

УДК 539.3

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, Ю. Д. КОВАЛЕВ

ИЗГИБ СЛОЯ СО СКВОЗНЫМИ ТУННЕЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ ТОРЦОВ

Ранее [1] была предложена процедура решения периодических задач теории упругости и электроупругости для кусочно-однородного цилиндра в R^3 и решен ряд симметричных (относительно срединной плоскости) задач теории упругости и электроупругости. Ниже рассматривается смешанная кососимметричная задача теории упругости для слоя, ослабленного сквозными туннельными разрезами.

Известны решения пространственной кососимметричной задачи теории упругости для слоя со свободными основаниями, ослабленного сквозными туннельными разрезами в точной постановке [2], для слоя с полостью другими методами [3–5], а также пространственных задач теории упругости для тел с плоскими трещинами [6, 7].

1. Рассмотрим упругий слой $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, ослабленный туннельными вдоль оси x_3 сквозными полостями – разрезами, поперечные сечения которых – гладкие разомкнутые дуги L_j ($j = 1, 2, \dots, k$).

Пусть на границах полостей действуют нормальные и касательные поверхностные нагрузки (N, T, Z) , а на бесконечности имеет место однородное поле изгиба и сдвига $\overset{\infty}{\sigma}_{ij}$, ($i, j = 1, 2, 3$). Предполагаем, что кривизны дуг удовлетворяют условию Гельдера на L_j и, кроме того, компоненты заданной нагрузки разлагаются в ряды Фурье по координате x_3 на $[-h, h]$. Пусть на торцах слоя выполняются условия

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = \tau_{13}(x_1, x_2, \pm h) = \tau_{23}(x_1, x_2, \pm h) = 0. \quad (1)$$

Запишем компоненты вектора перемещения в виде

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad (i = 1, 2), \quad u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \quad \gamma_k = \frac{2k+1}{2h} \pi. \quad (2)$$

Представления компонентов вектора перемещения (2) автоматически удовлетворяют условиям (1) на торцах слоя.

После разделения переменных в уравнениях Ламе получаем систему

$$\kappa_k u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0, \quad \kappa_k u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0, \quad (3)$$

$$\kappa_k = \Delta - \gamma_k^2, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k},$$

$$\partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i = 1, 2), \quad \sigma = (1 - 2\nu)^{-1},$$

которую проинтегрируем следующим образом. Учитывая, что θ_k – метагармоническая функция, введем произвольное решение уравнения $\kappa_k^2 \psi_k = 0$ и положим $\theta_k = \kappa_k \psi_k$. Это дает возможность получить

$$\begin{aligned} u_{1k} &= -\sigma \partial_1 \psi_k + \sigma \partial_2 \varphi_k, & u_{2k} &= -\sigma \partial_2 \psi_k - \sigma \partial_1 \varphi_k, \\ u_{3k} &= -\gamma_k \sigma \psi_k + \Phi_k, \end{aligned} \quad (4)$$

где φ_k, Φ_k – произвольные метагармонические функции.

Потребовав, чтобы выражения (4) удовлетворяли равенству $\theta_k = \kappa_k \psi_k$, придем к представлениям

$$\begin{aligned} u_{1k} - iu_{2k} &= 2\sigma \partial / \partial z (i\varphi_k - \psi_k), & u_{3k} &= -\kappa_k ((1 + \sigma) / \gamma_k + \sigma \gamma_k) \psi_k, \\ \kappa_k \varphi_k &= 0, & \partial / \partial z &= (\partial_1 - i\partial_2) / 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (2) и (5) дают выражения упругих перемещений в слое через функции φ_k, ψ_k , причем φ_k (вихревое решение) описывает поворот элемента относительно оси Ox_3 : $\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k} = \sigma \Delta \varphi_k$.

Интегральные представления функций φ_k и ψ_k имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \theta_k(z) &= \int_L p_k^{(1)}(\zeta) K_0(\gamma_k r) ds + 2/\gamma_k \operatorname{Re} \int_L q_k^{(1)}(\zeta) \partial / \partial \zeta K_0(\gamma_k r) d\zeta, \\ i\varphi_k(z) - \psi_k(z) &= \int_L (ip_k^{(3)}(\zeta) - p_k^{(2)}(\zeta)) K_0(\gamma_k r) ds + \\ &+ 2i/\gamma_k \int_L \bar{q}_k^{(2)}(\zeta) \partial / \partial \bar{\zeta} K_0(\gamma_k r) d\bar{\zeta} + 1/2\gamma_k \int_L p_k^{(1)}(\zeta) r K_1(\gamma_k r) ds + \\ &+ 1/\gamma_k^2 \operatorname{Re} \int_L q_k^{(1)}(\zeta) \partial / \partial \zeta (r K_1(\gamma_k r)) d\zeta, \quad r = |\zeta - z|, \end{aligned} \quad (6)$$

где $K_n(\gamma_k r)$ – функции Макдональда порядка n ; ds – элемент дуги контура L ; плотности $p_k^{(i)}(\zeta), q_k^{(i)}(\zeta)$ пока неизвестны.

