldsymbol{\alpha\neq 0}$.

У цьому випадку частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{ч.н.}=Q_n e^{\alpha x}x^r,$$

де $\boldsymbol{Q_n(x)}$ – невідомий поліном того степеня, що й $\boldsymbol{P_n(x),\alpha}$ – дійсне число, таке саме, як і у $\boldsymbol{f(x)}$; $\boldsymbol{r}$ – число, що дорівнює кількості збігів числа $\boldsymbol{\alpha}$ з коренями $\boldsymbol{k_1,\ k_2}$ характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння $ay''+by'+cy=0$, тобто $\boldsymbol{r}$ може дорівнювати 0, 1 або 2.

У побудованому частинному розв'язку невідомим є тільки поліном $\boldsymbol{Q_n(x)}$. Для його визначення підставимо розв'язок до рівняння (3.9). Перед цим знайдемо похідні $y'_{ч.н.}$; $y''_{ч.н.}$ і підставимо $y_{ч.н.}$; $y'_{ч.н.}$; $y''_{ч.н.}$ до вихідного неоднорідного рівняння. Порівняємо ліву і праву частини рівняння і ***методом невизначених коефіцієнтів*** знайдемо невідомі коефіцієнти полінома $\boldsymbol{Q_n(x)}$.

Приклад 2

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''-3y'+2y=12xe^{5x}$$

з прикладу 1 використавши метод підбору частинного розв'язку за спеціальною правою частиною.

Розв'язання

Дане рівняння – лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x)=12xe^{5x}$. Загальний розв'язок такого рівняння згідно з теоремою про структуру є $y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}$.

1. **Знайдемо** $y_{з.о.}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-3y'+2y=0$. У прикладі 1 ми його знайшли: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$; $C_1, C_2-const$. Отже, корені характеристичного рівняння - $k_1=1, k_2=2$.

2. **Знайдемо** $y_{ч.н.}$ – частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння.

Права частина рівняння $f(x)=12xe^{5x}$ типу $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.}=Q_ne^{\alpha x}x^r$.

Визначимо степінь $\boldsymbol{Q_n(x)}$. $P_n(x)=12x$, отже, поліном в правій частині має степінь $\boldsymbol{n=1}$, відповідно і поліном частинного розв'язку $\boldsymbol{Q_n(x)}$ теж має степінь $\boldsymbol{n=1}$: $Q_1(x)=Ax+B$.

У правій частині $\alpha=5$ – не збігається з коренями характеристичного рівняння $k_1=1, k_2=2$, отже, показник степеня $\boldsymbol{x}$ у формулі частинного розв'язку $\boldsymbol{r=0}$.

Результатом наших досліджень буде частинний розв'язок $y_{ч.н.}=(Ax+B)e^{5x}x^0=(Ax+B)e^{5x}$.

Для визначення $Q_1(x)=Ax+B$ знайдемо похідні розв'язку і підставимо до вихідного рівняння $y''-3y'+2y=12xe^{5x}$

$$y'_{ч.н.}=\left((Ax+B)e^{5x}\right)'=Ae^{5x}+5(Ax+B)e^{5x}=e^{5x}(5Ax+A+5B);$$

$$y''_{ч.н.}=\left((5Ax+A+5B)e^{5x}\right)'=5Ae^{5x}+5(5Ax+A+5B)e^{5x}=$$
$$=e^{5x}(25Ax+5A+5A+25B)=e^{5x}(25Ax+10A+25B);$$

$$e^{5x}(25Ax+10A+25B)-3e^{5x}(5Ax+A+5B)+2(Ax+B)e^{5x}=12xe^{5x}.$$

У лівій частині винесемо e^{5x}. Приведемо подібні члени:

$$e^{5x}\left(25Ax+10A+25B-15Ax-3A-15B+2Ax+2B\right)=12xe^{5x}.$$

Прирівняємо поліноми біля e^{5x} лівої і правої частин рівняння:

$$\left(12Ax+7A+12B\right)=12x.$$

За методом невизначених коефіцієнтів знайдемо $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ для полінома $Q_1(x)=Ax+B$. Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{cases} x^1:\ 12A=12, \\ x^0:\ 7A+12B=0; \end{cases} \quad \begin{cases} A=1, \\ 7+12B=0; \end{cases} \quad \begin{cases} A=1, \\ B=-\dfrac{7}{12}. \end{cases}$$

Отже, $Q_1=x-\dfrac{7}{12}$.

Частинний розв'язок, відповідно, буде $y_{ч.н.}=\left(x-\dfrac{7}{12}\right)e^{5x}$.

3. **Складемо** загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння:

$$y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(x-\frac{7}{12}\right)e^{5x};\ C_1,C_2-const.$$

Розв'язок збігся з розв'язком даного диференціального рівняння за методом Лагранжа (приклад 1).

Розглянемо випадок, коли у (3.13):

$\boldsymbol{\alpha}=0$.

У цьому випадку отримаємо рівняння з правою частиною:

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{P_n}\left(\boldsymbol{x}\right), \tag{3.15}$$

$\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})$ – поліном довільного цілого степеня

$$ay''+by'+cy=P_n(x).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{ч.н.} = Q_n x^r,$$

де $\boldsymbol{Q_n(x)}$ – невідомий поліном того степеня, що й $\boldsymbol{P_n(x)}$; $\boldsymbol{r}$ – число, яке дорівнює кількості збігів числа $\boldsymbol{\alpha = 0}$ з коренями $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$ характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння $ay'' + by' + cy = 0$, тобто $\boldsymbol{r}$ може дорівнювати 0 або 1.

Приклад 3

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 5y' = 30x^2 + 5x.$$

Розв'язання

Дане рівняння – лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 30x^2 + 5x$. Загальний розв'язок такого рівняння згідно з теоремою про структуру є $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

1. **Знайдемо** $y_{з.о.}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 5y' = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k = 0$.

Розв'яжемо його: $k(k-5) = 0; \quad k_1 = 0, \; k_2 = 5$. Корені дійсні й різні, отже, частинними розв'язками будуть функції $y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = e^{5x}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння буде

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

2. **Знайдемо** $y_{ч.н.}$ – частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння.

Права частина рівняння $f(x) = 30x^2 - 5x$ типу $f(x) = P_n(x)$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = Q_n x^r$.

Визначимо степінь $\boldsymbol{Q_n(x)}$. $P_n(x)=30x^2-5x$, отже поліном у правій частині має степінь $\boldsymbol{n=2}$, відповідно і поліном частинного розв'язку $\boldsymbol{Q_n(x)}$ теж має степінь $\boldsymbol{n=2}$:

$$Q_1(x)=Ax^2+Bx+C\ .$$

У правій частині $\alpha=0$ - збігається з одним із коренів характеристичного рівняння $k_1=0$, отже, показник степеня $\boldsymbol{x}$ у формулі частинного розв'язку $\boldsymbol{r=1}$.

Підсумком наших досліджень буде частинний розв'язок $y_{ч.н.}=Q_2(x)x=\left(Ax^2+Bx+C\right)x=Ax^3+Bx^2+Cx$.

Для визначення коефіцієнтів $\boldsymbol{A, B, C}$ полінома $\boldsymbol{Q_3(x)}$ знайдемо похідні розв'язку і підставимо до вихідного рівняння $y''-5y'=30x^2+5x$:

$$y'_{ч.н.}=\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)'=3Ax^2+2Bx+C;$$

$$y''_{ч.н.}=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)'=6Ax+2B;$$

$$6Ax+2B-5\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=30x^2+5x;$$

$$6Ax+2B-15Ax^2-10Bx-5C=30x^2+5x\ .$$

Зведемо подібні члени. Згрупуємо доданки за степенями $\boldsymbol{x}$:

$$-15Ax^2+x(6A-10B)+2B-5C=30x^2+5x\ .$$

За методом невизначених коефіцієнтів знайдемо $\boldsymbol{A, B}$ і $\boldsymbol{C}$ для полінома $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$. Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{cases} x^2:\ -15A=30; \\ x^1:\ 6A-10B=5; \\ x^0:\ 2B-5C=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-2; \\ -12-10B=5; \\ 2B-5C=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-2; \\ B=-\dfrac{17}{10}; \\ -\dfrac{34}{10}-5C=0; \end{cases} \quad \begin{cases} A=-2; \\ B=-\dfrac{17}{10}; \\ C=-\dfrac{34}{50}=-\dfrac{17}{25}. \end{cases}$$

Отже, $Q_2=-2x^2-\dfrac{17}{10}x-\dfrac{17}{25}$.

Частинний розв'язок, відповідно, буде

$$y_{ч.н.}=Q_2(x)=-2x^2-\frac{17}{10}x-\frac{17}{25}.$$

3. **Складемо** загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння:

$$y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}=C_1+C_2e^{5x}-\left(2x^2+\frac{17}{10}x+\frac{17}{25}\right);\ C_1,C_2-const.$$

► ***2. Права частина неоднорідного рівняння має вигляд***

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+R_m\sin\beta x\right). \qquad (3.16)$$

Тут $\boldsymbol{P_n(x), R_m(x)}$ – поліноми степеня відповідно $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{\alpha,\beta\in R,\ \ \alpha,\beta\neq 0}$.

У цьому разі частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_{ч.н.}=e^{\alpha x}(Q_l(x)\cos\beta x+\Phi_l(x)\sin\beta x)x^S,$$

де $\boldsymbol{Q_l(x), \Phi_l(x)}$ – невідомі поліноми степеня $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l=max(n,m)}$, $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ – дійсні числа, такі самі, як і у $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{s}$ – число, яке дорівнює кількості збігів коренів $\boldsymbol{k_1, k_2}$ характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння $ay''+by'+cy=0$ з числом $\boldsymbol{\alpha+i\beta}$. Оскільки в однорідного рівняння другого порядку можуть бути тільки два комплексно спряжених корені характеристичного рівняння і з цих коренів тільки один може збігатися з числом $\boldsymbol{\alpha + i\beta}$, то $\boldsymbol{s}$ може дорівнювати 0 або 1.

