

3. Космодамианский А. С. Циклические колебания упругих многосвязных тел// Вестн. АН УССР. 1988. № 4. С. 12—26. 4. Левиц А. В. Вибрация дисков// Журн. техн. физики. 1937. Вып. 17. С. 1739—1753. 5. Бурмистров Е. Ф. Полоние конструктивно-ортогруппные оболочки, прямоугольные в плане//Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. 1964. Вып. 1, С. 129—138.

Поступила в редколлегию 15.01.91

УДК 539.3

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, В. И. ОСТРИК

Сумы

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДИНАМИЧЕСКУЮ НАПРЯЖЕННОСТЬ УПРУГОГО ПРОВОДЯЩЕГО ПОЛУСЛОЯ С ТРЕЩИНОЙ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

На дифракцию волн упругих напряжений в телах с неоднородностями определяющее влияние могут оказывать сильные статические магнитные поля. При этом вызванные движением упругой диа (пара)-магнитной среды механические и электромагнитные поля являются связанными. Это проявляется в наличии сил Лоренца в уравнениях движения и дополнительного тензора максвелловских напряжений. [1].

Некоторые задачи дифракции магнитоупругой волны на прямой трещине в неограниченной среде рассмотрены в работах [2; 3]. В данной статье изучается взаимодействие сдвиговой магнитоупругой волны с туннельной криволинейной трещиной в диа (пара)-магнитном полуслое.

Рассмотрим идеально проводящий упругий полуслой, занимающий в прямоугольной системе координат $Oxyz'$ область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < \infty$, $-\infty < z' < \infty$. Полуслой находится в статическом магнитном поле с напряженностью $H^0 = (0, H_0, 0)$ и ослаблен цилиндрической вдоль оси z' трещиной-разрезом.

Пусть из бесконечности излучается магнитоупругая сдвиговая волна смещения W_0 [2], а поверхность трещины либо свободна от сил, либо подвержена воздействию гармонической во времени и постоянной вдоль образующей гармонической нагрузки. В этом случае в теле возникает стационарный волновой процесс, соответствующий состоянию антиплоской деформации: $\bar{U} = (0, 0, We^{-i\omega t})$ (\bar{U} — вектор упругого смещения, ω — круговая частота, t — время). Все величины, характеризующие напряженно-деформированное и электромагнитное состояние среды, содержат временной множитель $e^{-i\omega t}$, который в дальнейшем будем опускать."

Напряженности индуцированного в теле квазистатического электромагнитного поля могут быть получены из линейризованных уравнений Максвелла [1] в виде

$$\vec{h} = (-H_0 W, 0, 0), \quad \vec{e} = (i\mu_e \omega H_0 W, 0, 0). \quad (1)$$

Разрешающее уравнение для смещения $W(x, y)$, вытекающее из линейризованных уравнений движения, запишем следующим образом.

$$\nabla^2 W + \chi^2 \partial^2 W / \partial y^2 + \gamma_2^2 W = 0 \quad (\chi^2 = \mu_e H_0^2 / \mu, \quad \gamma_2^2 = \rho \omega^2 \mu). \quad (2)$$

Здесь μ_e — магнитная проницаемость; ρ — плотность среды; μ — модуль сдвига; γ_2 — волновое число; ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа.

Суммарные напряжения σ_{xz} , σ_{yz} складываются из механических τ_{xz} , τ_{yz} и максвелловских t_{xz} , t_{yz} и выражаются через смещение $W(x, y)$ по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \tau_{xz} + t_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \tau_{yz} + t_{yz}, \\ \tau_{xz} &= \mu \partial W / \partial x, \quad \tau_{yz} = \mu \partial W / \partial y, \quad t_{xz} = 0, \quad t_{yz} = \mu \chi^2 \partial W / \partial y. \end{aligned} \quad (3)$$

Предположим, что основания полуслоя свободны от сил

$$\partial W / \partial x = 0 \quad (x=0, x=a). \quad (4)$$

Условие на торцевой границе полуслоя зададим в виде

$$A(A-1)W + A(A+1)\partial W / \partial y = 0 \quad (y=0). \quad (5)$$

При этом, если $A=1$ или -1 , имеем соответственно свободный или закрепленный торцевой край полуслоя, если $A=0$ — рассматриваем слой $0 \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z' < \infty$.