Граничные условия на контуре L в комплексной форме таковы:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^\pm - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})^\pm &= \pm 2(N - iT)^\pm, \\ \operatorname{Re} [e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23})^\pm] &= \pm Z_n^\pm, \end{aligned} \quad (7)$$

где ψ – угол между положительной нормалью к левому берегу разреза (при движении от его начала a_j к концу b_j) и осью Ox_1 , верхний знак относится к левому берегу.

Используя закон Гука и формулы (5), представим выражение (7) в форме

$$\begin{aligned} 2\sigma e^{2i\psi} \left\{ \partial^2 / \partial z^2 (i\varphi_k - \psi_k) \right\}^\pm - 1/2 \theta_k^\pm - 1/2 \sigma \gamma_k^2 \psi_k^\pm &= \pm 1/2 \mu (N_k - iT_k)^\pm, \\ - \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} [\partial / \partial z (\sigma \gamma_k \psi_k + (1 + \sigma) / \gamma_k \theta_k) - \sigma \gamma_k \partial / \partial z (i\varphi_k - \psi_k)] \right\}^\pm &= \pm 1/2 \mu Z_n^\pm. \end{aligned} \quad (8)$$

Потребуем, чтобы интегральные представления (6) обеспечивали существование на контуре L скачков перемещений и непрерывность вектора напряжения. Это приводит к выражению плотностей в формуле (6) через физические величины

$$\begin{aligned} p_k^{(1)} &= \gamma_k^2 / (\pi(1 + \sigma)) \{ [u_{1k}] \cos \psi + [u_{2k}] \sin \psi \}, \\ ip_k^{(3)} - p_k^{(2)} &= 1/2 \pi \sigma [u_{1k} - u_{2k}] e^{i\psi}, \\ q_k^{(1)} &= -i\gamma_k^2 / (\pi(1 + \sigma)) [u_{3k}] + (\gamma_k e^{-i\psi}) / (\pi(1 + \sigma)) d/ds q_k^*, \\ q_k^{(2)} &= 1/2 \pi \sigma [u_{3k}] + (e^{-i\psi}) / (\sigma \pi \gamma_k) d/ds q_k^*, \quad q_k^* = [u_{1k} + iu_{2k}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь символ [*] обозначает скачок соответствующей величины на контуре L .

2. Удовлетворив граничным условиям (8) с учетом формул (6) и (9), получим после преобразований систему из трех сингулярных интегродифференциальных уравнений (при каждом фиксированном k). Краевые условия (18) достаточно выполнить лишь на левом берегу контура L .

$$\sum_{i=1}^2 \int_L \omega_{ik} G_{ik} ds + \sum_{i=1}^3 \int_L \omega_{ik}^* G_{ik}^* ds = \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \quad \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_L \omega_{ik} g_{ik} ds + \int_L \omega_{ik}^* g_{ik}^* ds \right\} = \frac{1}{2\mu} Z_k, \quad (10)$$

$$\text{где} \quad \omega_{1k} = d/ds[u_{1k}], \quad \omega_{2k} = d/ds[u_{2k}], \quad \omega_{3k} = d/ds[u_{3k}],$$

$$\omega_{1k}^* = [u_{1k}], \quad \omega_{2k}^* = [u_{2k}], \quad \omega_{3k}^* = [u_{3k}].$$

Здесь $G_{ik}, G_{ik}^*, g_{ik}, g_{ik}^*$ – ядра интегральных уравнений (10), которые ввиду их громоздкости здесь не выписываем.

Для замыкания алгоритма систему (10) необходимо рассматривать совместно с дополнительными условиями

$$\int_L d[u_{ik}] = 0, \quad (i = 1, 2, 3; \quad k = 0, 1, 2, \dots).$$

3. Введем параметризацию контура L_j (ниже индекс j опускаем) $\zeta = \zeta(\beta), \zeta_0 = \zeta(\beta_0), -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1$.

$$\text{Соответственно этому положим } d[u_{ik}]/d\beta = \Omega_{ik}(\beta) / \left(\sqrt{1-\beta^2} \right), \quad (i = 1, 2, 3;$$

$$k = 0, 1, 2, \dots).$$

Используя эти зависимости, в результате асимптотического анализа интегральных представлений для напряжений получим:

$$K_I^{\mp} - iK_{II}^{\mp} = \mp \mu \sigma / (\sigma + 1) \sqrt{\pi / (s'(\mp 1))} \sum_{k=0}^{\infty} (\Omega_{1k}(\mp 1) - i\Omega_{2k}(\mp 1)) e^{i\psi(\mp 1)} \sin \gamma_k x_3, \quad (11)$$

$$K_{III}^{\mp} = \mp \mu / 2 \sqrt{\pi / (s'(\mp 1))} \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{3k}(\mp 1) \cos \gamma_k x_3, \quad s'(\beta) = ds/d\beta > 0,$$