У побудованому частинному розв'язку невідомими є тільки поліноми $\boldsymbol{Q_l(x)}$ та $\boldsymbol{\Phi_l(x)}$. Для їх визначення підставимо розв'язок до рівняння (3.9). Перед цим знайдемо похідні $y'_{ч.н.}$; $y''_{ч.н.}$ і підставимо $y_{ч.н.}$; $y'_{ч.н.}$; $y''_{ч.н.}$ до вихідного неоднорідного рівняння. Порівняємо ліву і праву частини рівняння і ***методом невизначених коефіцієнтів*** знайдемо невідомі коефіцієнти поліномів $\boldsymbol{Q_l(x)}$ і $\boldsymbol{\Phi_l(x)}$.

Приклад 4

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 8y' + 20y = e^{4x}(2\cos x + 8\sin x).$$

Розв'язання

Дане рівняння – лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = e^{4x}(2\cos x + 8\sin x)$. Загальний розв'язок такого рівняння згідно з теоремою про структуру є $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

1. **Знайдемо** $y_{з.о.}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 8y' + 20y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 20 = 0$.

Розв'яжемо його: $k_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 20} = 4 \pm \sqrt{-4} = 4 \pm 2i$. Корені комплексні й спряжені, отже, частинними розв'язками будуть функції: $y_1 = e^{4x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{4x}\sin 2x$. Загальний розв'язок однорідного рівняння буде

$$y_{з.о.} = e^{4x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

2. **Знайдемо** $y_{ч.н.}$ - частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння.

Права частина рівняння $f(x) = e^{4x}(2\cos x + 8\sin x)$ типу $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m \sin\beta x)$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = e^{\alpha x}\left(Q_l(x)\cos\beta x + \Phi_l(x)\sin\beta x\right)x^S$.

Визначимо степінь $Q_l(x)$ і $\Phi_l(x)$:

$P_n(x) = 2$, отже, його степінь $\boldsymbol{n = 0}$, $R_m(x) = 8$, тож і його степінь $\boldsymbol{m = 0}$. Поліноми частинного розв'язку $Q_l(x)$ і $\Phi_l(x)$ теж мають степінь $\boldsymbol{l = 0}$:

$Q_0(x) = A;\quad \Phi_0(x) = B$.

У правій частині $\alpha = 4,\ \beta = 1$. Складемо з них число $\alpha + i\beta = 4 + i$. Це число не збігається з жодним із коренів характеристичного рівняння $k_{1,2} = 4 \pm 2i$, отже, показник степеня $\boldsymbol{x}$ у формулі частинного розв'язку $\boldsymbol{s = 0}$.

Підсумком наших досліджень буде частинний розв'язок $y_{ч.н.} = e^{4x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$.

Для визначення коефіцієнтів $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ із частинного розв'язку знайдемо його похідні й підставимо до вихідного рівняння $y'' - 8y' + 20y = e^{4x}\left(2\cos x + 8\sin x\right)$:

$$y'_{ч.н.} = \left(e^{4x}\left(A\cos x + B\sin x\right)\right)' = 4e^{4x}\left(A\cos x + B\sin x\right) +$$
$$+ e^{4x}\left(-A\sin x + B\cos x\right) = e^{4x}\left(\left(4A + B\right)\cos x + \left(4B - A\right)\sin x\right);$$

$$y''_{ч.н.} = \left(e^{4x}\left(\left(4A + B\right)\cos x + \left(4B - A\right)\sin x\right)\right)' =$$
$$= 4e^{4x}\left(\left(4A + B\right)\cos x + \left(4B - A\right)\sin x\right) + e^{4x}\left(-\left(4A + B\right)\sin x + \left(4B - A\right)\cos x\right) =$$
$$= e^{4x}\left(\left(16A + 4B + 4B - A\right)\cos x + \left(16B - 4A - 4A - B\right)\sin x\right) =$$
$$= e^{4x}\left(\left(15A + 8B\right)\cos x + \left(15B - 8A\right)\sin x\right).$$

Підставимо $y_{ч.н.}, y'_{ч.н.},\ y''_{ч.н.}$ у вихідне рівняння:

$$e^{4x}\left(\left(15A + 8B\right)\cos x + \left(15B - 8A\right)\sin x\right) -$$
$$- 8e^{4x}\left(\left(4A + B\right)\cos x + \left(4B - A\right)\sin x\right) +$$
$$+ 20e^{4x}\left(A\cos x + B\sin x\right) = e^{4x}\left(2\cos x + 8\sin x\right).$$

Оскільки $e^{4x} \neq 0$, скоротимо рівняння на цю величину.

Зведемо подібні члени. Згрупуємо доданки біля функцій ***cosx*** та ***sinx*:**

$$(15A+8B-32A-8B+20A)\cos x+$$
$$+(15B-8A-32B+8A+20B)\sin x=2\cos x+8\sin x,$$
$$3A\cos x+3B\sin x=2\cos x+8\sin x.$$

За методом невизначених коефіцієнтів знайдемо ***A*** і ***B*** для правої частини $y_{ч.н.}=e^{4x}(A\cos x+B\sin x)$. Порівняємо коефіцієнти при ***cosx*** та ***sinx*:**

$$\begin{cases}\cos x:\ 3A=2;\\ \sin x:\ 3B=8.\end{cases}\qquad \begin{cases}A=\dfrac{2}{3};\\ B=\dfrac{8}{3}.\end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок, відповідно, буде

$$y_{ч.н.}=e^{4x}\left(\frac{2}{3}\cos x+2\frac{2}{3}\sin x\right).$$

3. **Складемо** загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння:

$$y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}=e^{4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+$$
$$+e^{4x}\left(\frac{2}{3}\cos x+2\frac{2}{3}\sin x\right);\quad C_1,C_2-const.$$

До цієї самої категорії правих частин належать функції $\boldsymbol{f(x)}$:

$$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x;\quad f(x)=e^{\alpha x}R_n(x)\sin\beta x.$$

А також функції

$$f(x)=P_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x;$$
$$f(x)=P_n(x)\cos\beta x;$$
$$f(x)=R_n(x)\sin\beta x.$$

В останньому випадку у загальній формулі $\alpha=0,\ \beta\neq 0$.

3.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.2.1. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Узагальнимо теорію, розглянуту для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Означення

Лінійним неоднорідним рівнянням ***n-го порядку*** зі сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad (3.17)$$

де $\boldsymbol{f(x)}$ – довільна неперервна і диференційована в області свого визначення функція від змінної x; коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ – довільні сталі.

Структура загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння ***n-го*** порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.},$$

де $y_{з.н.}; y_{з.о.}; y_{ч.н.}$ мають той самий зміст, що й у попередньому параграфі.

Однорідне рівняння. Лінійним однорідним рівнянням ***n-го порядку*** зі сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (3.18)$$

Теорема про структуру розв’язку. Загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння (3.18) є лінійною комбінацією всіх лінійно незалежних частинних розв’язків даного рівняння. Тобто, якщо $\boldsymbol{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)}$ – лінійно незалежні частинні розв’язки (3.18), то його загальним розв’язком буде функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x), \qquad (3.19)$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n \in R - const$.

Розв’язок однорідного рівняння (3.18), як і в разі однорідного рівняння 2-го порядку (3.4), шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$. Характеристичне рівняння для рівняння ***n***-го порядку набере вигляду

$$a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,. \qquad (3.20)$$

Це рівняння має $\boldsymbol{n}$ коренів. Серед них можуть бути і дійсні різні корені, і кратні, і комплексні. Нехай характеристичне рівняння має $\boldsymbol{l < n}$ дійсних різних коренів (тобто $\boldsymbol{k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_l \in R}$), $\boldsymbol{m < n}$ кратних коренів (тобто $\boldsymbol{k_{l+1} = k_{l+2} = \ldots = k_{l+m} \in R}$) і $\boldsymbol{s < n}$ простих комплексно спряжених коренів ($\boldsymbol{l + m + s = n}$). Тоді загальний розв’язок (3.17) запишеться у вигляді

$$y_{o.o.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_l e^{k_l x} + e^{k_{l+1} x}\left(C_{l+1} + C_{l+2} x + C_{l+3} x^2 + \ldots + C_{l+m} x^{m-1}\right) +$$
$$+ e^{\alpha_1 x}\left(C_{l+m+1} \cos \beta_1 x + C_{l+m+2} \sin \beta_1 x\right) + \ldots +$$
$$+ e^{\alpha_s x}\left(C_{l+m+s-1} \cos \beta_s x + C_{l+m+s} \sin \beta_s x\right). \qquad (3.21)$$

Причому розв’язок матиме завжди рівно $\boldsymbol{n}$ сталих $\boldsymbol{C_i}$, $\boldsymbol{i = 1, \ldots, n}$.

Приклад

Знайти загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння

$$y^{(V)} - 2y^{(IV)} - 16y' + 32y = 0\,.$$

Розв’язання

Дане рівняння лінійне однорідне зі сталими коефіцієнтами 5-го порядку. Розв’язок шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$.

Характеристичне рівняння $k^5 - 2k^4 - 16k + 32 = 0$.

Розв’яжемо його:

$$k^4(k-2) - 16(k-2) = (k-2)\left(k^4 - 16\right) = 0\,,$$

$$k_1 = 2; \quad k^4 = 16; \quad k^2 = \pm 4; \quad k_{2,3} = \sqrt{4} = \pm 2; \quad k_{3,4} = \sqrt{-4} = \pm 2i\,.$$

Отже, маємо

► корені $k_1 = 2,\ k_2 = 2$ - дійсні корені кратності 2, отже відповідні їм частинні розв'язки будуть $y_1 = e^{2x}; \quad y_2 = xe^{2x}$;

► корінь $k_3 = -2$ - дійсний, отже відповідний йому частинний розв'язок буде $y_3 = e^{-2x}$;

► корені $k_4 = 2i,\ k_5 = -2i$ - комплексні спряжені, отже, відповідні їм частинні розв'язки будуть

$$y_4 = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x; \quad y_5 = e^{0x}\sin 2x = \sin 2x.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння буде

$$y_{з.о.} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x, \text{ або}$$

$$y_{з.о.} = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x;$$

$$C_i - const,\ i = 1,...,5.$$

Неоднорідне рівняння. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, як і для рівняння 2-го порядку, можна знаходити 2 методами.

1. Згідно із спеціальною правою частиною $\boldsymbol{f(x)}$. Метод побудови загального вигляду повністю збігається із аналогічним методом для рівнянь 2-го порядку.