Считаем, что вдоль отрицательного направления оси y распространяется магнитоупругая волна сдвига

$$W_0 = \tau \exp\{-i\gamma_2 y \sqrt{1 + \chi^2}\}, \quad (6)$$

на берегах трещины S возможно действие гармонической во времени механической нагрузки $X_n^\pm = \gamma_n^\pm = 0$, $Z_n^\pm = \pm Z$.

Пусть L — линия пересечения поверхности S с плоскостью

Oy ; $\vec{n} = (\cos \psi, \sin \psi)$ — единичная нормаль к L . Предполагаем, что Z и кривизна дуги L — функции класса H , [4]. Краевое условие на контуре трещины запишем в виде:

$$(\partial W / \partial n)|_L = \frac{1}{\mu} z. \quad (7)$$

Уравнение колебаний (2) при переходе к новым координатам $x_1 = x$, $y_1 = y / \sqrt{1 + \chi^2}$ преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\partial^2 W / \partial x_1^2 + \partial^2 W / \partial y_1^2 + \gamma_2^2 W = 0. \quad (8)$$

Дифференциалы ds_1 , ds дуги L в системах координат x_1Oy_1 и xOy связаны соотношением $(1 + \chi^2)ds_1^2 = (1 + \chi^2 \sin^2 \psi) ds^2$.

Решение краевой задачи (2), (4) + (7) представим в виде суперпозиции падающей, отраженной и рассеянной волн:

$$W = W_0 + AW_1 + W_*, \quad W_1 = \tau \exp(i\gamma_2 y_1), \quad (9)$$

$$W_*(x, y) = -i \int_L \left\{ p(s) \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 - \frac{\partial G}{\partial \bar{\zeta}_1} d\bar{\zeta}_1 \right) - \frac{i\chi^2 \sin 2\psi}{2\sqrt{1+\chi^2}} p'(s) G ds \right\},$$

$$G(\xi, x, \eta_1, y_1) = g(\xi, x, \eta_1 - y_1) + Ag(\xi, x, -\eta_1 - y_1),$$

$$g(\xi, x, \eta_1 - y_1) = \frac{1}{2i\gamma_2 a} e^{i\gamma_2 |\eta_1 - y_1|} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} e^{-\lambda_k |\eta_1 - y_1|} \cos \alpha_k \xi \cos \alpha_k x,$$

$$\lambda_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \gamma_2^2} (\gamma_2 < \alpha_k), \quad \lambda_k = -i\sqrt{\gamma_2^2 - \alpha_k^2} (\gamma_2 > \alpha_k), \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{a},$$

$$\zeta_1 = \xi + i\eta_1, \quad \eta_1 = \eta / \sqrt{1 + \chi^2}, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad z = x + iy.$$

Здесь $p(s)$ — неизвестная плотность; W_1 — отраженная от торцевой границы полуслоя волна; G — функция Грина краевой задачи (8), (4), (5) для полуполосы $0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq y_1 < \infty$; g — функция Грина краевой задачи (8), (4) для полосы $0 \leq x_1 \leq a, -\infty < y_1 < \infty$.

Интегральное представление (9) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2), граничным условиям (4), (5), условиям излучения [5], а также обеспечивает непрерывность механических напряжений и существование скачка перемещения на контуре L .

Для выделения логарифмической особенности функции Грина и усиления сходимости ряда в (9) просуммируем его главную часть. Получим

$$g(\xi, x, \eta_1 - y_1) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi}{2a} (\zeta_1 - z_1) \sin \frac{\pi}{2a} (\bar{\zeta}_1 + z_1) \right| - \quad (10)$$

$$- \frac{1}{2a} |\eta_1 - y_1| + \frac{1}{2i\gamma_2 a} e^{i\gamma_2 |\eta_1 - y_1|} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} e^{-\lambda_k |\eta_1 - y_1|} - \frac{1}{\alpha_k} e^{-\alpha_k |\eta_1 - y_1|} \right) \times \\ \times \cos \alpha_k \xi \cos \alpha_k x, \quad z_1 = x + iy_1.$$