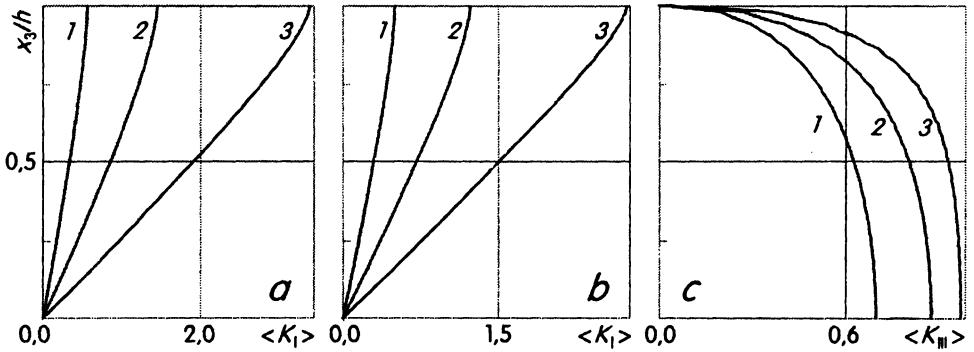
$$K_I = \sqrt{2\pi r} \sigma_n, \quad K_{II} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{ns}, \quad K_{III} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{n3}, \quad (r \rightarrow 0).$$

Здесь σ_n, σ_{ns} и σ_{n3} – нормальное и касательные напряжения на площадке за вершиной трещины, верхний знак соответствует вершине трещины $\beta = -1$. Отметим, что формулы (11) совпадают с соответствующими выражениями для коэффициентов интенсивности [2].

4. В качестве примера рассмотрим слой, ослабленный туннельным параболическим разрезом $\xi_1 = p_1 \beta, \xi_2 = p_2 \beta^2, -1 \leq \beta \leq 1$, на поверхности которого действует нагрузка $N = c x_3, T = 0, Z = 0$ или $N = T = 0, Z = P$, где $c = \text{const}$ – коэффициент пропорциональности. При численной реализации алгоритма система интегральных уравнений методом механических квадратур [8] сводится к линейной системе алгебраических уравнений. Для каждого k такая система состоит из трех уравнений. Достаточная точность результатов достигается при $k = 50$.

Из приведенных данных (см. рисунок) видно, что принятые в работе граничные условия на торцах слоя существенно изменяют значения коэффи-

циентов интенсивности напряжений в вершинах трещины по сравнению с известными результатами [2].



Распределение относительного коэффициента интенсивности напряжений

$\langle K_I \rangle = K_I (c\sqrt{\pi l})^{-1}$ (a, b) и $\langle K_{III} \rangle = K_{III} (c\sqrt{\pi l})^{-1}$ (c) по толщинной координате при $N = cx_3$, $T = 0$, $Z = 0$ (a, b) и $N = T = 0$, $Z = c$ (c): a, c – для прямой трещины ($p_2 = 0$); b – для параболической трещины ($p_2 = 0,5$).

Кривые 1, 2, 3 – $h/l = 1, 2, 4$ соответственно.

Distribution of relative stress intensity factor $\langle K_I \rangle = K_I (c\sqrt{\pi l})^{-1}$ (a, b) and

$\langle K_{III} \rangle = K_{III} (c\sqrt{\pi l})^{-1}$ (c) across the thickness coordinate at $N = cx_3$, $T = 0$, $Z = 0$ (a, b) and $N = T = 0$, $Z = c$ (c): a, c – for a rectilinear crack ($p_2 = 0$); b – for a parabolic crack ($p_2 = 0,5$). c is coefficient of proportionality. Curves 1, 2, 3 – $h/l = 1, 2, 4$, respectively.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано нову процедуру розв'язування просторових змішаних кососиметричних задач теорії пружності для шару, послабленого крізними тунельними тріщинами. Крайову задачу зведено до системи $3k$ ($k=1, 2, \dots$) одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Подано результати розрахунків коефіцієнтів інтенсивності напружень.

SUMMARY. A new procedure of solving 3-dimensional mixed skew – symmetric problems of elasticity for a layer, weakened with through-cracks, is proposed. The boundary problem is reduced to a system of $3k$ ($k=1, 2, \dots$) one-dimensional singular integral equations. The results of calculations of stress intensity factors are presented.

1. Фильштинский Л. А. Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в R^3 // Теоретическая и прикладная механика. – Киев; Донецк: Вища шк., 1990. – Вып. 21. – С. 13–20.
2. Григолюк Э. И., Ковалев Ю. Д., Фильштинский Л. А. Изгиб слоя, ослабленного сквозными туннельными разрезами // Докл. АН СССР. – 1991. – 317, № 1. – С. 51–53.
3. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
4. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 237 с.
5. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 261 с.
6. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 283 с.
7. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 345 с.
8. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 253 с.

Сумський державний університет

Получено
12.11.99