2. Методом варіації сталої (метод Лагранжа). Згідно з цим методом:

а) знаходимо розв'язок однорідного рівняння (3.18). Загальний вигляд розв'язку – формула (3.21);

б) припускаємо, що в цьому розв'язку $\boldsymbol{C_i = C_i(x), \quad i = 1,...,n}$;

в) підставляємо розв'язок із змінними $\boldsymbol{C_i(x)}$ у рівняння (3.17);

г) припускаючи, що $C_1'y_1 + C_n'y_n + ... + C_n'y_n = 0$, робимо перетворення рівняння і приходимо до лінійної системи рівнянь відносно $\boldsymbol{C_i''(x), \quad i = 1,...,n}$:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + ... + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + ... + C_n'y_n' = 0, \\ .... \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + ... + C_n'y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n}. \end{cases}$$

Розв'язуємо її. Інтегруванням знаходимо значення $C_i(x) = \varphi(x, \overline{C_i}),\ i = 1,...,n$ і підставляємо ці значення до загального розв'язку однорідного рівняння (3.21).

3.2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

Серед множини диференціальних рівнянь вищих порядків, зокрема рівнянь другого порядку, існує доволі великий клас рівнянь, у яких тим чи іншим способом можна легко понизити порядок. Розрізняють декілька класів таких рівнянь. Розглянемо їх послідовно.

I. Диференціальні рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$

$\boldsymbol{f(x)}$ – неперервна диференційована функція в області свого визначення.

Таке рівняння розв'язується шляхом поступового інтегрування:

$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$

$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2;$ і. т. ін.

Приклад 1

Знайти загальний розв'язок (інтеграл) рівняння $y''' = x^2 + \cos(3x - 4).$

Розв'язання

Маємо рівняння 1-го типу – рівняння, розв'язане відносно старшої похідної, яке в правій частині має функцію, залежну

тільки від ***x***. Для отримання загального розв'язку цього рівняння необхідно послідовно проінтегрувати його 3 рази:
інтегруємо перший раз:

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(y''\right) \Rightarrow dy'' = y'''dx\,,$$

$$\int dy'' = \int \left(x^2 + \cos(3x-4)\right)dx; \quad y'' = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\sin(3x-4) + C_1\,,$$

$C_1 - const$;

інтегруємо другий раз:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(y'\right) \Rightarrow dy' = y''dx\,,$$

$$\int dy' = \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\sin\left(3x-4\right) + C_1\right)dx\,,$$

$$y' = \frac{x^4}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 3}\cos(3x-4) + C_1x + C_2; \quad C_1, C_2 - const\,;$$

інтегруємо третій раз:

$$y' = \frac{dy}{dx}\,,$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{12} - \frac{1}{9}\cos\left(3x-4\right) + C_1x + C_2\right)dx\,,$$

$$y = \frac{x^5}{12\cdot 5} - \frac{1}{9\cdot 3}\sin\left(3x-4\right) + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\,,$$

$C_1, C_2, C_3 - const$.

Отже, загальним розв'язком рівняння буде множина інтегральних кривих $y = \frac{x^5}{60} - \frac{1}{27}\sin\left(3x-4\right) + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$.

II. Диференціальні рівняння типу $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$.

У цих рівняння відсутня функція $\boldsymbol{y=y(x)}$ і *можливо* відсутні похідні до $(\boldsymbol{k\text{-}1})$***-і*** включно. В цьому разі порядок рівняння можна понизити заміною:

$$y^{(k)}(x) = z(x).$$

Приклад 2

Знайти загальний розв'язок (інтеграл) рівняння

$$x^2 y'' = (y')^2.$$

Розв'язання

Це рівняння не має змінної ***y***. Робимо заміну: $y' = z(x);\ y'' = z'$. Отже, отримане рівняння

$$x^2 z' = z^2 \ -$$

рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні, помноживши на $\dfrac{dx}{x^2 z^2}$, $\left(x^2 z^2 \neq 0\right)$. Отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}.$$

Інтегруємо $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2};\quad -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + C_1;\quad \frac{1}{z} = \frac{1 + xC_1}{x}$.

Згадаємо тепер, що $z = y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Тоді $\dfrac{dx}{dy} = \left.\dfrac{1 + xC_1}{x}\right| \cdot \dfrac{xdy}{1 + xC_1}$, $\left(1 + xC_1 \neq 0\right)$

$\dfrac{xdx}{\left(xC_1 + 1\right)} = dy$. Змінні відокремлені, можна інтегрувати:

$$\int \frac{xdx}{\left(xC_1 + 1\right)} = \int dy,$$

$$\frac{1}{C_1}\int\frac{(C_1x+1-1)\,dx}{(xC_1+1)}=y+C_2,$$

$$\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1}\int\frac{dx}{(xC_1+1)}=y+C_2,\quad \frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^{\,2}}\ln|xC_1+1|=y+C_2,$$

$C_1, C_2-const$.

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння буде

$$y=\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^{\,2}}\ln|xC_1+1|-C_2;\ \ C_1,C_2-const.$$

III. Диференціальні рівняння типу $F\left(y', y'',..., y^{(n)}\right)=0$.

У цих рівняннях відсутня незалежна змінна $\boldsymbol{x}$. У цьому разі порядок рівняння можна понизити заміною

$$y'=p(y);\quad y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p;$$

$$y'''=\frac{d}{dx}(p'p)=\frac{dp'}{dy}\frac{dy}{dx}p+p'\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p''p^2+(p')^2p.$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок (інтеграл) рівняння

$$2yy''=y'^2+1.$$

Розв'язання

У дане рівняння не входить $\boldsymbol{x}$. Робимо заміну

$$y'=p(y);\ y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p$$

і підставляємо до рівняння

$$2ypp'=p^2+1.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними відносно $\boldsymbol{p=p(y)}$.

Відокремимо змінні множником $\frac{dy}{y\left(p^2+1\right)}$; $y\neq 0$. Отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{2pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{2pdp}{p^2+1}=\int\frac{dy}{y};\quad \int\frac{d\left(p^2+1\right)}{p^2+1}=\int\frac{dy}{y};\quad \ln\left|p^2+1\right|=\ln|y|+\ln C_1,$$

або

$$\ln\left(p^2+1\right)=\ln\left|yC_1\right|;\quad p^2+1=yC_1;\quad p=\pm\sqrt{yC_1-1}.$$

Отже, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}\Rightarrow\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=dx;\quad \left(y>\frac{1}{C_1}\right).$

Змінні відокремлені, можна інтегрувати:

$$\int\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=\int dx;\quad \pm\frac{1}{C_1}\int\frac{d\left(C_1y-1\right)}{\sqrt{C_1y-1}}=x+C_2,$$

$$\pm\frac{1}{C_1}\frac{\left(C_1y-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=x+C_2;\quad 2\left(C_1y-1\right)^{\frac{1}{2}}=\pm C_1\left(x+C_2\right).$$

Або $4\left(C_1y-1\right)=C_1{}^2\left(x+C_2\right)^2,\quad C_1,C_2-const$.

IV. Диференціальні рівняння $F\left(x,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$, які не змінюються заміною $y,y',...,y^{(n)}$ на $ty,ty',...,ty^{(n)}$, називаються ***однорідними***.

Порядок таких рівнянь знижується підстановкою $y'=yz$, де $\boldsymbol{z=z(x)}$ є нова невідома функція.

Приклад

Знайти загальний розв'язок (інтеграл) рівняння

$$xy\,y'' - xy'^2 = yy'.$$

Розв'язання

Диференціальне рівняння другого порядку має всі змінні: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y, y', y''}$. Щоб визначитися з типом рівняння, підставимо у нього замість $y - ty,\quad y' - ty',\quad y'' - ty''$. Отримаємо

$$xtyty'' - x(ty')^2 = tyty' \Rightarrow\ t^2\left(xyy'' - xy'^2\right) = t^2(yy')\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xyy'' - xy'^2 = yy'.$$

Тобто рівняння від заміни не змінилося, отже, дане рівняння – однорідне відносно $\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y'},\ \boldsymbol{y''}$.

Вводимо заміну

$$y' = y(x)\cdot z(x);\qquad y'' = y'\cdot z + y\cdot z' = y\cdot z\cdot z + y\cdot z' =$$

$$= y\cdot z^2 + y\cdot z' = y\left(z^2 + z'\right).$$

Підставимо отримані похідні до рівняння

$$xyy\left(z^2 + z'\right) - x(yz)^2 = y(yz);\quad xy^2\left(z^2 + z'\right) - xy^2z^2 = y^2z.$$

За умови $y \neq 0$ рівняння можна скоротити на y^2.

$$x\left(z^2 + z'\right) - xz^2 = z;\quad x\left(z^2 + z' - z^2\right) = z;$$

$$z'x = z; \Rightarrow \frac{dz}{dx}x = z \text{ або } \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x};\quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 = \ln|xC_1|,\quad C_1 = const.$$

Потенціюємо: $z = xC_1$.

Згадаємо, що $y' = y(x)\cdot z(x)$.

Отже, $\dfrac{dy}{dx} = yxC_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = C_1xdx \Rightarrow \displaystyle\int\frac{dy}{y} = C_1\int xdx$,

$$\ln|y| = C_1\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) \Rightarrow \ln|y| = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2; \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x^2},$$

$C_1, C_2 - const$.

Відповідь

Загальним розв'язком вихідного рівняння є множина інтегральних кривих $y = C_2 e^{C_1 x^2}$, $C_1, C_2 - const$.

§ 4. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

4.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Розглянемо множину диференціальних рівнянь, кожне з яких зв'язує незалежну змінну x, декілька невідомих функцій від змінної $\boldsymbol{x}$ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ та похідні цих функцій довільного порядку.

Означення 1

Системою звичайних диференціальних рівнянь (системою ДР) називається множина диференціальних рівнянь, які мають спільні розв'язки.

Означення 2

Системою n диференціальних рівнянь 1-го порядку називається система вигляду

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) = 0; \\ F_2\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

де $\boldsymbol{x}$ – незалежна змінна;

y_i, $i = \overline{1, n}$ – шукані невідомі функції;

F_i, $i=\overline{1,n}$ – відомі співвідношення.

Означення 3

Система ДР (4.1) називається нормальною, якщо її можна розв'язати відносно похідних кожної з невідомих функцій y_i, $i=\overline{1,n}$, тобто подати її у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1\left(x\right), y_2\left(x\right), ..., y_n\left(x\right)\right); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1\left(x\right), y_2\left(x\right), ..., y_n\left(x\right)\right); \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1\left(x\right), y_2\left(x\right), ..., y_n\left(x\right)\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

Кожна з функцій $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ визначена на деякому інтервалі $X_i \subseteq R$.

Об'єднанням всіх $X_i \subseteq R$, $i=\overline{1,n}$ є деякий інтервал $(a,b)=\bigcup\limits_{i=\overline{1,n}} X_i \subseteq R$, який є ***інтервалом визначення системи ДР***.

Функції $f_i(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$, $i=\overline{1,n}$ є функціями $(n+1)$-ї змінної і визначаються точками у $(n+1)$ – вимірному просторі R^{n+1}.

Множина точок визначення функцій $f_i(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ становить відкриту ***область визначення*** $D \in R^{n+1}$ ***системи ДР.***

Означення 4

Система (4.2) називається лінійною, якщо $f_i\left(x, y_1\left(x\right), y_2\left(x\right), ..., y_n\left(x\right)\right)$, $i=\overline{1,n}$ є лінійними функціями від невідомих $y_i\left(x\right)$, $i=\overline{1,n}$, тобто якщо систему (4.2) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_{11}(x)\,y_1(x) + f_{12}(x)\,y_2(x) + \ldots + f_{1n}(x)\,y_n(x) + f_1(x); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_{21}(x)\,y_1(x) + f_{22}(x)\,y_2(x) + \ldots + f_{2n}(x)\,y_n(x) + f_2(x); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_{n1}(x)\,y_1(x) + f_{n2}(x)\,y_2(x) + \ldots + f_{nn}(x)\,y_n(x) + f_n(x). \end{cases} \tag{4.3}$$

де $f_{ij}(x),\ i = \overline{1,n};\quad j = \overline{1,n}$ – відомі функції змінної x.

Означення 5

Система ДР (4.3) називається автономною (стаціонарною), якщо праві частини всіх рівнянь явно не залежать від змінної x:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big). \end{cases} \tag{4.4}$$

Означення 6

Розв’язком системи ДР (4.2) на інтервалі $(a,b) \subseteq R$ називається сукупність функцій

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x), \tag{4.5}$$

визначених і неперервних на цьому інтервалі, якщо підстановка даної сукупності до системи (4.2) перетворює ***кожне з рівнянь системи*** на тотожність для будь - якого $x \in (a,b)$.

Процес знаходження сукупності функцій розв’язку системи $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ називається ***інтегруванням системи (4.2)***.

Задача Коші для систем ДР сформулюється так.

Для заданої точки $x_0 \in (a,b)$ знайти таку сукупність функцій (4.5), яка задовольняє умови:

$$y_{10} = \varphi_1(x_0),\ y_{20} = \varphi_2(x_0), \ldots, y_{n0} = \varphi_n(x_0). \tag{4.6}$$

Умови (4.6) називаються ***початковими умовами задачі Коші***. Значення $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ задаються одночасно з точкою $x_0 \in (a,b)$ і називаються ***початковими значеннями задачі Коші***.

Теорема Коші (існування розв'язку системи ДР)

Нехай задані нормальна система ДР (4.2) та початкові умови (4.6). І нехай функції $f_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)),\ i = \overline{1,n}$ системи (4.2) визначені й неперервні в деякій відкритій області ***D***, яка містить точку $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$.

За таких умов система (4.2) ***завжди має розв'язок***.

У випадку, коли функції $f_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)),\ i = \overline{1,n}$ мають неперервні частинні похідні

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial y_j},\quad i = 1, \ldots, n;\quad j = 1, \ldots, n,$$

то розв'язок ***єдиний***.

Означення 7

Загальним розв'язком системи ДР (4.2) на інтервалі $(a,b) \subseteq R$ називається сукупність функцій

$$\begin{Bmatrix} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n); \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n); \end{Bmatrix}, \tag{4.7}$$

яка задовольняє дві умови:

1) при довільних фіксованих сталих $\{C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}\}$ сукупність (4.7) є розв'язком системи (4.2);

2) будь - який частинний розв’язок (4.2) можна отримати з (4.7) за певних значень сталих $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$.

Розв’язки системи (4.2), у кожній точці яких порушуються умови теореми Коші, називаються ***особливими розв’язками.***

4.2. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ДР ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Означення 1

Лінійною системою ДР зі сталими коефіцієнтами називається система вигляду

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + ... + a_{1n}y_n(x) + f_1(x); \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + ... + a_{2n}y_n(x) + f_2(x); \\ .... \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + ... + a_{nn}y_n(x) + f_n(x); \end{cases} \tag{4.8}$$

де a_{ij}, $i = \overline{1, n}$ – дійсні числа; $f_i(x)$ – відомі неперервні функції на інтервалі визначення системи (a, b).

Означення 2

Лінійна системою ДР зі сталими коефіцієнтами (4.8) називається ***однорідною***, якщо всі функції $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ у правій частині системи ***тотожно дорівнюють 0***. Тобто лінійна однорідна система ДР зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + ... + a_{1n}y_n(x); \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + ... + a_{2n}y_n(x); \\ .... \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + ... + a_{nn}y_n(x). \end{cases} \tag{4.9}$$

Для інтегрування системи (4.9) застосуємо метод зведення системи ДР до лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами від одного невідомого. Перевага цього методу в тому, що однорідні й неоднорідні системи зводяться до одного рівняння за однією схемою. В першому разі отримаємо однорідне рівняння, в іншому – неоднорідне. Методи розв’язання обох рівнянь нам відомі з попереднього матеріалу.

Не порушуючи загальної теорії, для прикладу візьмемо систему з трьох ДР:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + f_1(x); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + f_2(x); \\ \dfrac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + f_3(x). \end{cases} \tag{4.10}$$

Візьмемо за невідому функцію $y_1(x)$. Зведемо систему (4.10) до ДР ***3***-го порядку. Для цього візьмемо похідну від першого рівняння:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + f_1(x);$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = a_{11}\frac{dy_1}{dx} + a_{12}\frac{dy_2}{dx} + a_{13}\frac{y_3}{dx} + f_1'(x).$$

Замінимо у другому рівнянні $\dfrac{dy_1}{dx}; \dfrac{dy_2}{dx}; \dfrac{dy_3}{dx};$ правими частинами із системи (4.10):

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = a_{11}\left(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + f_1(x)\right) +$$
$$+a_{12}\left(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + f_2(x)\right) +$$
$$+a_{13}\left(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + f_3(x)\right) + f_1'(x).$$

Зробимо перетворення:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\underbrace{\left(a_{11}{}^2+a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}\right)}_{A_1}y_1+\underbrace{\left(a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{32}\right)}_{A_2}y_2+$$

$$+\underbrace{\left(a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}+a_{13}a_{33}\right)}_{A_3}y_3+\underbrace{\left(a_{11}f_1+a_{12}f_2+a_{13}f_3+f_1'\right)}_{g_1(x)}.$$

Перепозначимо числові коефіцієнти:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3+g_1(x).$$

Продиференціюємо отримане рівняння:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=A_1\frac{dy_1}{dx}+A_2\frac{dy_2}{dx}+A_3\frac{dy_3}{dx}+g_1'(x).$$

Знову підставимо для похідних вирази з правих частин системи (4.10) Виконавши перетворення, подібні до попередніх, отримаємо

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=B_1y_1+B_2y_2+B_3y_3+w_1(x).$$

Отже, отримали систему

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+f_1(x);\\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2}=A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3+g_1(x);\\ \dfrac{d^3y_1}{dx^3}=B_1y_1+B_2y_2+B_3y_3+w_1(x).\end{cases}\qquad(4.11)$$

З перших двох рівнянь знайдемо вирази для y_2, y_3 через $x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$, тобто розв’яжемо систему:

$$\begin{cases}a_{12}y_2+a_{13}y_3=y_1'-a_{11}y_1-f_1(x);\\ A_2y_2+A_3y_3=y_1''-A_1y_1-g_1(x).\end{cases}\qquad(4.12)$$

Підставимо отримані вирази для y_2, y_3 у третє рівняння системи (4.11) й отримаємо рівняння

$$y_1''' + L_1 y_1'' + L_2 y_1' + L_3 y_1 = \Phi(x), \tag{4.13}$$

де L_i, $i = 1,...,3$ - дійсні числа; $\Phi(x)$ - відома функція.

Рівняння (4.13) – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами 3-го порядку. Методи знаходження розв'язку такого рівняння відомі з попереднього матеріалу. Знаходимо його загальний розв'язок: $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, C_3)$, а потім, підставивши його у систему (4.12), знайдемо розв'язки для $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, C_3)$ та $y_3 = \varphi_3(x, C_1, C_2, C_3)$.

Приклад 1

Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язання

Дана система – однорідна система двох ДР відносно змінних функцій $x(t)$ та $y(t)$. За незалежну змінну взято змінну t.

Зведемо систему до лінійного однорідного рівняння 2-го порядку відносно y:

$$y' = 3x + 4y; \quad y'' = 3x' + 4y' = 3(2x + y) + 4(3x + 4y) = 18x + 19y,$$

отже,

$$\begin{cases} y' = 3x + 4y; \\ y'' = 18x + 19y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{y' - 4y}{3}; \\ y'' = 6y' - 24y + 19y = 6y' - 5y. \end{cases}$$

Отримали однорідне рівняння 2-го порядку відносно змінної y:

$$y'' - 6y' + 5y = 0.$$

Розв'яжемо його.

Форма розв'язку – $y = e^{kt}$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 5 = 0$.

Корені: $k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ - дійсні, різні. Отже, $y_1 = e^t$; $y_2 = e^{5t}$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$; $C_1, C_2 - const$.

Підставимо його до співвідношення для x:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \qquad y' = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}$$

$$x = \frac{C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 4\left(C_1 e^t + C_2 e^{5t}\right)}{3} = \frac{-3C_1 e^t + C_2 e^{5t}}{3} = -C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{5t}$$

Загальний розв'язок вихідної системи буде

$$\begin{cases} x = -C_1 e^t + \dfrac{1}{3} C_2 e^{5t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \end{cases}.$$

Якщо $\overline{C}_2$ покласти такою, що дорівнює $3C_2$, то

$$\begin{cases} x = -C_1 e^t + \overline{C}_2 e^{5t} \\ y = C_1 e^t + 3\overline{C}_2 e^{5t} \end{cases}, \; C_1, \overline{C}_2 - const.$$

Приклад 2

Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання

Дана система – однорідна система двох ДР відносно змінних функцій $x(t)$ та $y(t)$. За незалежну змінну взято змінну t.

Зведемо систему до лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку відносно змінної y:

$$y' = x + 2y;$$

$$y'' = x' + 2y' = 3x + 2y + 4e^{5t} + 2\left(x + 2y\right) = 5x + 6y + 4e^{5t},$$

отже,

$$\begin{cases} y' = x + 2y; \\ y'' = 5x + 6y + 4e^{5t}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y' - 2y; \\ y'' = 5y' - 10y + 6y + 4e^{5t} = 5y' - 4y + 4e^{5t}. \end{cases}$$

Отримали неоднорідне рівняння 2-го порядку відносно змінної y:

$$y'' - 5y' + 4y = 4e^{5t}.$$

Розв'яжемо його.

Структура розв'язку: $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

I. Знайдемо $y_{з.о.}$.

Форма розв'язку - $y = e^{kt}$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$.

Корені: $k_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$ - дійсні, різні. Отже, $y_1 = e^t$; $y_2 = e^{4t}$.

Загальний розв'язок $y_{з.о.} = C_1 e^t + C_2 e^{4t}$; $C_1, C_2 - const$.

II. Знайдемо $y_{ч.н.}$.

Права частина рівняння $f(t) = 4e^{5t}$. Загальний вигляд - $f(t) = P_n e^{\alpha t}$.

Тут $\alpha = 5$, $P_n = 4 \Rightarrow n = 0$.

У цьому випадку частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = Q_0 e^{5t} t^0 = Ae^{5t}$; $r = 0$, тому що $\alpha = 5$ не збігається з коренями характеристичного рівняння.

$$y'_{ч.н.} = 5Ae^{5t}; \quad y''_{ч.н.} = 25Ae^{5t}.$$

Підставимо $y_{ч.н.}, y''_{ч.н.}, y''_{ч.н.}$ до неоднорідного рівняння:

$$25Ae^{5t} - 5\left(5Ay^{5t}\right) + 4 \cdot Ae^{5t} = 4e^{5t}; \qquad 4A = 4; \qquad A = 1.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд $y_{ч.н.} = e^{5t}$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y_{з.н.}=C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t}$, $C_1,C_2-const$.

III. Продовжимо розв'язувати систему.

Отримали загальний розв'язок для змінної y. Підставимо його до співвідношення для x:

$$y=C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t},\ y'=C_1e^t+4C_2e^{4t}+5e^{5t},$$

$$x=C_1e^t+4C_2e^{4t}+5e^{5t}-2\left(C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t}\right)=-C_1e^t+2C_2e^{4t}+3e^{5t}.$$

Загальний розв'язок вихідної системи буде

$$\begin{cases}x=-C_1e^t+2C_2e^{4t}+3e^{5t}\\ y=C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t}\end{cases}.$$

РОЗДІЛ 5. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1;\,u_2;\,u_3;\,...;\,u_n;...$.

Якщо кожний елемент послідовності можна отримати як деяку одну й ту саму функцію від номера цього елемента $u_n=f(n);\ n\in N$, то кажуть, що заданий **загальний член послідовності.**

Розглянемо суму всіх елементів числової послідовності:

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ . \qquad (5.1)$$

Таку суму нескінченної кількості елементів числової послідовності називають **нескінченним числовим рядом,** а елементи числової послідовності, з яких склався ряд, називають **членами числового ряду.** Функція, яка ставить у відповідність номер члена ряду і його числове значення $u_n = f(n)$; $n \in N$, задає нам **загальний член числового ряду.**

Наприклад, числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

є рядом усім відомої геометричної прогресії з першим членом $\boldsymbol{a}$ та знаменником $\boldsymbol{q}$.

Другий приклад – ряд, який має загальний член, заданий функцією $u_n = \frac{1}{n^k}$, $k \in R$. Ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots$$

і носить назву **узагальненого гармонічного ряду.**

Щоб задати числовий ряд, достатньо задати його загальний член формулою $u_n = f(n)$.

Іноді ряд задають першими декількома членами і на базі аналізу цих членів ряду виявляють закономірність та знаходять залежність значення члена ряду від його номера, тобто **будують загальний член ряду**.

Наприклад, ряд заданий своїми першими чотирма членами

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \ldots$$

Знайти загальний член ряду.

Розглянемо члени ряду:

$$u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2^1};\ u_2 = \frac{1}{2 \cdot 2^2};\ u_3 = \frac{1}{3 \cdot 2^3};\ u_4 = \frac{1}{4 \cdot 2^4}.$$

Бачимо, що у чисельнику завжди стоїть 1, а у знаменнику – добуток номера члена ряду на 2 у степені, що збігається з номером члена ряду, тобто для $\boldsymbol{u_n}$ буде правильним: $u_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Відповідно, ряд матиме вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} .$$

Величина

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{5.2}$$

називається n**-ю частковою сумою** ряду. Наприклад, для $n = 2$ $S_2 = u_1 + u_2$, для $n = 3$ $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S , \tag{5.3}$$

то ряд (2.1) називається **збіжним**, а число S – його сумою і позначається

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \tag{5.4}$$

Якщо ж границя не існує або нескінченна, то кажуть, що ряд (5.1) **розбіжний.**

Величина

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots \tag{5.5}$$

називається n-м ***залишком*** ряду.

Приклад

Дослідити збіжність ряду геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$.

Розв'язання

Зі шкільного курсу математики відомо, що сума $\boldsymbol{n}$ членів геометричної прогресії з першим членом a та знаменником $\boldsymbol{q \neq 1}$ обчислюється за формулою

$$S_n = \frac{a\left(1 - q^n\right)}{1 - q} .$$

Ця сума є n-ю частковою сумою для ряду геометричної прогресії. Отже, щоб дослідити збіжність даного ряду, необхідно знайти границю цієї часткової суми і визначити, скінченна вона чи ні:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = a\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) =$$

$$= a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-q} - a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}.$$

Отже, бачимо, що границя залежить від останнього доданка і, відповідно, від значення q.

Розглянемо 4 випадки:

1. $|q|<1$. У цьому разі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=0$, границя часткової суми скінченна і дорівнює

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Зі шкільного курсу ця формула відома як сума членів нескінченної спадної геометричної прогресії.

2. $|q|>1$. В цьому разі $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, отже, і

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} - a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \infty = \infty,$$

тобто за $|q|>1$ ряд розбіжний.

3. $q=1$. Маємо $S_n = \underbrace{a+a+a+\dots+a}_{n} = n\cdot a$, отже,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot a = \infty.$$

Отже, для $q=1$ ряд розбігається.

4. $q=-1$. Маємо $S_n = \underbrace{a-a+a-\dots+a}_{n}$, в цьому разі, якщо n – парне, то часткова сума дорівнює **0**, а якщо n непарне, то

$S_n = a$. Маємо різні границі для різних умов. У цьому разі $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує. Ряд – розбіжний.

Висновок. Ряд геометричної прогресії є збіжним тільки для $|q| < 1$***. В цьому разі***

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

У всіх інших випадках ряд геометричної прогресії **розбіжний**.

Властивості збіжних числових рядів

Розглянемо числовий ряд (5.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{S_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots}_{R_n}$$

Використовуючи означення та формули (5.2) і (5.5), цей ряд можна подати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_k = S_n + R_n, \tag{5.6}$$

де S_n - часткова сума ряду, складається із скінченної кількості елементів ряду; R_n - залишок, нескінченна сума елементів ряду.

Властивість 1

Якщо ряд (5.1) збігається, то збігається і його залишок $\boldsymbol{R_n}$. І навпаки, якщо збігається залишок $\boldsymbol{R_n}$, то збігається і ряд (5.1)

Виходячи з властивості 1, можна записати теорему.

Теорема

Для збіжності ряду (5.1) необхідно й достатньо, щоб за умови $n \to \infty$ залишок ряду R_n прямував до 0, тобто

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Властивість 2

Якщо члени збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ із сумою $\boldsymbol{S}$ помножити на константу C, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ теж буде збіжним, його сума дорівнює $\boldsymbol{CS}$.

Властивість 3

Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються, то збігаються і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$, і його сума $S = S_1 + S_2$, *де* $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$; $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Задача дослідження збіжності числових рядів із застосуванням теорії границь до часткової суми ряду або до його залишку є задачею досить складною. Простіше для такого дослідження використовувати **ознаки збіжності числових рядів.** Такі ознаки можна розділити на **необхідну** та **достатні** ознаки. Причому **необхідна** ознака використовується для дослідження **будь-якого числового ряду**. **Достатні умови** залежать від **властивостей членів** числового ряду, який досліджується.

§ 2. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВОГО РЯДУ. ГАРМОНІЧНИЙ РЯД

Розглянемо довільний числовий ряд (5.1).

Теорема (необхідна ознака збіжності числового ряду)

Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то його загальний член $u_n \to 0$ за умови $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 . \tag{5.7}$$

Доведення

Зауважимо, що $\boldsymbol{n}$-й член ряду можна отримати як різницю між n-ю та $n+1$-ю частковими сумами:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Якщо ряд збіжний, то за означенням $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Наслідок

Якщо умова (5.7) не виконується, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то будь - який числовий ряд вигляду (5.1) **розбігається.**

Приклади

Перевірити виконання необхідної ознаки для таких рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n, |q|<1,$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+4}{5-n^2}$.

Розв'язання

а) Як було показано вище, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n, |q|<1$ є збіжним.

Розглянемо його загальний член: $u_n = aq^n$, причому $|q|<1$. За таких умов $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Тобто необхідна умова збіжності ряду виконується.

б) Загальний член ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+4}{5-n^2}$ є $\dfrac{2n^2+4}{5-n^2}$.

Необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+4}{5-n^2} = -2 \neq 0$, отже, умова (5.7) не виконується. Відповідно, цей ряд не може бути збіжним.

Вище був наведений приклад узагальненого гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k} = 1 + \dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{3^k} + \dots$ із загальним членом $u_n = \dfrac{1}{n^k}$.

Розглянемо, як виконується необхідна умова для цього ряду при різних k.

►Якщо $k<0$**:** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-k}$**,** $-k>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^{-k} = \infty$ – необхідна умова не виконується, тобто такий ряд **однозначно розбіжний** (відповідно до наслідку з теореми).

►Якщо $k>0$**:** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$ - необхідна умова виконується, тобто є можливість того, що узагальнений гармонічний ряд є збіжним для будь - якого $k>0$.

Розглянемо цей ряд для $k=1$, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$.

Такий ряд носить назву **гармонічного ряду.**

Побудуємо для цього ряду дві часткові суми:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

та $S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$.

Якщо ряд збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Дослідимо виконання цієї умови для гармонічного ряду:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}.$$

Сума має n доданків. Кожний доданок, крім останнього в отриманій сумі, більший за $\frac{1}{2n}$. Отже,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}.$$

Отримали, що $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$.

Розглянемо граничне значення нерівності за умови $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S > \frac{1}{2}, \text{ або } 0 > \frac{1}{2}$$

отримали суперечливість.

Отже, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ є розбіжним, незважаючи на те, що **необхідна умова збіжності виконана.**

Остаточний висновок про збіжність ряду можна зробити тільки після перевірки **виконання достатніх ознак збіжності ряду.**

Наприкінці розділу 1 було зауважено, що достатні ознаки залежать від властивостей загального члена ряду u_n. Тому будемо розглядати ряди відповідно до властивостей їх загальних членів, починаючи з найпростіших рядів.

§ 3. ЧИСЛОВІ ЗНАКОПОЗИТИВНІ РЯДИ. ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОПОЗИТИВНИХ РЯДІВ

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, у якого всі члени невід'ємні, тобто $u_n \geq 0$, називається **рядом з невід'ємними (знакопозитивними) членами, або знакопозитивним рядом.**

Достатні ознаки збіжності знакопозитивних рядів.

1. Радикальна ознака Коші

Розглянемо ряд (5.1) з невід'ємними членами. Вважаємо, що для загального члена ряду u_n виконується необхідна умова збіжності (5.7). Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l, \text{ то при } \begin{cases} l < 1, & \text{ряд збіжний,} \\ l > 1, & \text{ряд розбіжний,} \\ l = 1, & \text{потрібно скористатись} \\ & \quad \text{іншим критерієм.} \end{cases} \tag{5.8}$$

Приклад 1

Дослідити збіжність рядів: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n}{3n-1}\right)^{2n}$ та б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n^2-1}\right)^{n}$.

Розв'язання

а) $u_n=\left(\frac{7n}{3n-1}\right)^{2n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n}{3n-1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n}{3n-1}\right)^{2}=$

$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{3n-1}\right)^{2}=\left(\frac{7}{3}\right)^{2}=\frac{49}{9}>1$ – за радикальним критерієм Коші ряд розбіжний;

б) $u_n=\left(\frac{3n+1}{3n^2-1}\right)^{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{3n^2-1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n^2-1}\right)=0<1$

- за радикальним критерієм Коші ряд збіжний.

2. Інтегральна ознака Коші

Розглянемо ряд (5.1) з невід'ємними членами такими, що $u_1\ge u_2\ge u_3\ge\ldots\ge u_n\ge\ldots$. Вважаємо, що для загального члена ряду u_n виконується необхідна умова збіжності (5.7).

Загальний член ряду u_n можемо розглядати як функцію від дискретної змінної $n=1,2,\ldots$ $u_n=f(n)$. Поширимо цю функцію на всі дійсні значення $x\in[1;\infty)$ і розглянемо невласний інтеграл

$$\int_{1}^{\infty}f(x)dx, \tag{5.9}$$

де $f(n)=u_n$.

Тоді ***для збіжності знакопозитивного ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ***необхідною і достатньою умовою є збіжність невласного інтеграла*** $\int_{1}^{\infty}f(x)dx$, тобто

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx = A - const .$$

Приклад 2

Перевіримо інтегральну ознаку Коші на узагальненому гармонічному ряді для усіх k, для яких виконалася необхідна умова збіжності ряду, тобто розглядаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ для $k>0$.

Загальному члену $u_n = \frac{1}{n^k}$ відповідає функція $f(x) = \frac{1}{x^k}$, $x \in [1,\infty)$.

Дослідимо на збіжність відповідний невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-k+1}}{-k+1} - \frac{1}{-k+1}.$$

Аналізуємо отримане граничне значення для різних k:

а) $0<k<1$;

$k<1 \Rightarrow -k+1>0 \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-k+1}}{-k+1} = \frac{1}{-k+1}\lim_{b\to\infty}b^{-k+1} = \infty;$ отже,

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^k} = \infty$ - інтеграл розбіжний.

Згідно з інтегральною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ для $0<k<1$ теж **розбіжний.**

б) $k=1$;

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^1} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln(b) - \ln 1 = \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty -$ інтеграл розбіжний.

Згідно з інтегральною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ для $k=1$ теж **розбіжний.** Даний висновок збігається з висновком безпосереднього аналізу гармонічного ряду на збіжність, який був проведений у попередньому розділі.

в) $k>1$;

$$k>1 \Rightarrow -k+1<0 \Rightarrow k-1>0 \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-k+1}}{-k+1}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{(-k+1)b^{k-1}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-k+1}}{-k+1}-\frac{1}{-k+1}=\frac{1}{k-1}-const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^k}=\frac{1}{k-1}-const \Rightarrow$$ невласний інтеграл збіжний.

Згідно з інтегральною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ для $k>1$ теж **збіжний.**

Висновок

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ **збігається** $\forall k>1$ і є **розбіжним** $\forall k\le 1$.

3. Критерій Даламбера

Розглянемо ряд (5.1) з невід'ємними членами. Вважаємо, що для загального члена ряду u_n виконується необхідна умова збіжності (5.7). Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\text{, то при }\begin{cases} l<1, & \text{ряд збіжний,}\\ l>1, & \text{ряд розбіжний,}\\ l=1, & \text{потрібно скористатись}\\ & \quad\text{іншим критерієм.}\end{cases} \tag{5.10}$$

Приклад 3

Дослідити збіжність рядів: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$ та б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.

Даний ряд має $u_n=\frac{n(n+1)}{3^n}$; $u_{n+1}=\frac{(n+1)(n+1)}{3^{n+1}}$. Розглянемо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(n+1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{3\cdot(n^2+n)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{n^2+n}=\frac{1}{3}<1 \text{ – ряд збіжний.}$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

$$u_n=\frac{n^n}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n!(n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.7>1 \text{ - ряд розбіжний.}$$

4. Порівняльна ознака у граничній формі

Нехай задані два ряди з невід'ємними членами

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя відношення їх загальних членів

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k-const;\; k\neq 0, \tag{5.11}$$

то ці обидва ряди **збігаються або розбігаються одночасно.**

Приклад 4

Дослідити збіжність рядів: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}$.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 5^n}$.

Порівняємо даний ряд з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Про цей ряд відомо, що він збіжний. Розглянемо границю відношення загальних членів цих двох рядів:

$u_n=\frac{1}{n^3 5^n}$; $v_n=\frac{1}{n^3}$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3 5^n}\cdot\frac{n^3}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n}=0-const$ - отже, за порівняльною ознакою у граничній формі вихідний ряд збігається як і узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}$;

Для дослідження цього ряду за порівняльний ряд потрібно взяти гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Про нього нам відомо, що він розбіжний.

$u_n=\frac{2n^2+5}{n^3}$; $v_n=\frac{1}{n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}\cdot\frac{n}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n}{n^3}=2-const$ - отже, за порівняльною ознакою у граничній формі вихідний ряд розбігається, як і гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

§ 4. ЗНАКОПОЧЕРЕЖНІ РЯДИ

Означення

Знакопочережним рядом називається числовий ряд (5.1), члени якого мають **по черзі додатний та від'ємний знаки**. Такий ряд можна записати так:

$u_1-u_2+u_3-u_4+\text{.....}+(-1)^{n-1}u_n+\text{...},\quad u_n>0,\ n\in N$, або

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\quad u_n>0\,. \tag{5.12}$$

Приклад 1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\text{...}$ – знакопочережний ряд, тому що члени ряду по черзі є додатними і від'ємними.

Загальний член ряду дорівнює $(-1)^{n-1}u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$, $u_n=\frac{1}{n^2}$.

Для дослідження таких рядів на збіжність застосовують дві теореми.

Теорема 1 (ознака Лейбніца)

Якщо абсолютні величини членів знакопочережного ряду строго монотонно спадають, тобто

$u_1>u_2>u_3>\text{...}>u_n>\text{...}$,

і границя загального члена такого ряду дорівнює 0, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

то такий знакопочережний ряд **збігається**, причому **його сума не перевищує першого члена ряду:**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \le u_1 .$$

Приклад 2

Дослідити збіжність числових знакопочережних рядів

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}; \quad \text{та} \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right).$$

Розв'язання

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$ - ряд знакопочережний.

Застосуємо до ряду критерій Лейбніца:

1) абсолютні значення членів ряду монотонно спадають:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots;$$

2) загальний член ряду прямує до нуля

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Отже, ряд $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ збігається;

$$б) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \dots$$

1. Абсолютні значення членів ряду становитимуть послідовність:

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$;...; $\frac{1}{\sqrt{n}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ – ця послідовність не є спадною, оскільки якщо згадати навіть приблизні значення $\sqrt{2} \approx 1.4$; $\sqrt{3} \approx 1.7$, то матимемо:

$$u_1 = \frac{1}{0,4} = \frac{10}{4} \approx 2,5; \qquad u_2 = \frac{1}{2,4} \approx 0,42; \qquad u_3 = \frac{1}{0,7} = \frac{10}{7} \approx 1,4;$$

$u_4 = \frac{1}{2,7} \approx 0,37$, тобто $u_1 > u_2 < u_3 > u_4 ...$ - монотонності немає.

Загальний член ряду прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}+1}{\left(\sqrt{n}-1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n-1}\right) = 0.$$

Отже, перша з двох умов не виконується, абсолютні значення членів ряду не спадають монотонно – ряд розбіжний.

Наслідок з ознаки Лейбніца

Абсолютна величина похибки $|R_n|$, яка виникає із заміною суми цього ряду S на часткову суму S_n, не перевищує абсолютної величини першого відкинутого члена ряду:

$$|S - S_n| = |R_n| \le |u_{n+1}|. \qquad (5.13)$$

Цей наслідок використовують для наближеного обчислення знакопочережних рядів.

Приклад 3

Яку кількість членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ необхідно взяти до частинної суми для того, щоб обчислити ряд із точністю до 0.001?

Розв'язання

За умовою $\left|R_n\right| < 0,001$. З урахуванням наслідку із ознаки Лейбніца можна записати

$$\left|u_{n+1}\right| \le 0,001, \qquad \text{або} \qquad \frac{1}{(n+1)^2} \le 0,001 \Rightarrow (n+1)^2 \ge 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 \ge \sqrt{1000} \approx 31,6 \Rightarrow n \ge 31,6 - 1 = 30,6.$$

Отже, для того, щоб обчислити даний ряд з точністю до 0,001, необхідно взяти 31 перших членів ряду.

Теорема 2 (достатня ознака збіжності знакопочережного ряду)

Розглянемо знакопочережний ряд (5.12). Такому ряду відповідає ряд, складений з абсолютних значень членів ряду (5.12):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Якщо ряд, складений з абсолютних значень членів ряду (5.12), збігається, то збігається і ряд (5.12).

Означення 1

Знакопочережний ряд (5.12) називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд, складений з абсолютних значень членів цього ряду.

Означення 2

Якщо ряд, складений з абсолютних значень членів ряду (5.12) **розбігається**, а сам ряд (5.12) **є збіжним за ознакою Лейбніца**, то такий знакопочережний ряд називається **умовно збіжним (**або неабсолютно збіжним).

Приклад 4

а) Розглянемо знакопочережний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Вище було показано, що за ознакою Лейбніца цей ряд збіжний.

Розглянемо ряд, що складається з абсолютних значень членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$. Це гармонічний ряд, і вище було доведено, що цей ряд розбіжний.

Отже, маємо зробити висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ є **умовно збіжним** за означенням оскільки сам ряд за ознакою Лейбніца збіжний, а ряд, складений з абсолютних значень членів ряду, – розбіжний.

б) Дослідити ряд на збіжність знакопочережний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^n}{n^n+1}=-\frac{10}{2}+\frac{100}{5}-\frac{1000}{28}+\frac{10000}{257}+\dots.$$

Розв'язання

Спочатку перевіримо ряд на абсолютну збіжність. Для цього дослідимо на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^n+1}.$$

► Необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n^n+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Порівняємо загальний член вихідного ряду з $\frac{10^n}{n^n}=\left(\frac{10}{n}\right)^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{n}\right)^n=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\right)^n=0;$$

$$\frac{10^n}{n^n+1}<\left(\frac{10}{n}\right)^n \quad \forall n=1,2,\dots \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n^n+1}=0.$$

Отже, необхідна умова збіжності ряду виконується.

► Достатня умова збіжності. Застосуємо порівняльну ознаку збіжності ряду:

$$\frac{10^n}{n^n+1} < \frac{10^n}{n^n}.$$

Отже, якщо збігається більший ряд, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$, то й вихідний ряд збігається теж.

Застосуємо до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$ радикальний критерій Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{10}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n} \text{ збіжний.}$$

Висновок 1

Відповідно до порівняльної ознаки збіжності ряду ряд, у якого загальний член, менший за загальний член збіжного ряду, збігається також. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n+1}$ є **збіжним.**

Висновок 2

Отримали, що ряд, складений з абсолютних значень ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{n^n+1}$, є **збіжним**.

Отже, робимо висновок, що вихідний знакопочережний ряд є **абсолютно збіжним.**

§ 5. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

5.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Ряди, до загального члена яких входить функція $f(x)$, називаються функціональними рядами. Загальний вигляд таких рядів такий:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f(x), \tag{5.14}$$

де a_n - числовий коефіцієнт, функція від номера $n \in N$, $f(x)$ - функція від незалежної змінної x.

Якщо функція, що входить до загального члена ряду, є степеневою $f(x) = x^n$, то такий функціональний ряд носить назву **степеневого ряду.** Загальний вигляд такого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \tag{5.15}$$

Розглянемо задачу про збіжність ряду (5.15).

Як відомо, функція $f(x) = x^n$ за область визначення має всю дійсну числову вісь R. Якщо обрати деяке конкретне значення $x_0 \in R$, то ми отримаємо числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ із загальним членом $u_n = a_n {x_0}^n$. Отже, можна проводити дослідження збіжності такого ряду за необхідною і достатніми умовами збіжності числового ряду, які були розглянути у попередньому розділі. Числовий ряд для $x_0 \in R$ може бути або збіжним, або розбіжним. Якщо взяти інше значення змінної x, наприклад $x_1 \in R$, то числовий ряд буде вже іншим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n {x_1}^n$ і результат дослідження на збіжність **цього** ряду може відрізнятися від того результату, що був отриманий для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$.

Отже, для різних значень змінної x ряд (5.15) може бути як збіжним, так і розбіжним.

Приклад

Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

Розв'язання

Такий ряд можна розглядати як геометричну прогресію із знаменником $q = x$. Для геометричної прогресії вище проводилося дослідження на збіжність і був зроблений висновок, що геометрична прогресія збігається для $|q| < 1$. Отже, можна зробити висновок, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ збігається для усіх $|x| < 1$.

Іншою мовою, область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ є інтервал $(-1;1)$.

Ставиться узагальнена задача: Для яких значень змінної x ряд (5.15) є збіжним?

Відповідь на таке питання дає теорема норвезького математика Нільса Генріка Абеля.

Теорема Абеля

1. Якщо степеневий ряд (5.15) збігається для деякого $x_0 \neq 0$, то він **абсолютно збігається** і для усіх $x:$ $|x| < |x_0|$.

2. Якщо степеневий ряд (5.15) для деякого x_1 є розбіжним, то він **буде розбіжним** для усіх $x:$ $|x| > |x_1|$.

Доведення

За умовою теореми ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ є збіжним для $x_0 \neq 0$, отже згідно з необхідною умовою збіжності $\lim\limits_{n\to\infty} a_n {x_0}^n = 0$. Це означає, що загальний член ряду є величиною обмеженою, тобто існує деяке число $M > 0 : \forall n \; |a_n x^n| \leq M$.

1. Для оцінки на абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\; \forall x : |x| < |x_0|$ запишемо ряд, складений з абсолютних величин ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Зробимо оцінку елементів цього ряду:

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0 \frac{x^n}{{x_0}^n} \right| = |a_n x_0| \cdot \left| \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n .$$

Отримаємо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$.

Згадаємо, що $|x| < |x_0|$, отже, $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. Таке відношення можна взяти за $0 < q < 1$ і ряд, що отримали за геометричну прогресію з початковим членом M та знаменником $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. Така геометрична прогресія збігається.

Оскільки вихідний кожний член вихідного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ менший за відповідний член ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$, то за порівняльним законом збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ означає збіжність меншого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$.

Висновок

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\forall x: |x| < |x_0|$, що й потрібно було довести.

2. Тепер розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\forall x: |x| > |x_1|$. За умовою ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^{\,n}$ є розбіжним. Потрібно довести, що $\forall x: |x| > |x_1|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є теж розбіжним.

Нехай це не так. Нехай існує деяке $|x| > |x_1|$, для якого ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ є збіжним. Тоді за пунктом 1 даної теореми ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^{\,n}$ теж повинен збігатися, що є суперечністю умові теореми.

Отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\forall x: |x| > |x_1|$ може бути тільки розбіжним.

Теорема доведена.

Наслідком з теореми Абеля буде існування такого додатного числа $x_0 = R$, що для усіх $|x| < R$ ряд (5.15) буде збіжним, а для усіх $|x| > R$ ряд (5.15) буде розбіжним.

Таке число R має назву **радіус збіжності,** а інтервал $(-R; R)$ - **інтервал збіжності степеневого ряду (5.15).** Збіжність ряду для $|x| = R$ не обов'язкова. Зокрема,

– якщо ряд збігається в точці $x=R$, то інтервал збіжності такого степеневого ряду буде $(-R;R]$;

– якщо ряд збігається в точці $x=-R$, то інтервал збіжності такого степеневого ряду буде $[-R;R)$;

– якщо ряд збігається в обох точках $x=-R$ та $x=R$, то інтервал збіжності такого степеневого ряду буде $[-R;R]$.

Значення радіуса збіжності степеневого ряду знаходять з використанням достатньої умови збіжності числового ряду – ознаки Даламбера. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ збігається, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

Степеневий ряд збігається, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\Rightarrow|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Отже, якщо існує скінченна границя

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{5.16}$$

для степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$, то значення такої границі і буде радіусом збіжності степеневого ряду (5.15).

Зауваження

Якщо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=0$, кажуть, що **радіус збіжності степеневого ряду вироджений у нуль.** Якщо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\infty$ **- радіусом збіжності степеневого ряду є вся числова вісь $(-\infty;\infty)$.**

Приклади

Знайти області збіжності степеневих рядів:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$.

Розв'язання

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$;

1. Знайдемо радіус збіжності ряду. За формулою (5.16) маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{n\cdot 3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n}=3.$$

Отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$ **збігається на інтервалі $(-3;3)$.**

2. Перевіримо збіжність ряду для $x=-3$:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - знакопочережний ряд. З попередніх прикладів відомо, що він **умовно збіжний**.

Перевіримо збіжність ряду для $x=3$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонічний ряд, **розбіжний**.

Отже, інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$ буде $[-3;3)$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

отже, даний ряд є збіжним на інтервалі $(-\infty;\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

Для даного ряду спочатку перевіримо необхідну умову збіжності ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n n^n \neq 0 \ \forall x \neq 0$, отже, необхідна умова збіжності ряду не виконується.

Знайдемо радіус збіжності такого степеневого ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{(n+1)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\frac{n}{-(n+1)}} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = e^{-1}\cdot 0 = 0,$$

отже, радіус збіжності степеневого ряду вироджений у нуль. Ряд розбіжний.

Властивості степеневих рядів

Розглянемо функцію $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ - нескінченну лінійну комбінацію степенів змінної x. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має область збіжності $(-R;R)$.

1. Функція $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ на будь-якому інтервалі $[a,b]\in(-R;R)$ є функцією неперервною. Відповідно до цієї властивості степеневий ряд **можна почленно інтегрувати** на проміжку $[a,b]\in(-R;R)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = a_0\int_a^b dx + a_1\int_a^b xdx + a_2\int_a^b x^2dx + \ldots$$

2. Степеневий ряд $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ на інтервалі збіжності можна **почленно диференціювати:**

$$f' = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Причому **радіус збіжності** ряду, який отриманий диференціюванням, **зберігається.**

5.2. Ряди Тейлора і Маклорена. Розкладання деяких функцій у ряд Маклорена

Розглянемо збіжний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$ з інтервалом збіжності $(-R;R)$. Число α належить інтервалу збіжності ряду, тобто $\alpha \in (-R;R)$. Сумою такого ряду буде деяка функція $S = f(x),\ x \in (-R;R)$.

На практиці часто виникає **обернена задача** – чи можна подати деяку функцію $f(x)$ на деякому інтервалі $[a,b]$ в околі точки $\alpha \in [a,b]$ степеневим рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$, тобто чи можна знайти такий степеневий ряд, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$, щоб він збігався на інтервалі $[a,b]$ і його сума дорівнювала заданій функції $f(x)$ – $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n = f(x)$.

Побудуємо відповідний степеневий ряд для функції $f(x)$ **на інтервалі** $[\boldsymbol{a,b}]$.

Відомо, що функція $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ в околі точки $\alpha\in[a,b]$ n разів диференційована, причому для похідних будь - якого порядку виконується умова

$$\forall x\in[a,b]:\quad \left|f^{(n)}(x)\right|\le M;\quad M>0;\ n=1,2,...$$

Припустимо, що задана функція розкладається в **околі точки** α у степеневий ряд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\alpha)^n=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+$$

$$+a_3(x-\alpha)^3+...+a_n(x-\alpha)^n+... \qquad (5.16)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів $a_0, a_1,...,a_n$ продиференціюємо (5.16) n разів. За властивістю 2 степеневих рядів ми можемо це зробити:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-\alpha)+3a_3(x-\alpha)^2+...+na_n(x-\alpha)^{n-1}+...$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-\alpha)+4\cdot 3a_4(x-\alpha)^2+...+$$

$$+...+n\cdot(n-1)a_n(x-\alpha)^{n-2}+...$$

$$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-\alpha)+...+$$

$$+...+n\cdot(n-1)a_n(x-\alpha)^{n-2}+...n\cdot(n-1)(n-2)a_n(x-\alpha)^{n-3}+...$$

$$f^{(4)}(x)=4\cdot 3\cdot 2a_4+5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5(x-\alpha)+...+$$

$$+...+n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)a_n(x-\alpha)^{n-4}+...$$

………………………………………………..

$$f^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)....3\cdot 2\cdot a_n+...$$

Обчислимо значення функції $f(x)$ та її похідних в точці α:

$$f(\alpha)=a_0;\qquad f'(\alpha)=1\cdot a_1=1!\cdot a_1;$$

$$f''(\alpha)=2\cdot 1\cdot a_2=2!\cdot a_2;\qquad f'''(\alpha)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3=3!\cdot a_3;$$

$$f^{(4)}(\alpha)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_4=4!\cdot a_4;\ ...;$$

$$f^{(n)}(\alpha)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_4=n!\cdot a_n\,.$$

З останніх співвідношень можна отримати значення коефіцієнтів степеневого ряду (5.16):

$$a_0=f(\alpha);\quad a_1=\frac{f'(\alpha)}{1!}=f'(\alpha);$$

$$a_2=\frac{f''(\alpha)}{2!};\quad a_3=\frac{f'''(\alpha)}{3!};$$

$$a_4=\frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!};\ldots.;a_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\,.$$

Підставимо отримані коефіцієнти у ряд (5.16):

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+$$

$$+\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+\ldots \qquad (5.17)$$

Ряд побудований.

Ряд (5.17) носить назву **ряду Тейлора функції** $f(x)$ **в околі точки** $x=\alpha$, процес отримання такого ряду носить назву **розкладання функції** $f(x)$ **в околі точки** $x=\alpha$ **у ряд Тейлора.**

Необхідно відзначити, що не всі функції можна розкласти в ряд Тейлора, може статися, що формально отриманий ряд Тейлора не є збіжним. Для дослідження побудованого ряду на збіжність необхідно звернутися до властивості 1 з властивостей збіжних числових рядів (п.5.1). Як і числові ряди, ряд Тейлора можна подати сумою двох доданків – часткової суми S_n та n-го залишку ряду R_n, тобто

$$f(x)=S_n+R_n\,.$$

Теорема

Для збіжності ряду Тейлора (5.17) до функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб за умови $n \to \infty$ n-й залишок ряду R_n прямував до нуля для всіх значень $x \in [a;b]$ де $[a,b] = [-R;R]$ - інтервал збіжності степеневого ряду, тобто

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0; \ \forall x \in [-R;R].$$

Розкладання функції в ряд Тейлора в околі точки α можна подати за **формулою Тейлора**

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 +$$

$$+\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + R_n(x), \tag{5.18}$$

де $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}$; $\xi \in (\alpha; x)$ – n-й залишок ряду у формі Лагранжа.

Частковим випадком ряду Тейлора є **ряд Маклорена**, який відповідає ряду Тейлора для $\alpha = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 +$$

$$+\frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{5.19}$$

Ряд Маклорена часто використовують для розкладання в ряд та наближеного обчислення аналітичних функцій.

Завдяки властивості 1 з властивостей степеневих рядів (п.5.1) розкладання в ряд Маклорена використовується для наближеного інтегрування класу функцій, для яких ***первісну не можна подати в елементарних функціях.***

Приклад 1

Розкласти у ряд Маклорена такі функції: *а*) $f(x)=e^x$; *б*) $f(x)=\boldsymbol{sin}\,x$.

Розв'язання

а) $f(x)=e^x$; функція неперервна $\forall x\in(-\infty;\infty)$.

1. Знайдемо похідні функції: $f'(x)=f''(x)=\ldots=f^n(x)=e^x$.

2. Обчислимо значення функції і її похідних у точці $x=0$:

$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^n(0)=e^0=1$.

3. Підставимо отримані значення функції і її похідних у (5.19):

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Область збіжності ряду $(-\infty;\infty)$.

б) $f(x)=\boldsymbol{sin}\,x$.

1. Знайдемо похідні функції:

$f'(x)=\boldsymbol{cos}\,x;\quad f''(x)=-\boldsymbol{sin}\,x;\quad f'''(x)=-\boldsymbol{cos}\,x;\quad f^{(4)}(x)=\boldsymbol{sin}\,x$ і т.д.

2. Обчислимо значення функції і її похідних у точці $x=0$:

$f(0)=\boldsymbol{sin}0=0;\quad f'(0)=\boldsymbol{cos}0=1;\quad f''(0)=-\boldsymbol{sin}0=0;$

$f'''(0)=-\boldsymbol{cos}0=-1;\quad f^{(4)}(0)=\boldsymbol{sin}0=0$ і т.д.

Можна помітити, що похідні парних порядків будуть дорівнювати $\pm\boldsymbol{sin}\,x$, тобто в точці $x=0$ вони дорівнюватимуть нулю. Похідні непарних порядків будуть $\pm\boldsymbol{cos}\,x$, тобто вони набуватимуть значення в точці $x=0$ ±1. Точніше

$$f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n-1}\boldsymbol{cos}\,x,$$

в точці $x=0$ $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}\boldsymbol{cos}\,0=(-1)^{n-1}$.

3. Підставимо отримані значення функції і її похідних у (5.19):

$$\sin x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots$$

Область збіжності ряду $(-\infty;\infty)$

Наведемо розкладання у ряд Маклорена деяких відомих функцій:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots; \quad x \in (-\infty;\infty)$.

2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n u^n + \ldots; \quad |x| < 1$.

3. $\boldsymbol{ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots; \quad x \in (-1;1]$.

4. $\boldsymbol{sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots; \quad x \in (-\infty;\infty)$.

5. $\boldsymbol{cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots; \quad x \in (-\infty;\infty)$.

6. $arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots; \quad |x| \le 1$.

7. $(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Інтервал збіжності ряду залежить від m:

а) $m \geq 0 \Rightarrow x \in [-1,1]$;

б) $-1 < m < 0 \Rightarrow x \in (-1,1]$;

в) $m \leq -1 \Rightarrow x \in (-1,1)$.

Приклад 2

Розкласти у ряд Маклорена функції: *а)* e^{-x^2} ; *б)* $\dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання

а) e^{-x^2} .

З попереднього прикладу маємо

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Підставимо тепер замість x функцію $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

б) $\dfrac{\sin x}{x}$.

З попереднього прикладу маємо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,!} x^{2n-1} + \ldots; \quad x \in (-\infty; \infty),$$

отже,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2(n-1)} + \ldots$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барковський В. В., Барковська Н. В.* Вища математика для економістів – К.: ЦУЛ, 2002. 400 с.
2. *Бугров Я. С, Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. 432 с.
3. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А. і др.* Высшая математика для экономистов. – М.: «Банки и биржи» Издательское объединение «ЮНИТИ», 1988. 471 с.
4. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983. 176 с.
5. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1976. 456 с.
6. *Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Учебное пособие в 3 ч. под общей редакцией А. П. Рябушко. Ч.1 –Мн.: Выш. шк., 1991. 352 с.
7. *Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике./ Учебное пособие в 3 ч. под общей редакцией А.П. Рябушко. Ч.2 –Мн.: Выш. шк., 1991. 352 с.
8. Методичні вказівки та контрольні завдання з курсу "Вища математика" для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укладач Л.І. Фоменко – С.: вид-во СумДУ, Ч. 3, 4 2002 р.
9. Методичні вказівки та контрольні завдання з навчальної дисципліни "Вища математика" для студентів економічних спеціальностей денної форми навчання / укладач Л.І. Брацихіна – С.: вид-во СумДУ, Ч. 1, 2 2007 р.

Навчальне видання

Вища математика

Конспект лекцій
для студентів спеціальностей
6.030504 „Економіка підприємства”,
6.030507 „Маркетинг”, 6.030508 „Фінанси і кредит”,
6.030601 „Менеджмент організацій і адміністрування”
денної та заочної форм навчання

У трьох частинах
ЧАСТИНА 3

Відповідальний за випуск зав. кафедри прикладної та обчислювальної математики д-р. фіз.-мат. наук, проф. Л. А. Фильштинський
Редактор Н. А. Гавриленко
Комп’ютерне верстання Г. О. Кладієнко

Підписано до друку 21.06.2011, поз.
Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 12,10. Обл.-вид. арк. 9,96. Тираж 150 пр. Зам. №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.