Вычислим нормальную производную от функции W (9), регуляризуя расходящиеся интегралы интегрированием по частям и повторно суммируя главные части рядов для вторых производных функции Грина. Подставив предельное значение нормальной производной при $z \rightarrow \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ в краевое условие (7), прихо-

дим к сингулярному интегродифференциальному уравнению на L относительно функции $p(s)$

$$\int_L \{p'(s) h(s, s_0) + p(s) H(s, s_0)\} ds = F(s_0), \quad (11)$$

$$h(s, s_0) = \operatorname{Im} \frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{01}} + \frac{1}{8a} \chi^2 \chi_1 \sin 2\psi \{ \operatorname{Re} [c(\psi_0) (\operatorname{ctg} \zeta_2 - \operatorname{ctg} \zeta_3 + \\ + 2i \operatorname{sign} \eta_2)] - 2\chi_1 \sin \psi_0 (\operatorname{sign} \eta_2 \cdot e^{-t\gamma_2 \eta_2} - A e^{t\gamma_2 \eta_2}) - \\ - 4 \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} (\alpha_k \varphi_{1k} s_{2k} \cos \psi_0 - \chi_1 \varphi_{2k} c_{2k} \sin \psi_0) \},$$

$$H(s, s_0) = -\frac{\pi}{8a^2} \operatorname{Im} \{c'(\psi) [c(\psi_0) (\zeta_2^{-2} - \operatorname{cosec}^2 \zeta_2) + \overline{c(\psi_0)} \operatorname{cosec}^2 \zeta_3] + \\ + \frac{1}{4\pi} \gamma_2^2 \chi_1 [\cos(\psi - \psi_0) \ln |\sin \zeta_2| - \cos(\psi + \psi_0) \ln |\sin \zeta_3| + \\ + (2 \ln 2 - \frac{\pi}{a} |\eta_2|) \sin \psi \sin \psi_0] - \frac{i\gamma_2 \chi_1}{2a} \sin \psi \sin \psi_0 (e^{-t\gamma_2 \eta_2} + A e^{t\gamma_2 \eta_2}) + \\ + \frac{\chi_1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{3k} c_{1k} c_{2k} \sin \psi \sin \psi_0 - \alpha_k^2 \varphi_{1k} s_{1k} s_{2k} \cos \psi \cos \psi_0 + \\ + \alpha_k \varphi_{2k} (\chi_1 s_{1k} c_{2k} \cos \psi \sin \psi_0 - \chi_0 c_{1k} s_{2k} \sin \psi \cos \psi_0) + \\ + \frac{\gamma_2^2}{\alpha_k} (s_{1k} s_{2k} \cos \psi \cos \psi_0 + c_{1k} c_{2k} \sin \psi \sin \psi_0) e^{-\alpha_k |\eta_2|} \},$$

$$F(s_0) = \frac{1}{\mu} Z + \frac{\tau \chi_1}{2a} \sin \psi_0 (e^{-t\gamma_2 \eta_1} - A e^{t\gamma_2 \eta_1}), \quad p(s) = \int_0^s p'(s) ds,$$

$$c(\psi_0) = \cos \psi_0 + i\chi_1 \sin \psi_0, \quad c'(\psi_0) = -\sin \psi_0 + i\chi_1 \cos \psi_0,$$

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k} (e^{-\lambda_k |\eta_2|} + A e^{-\lambda_k \eta_3}) - \frac{1}{\alpha_k} e^{-\alpha_k |\eta_2|}, \quad \varphi_{2k} = \operatorname{sign} \eta_2 \cdot (e^{-\lambda_k |\eta_2|} - \\ - e^{-\alpha_k |\eta_2|}) - A e^{-\lambda_k \eta_3}, \quad \varphi_{3k} = \lambda_k (e^{-\lambda_k |\eta_2|} + A e^{-\lambda_k \eta_3}) - \alpha_k e^{-\alpha_k |\eta_2|},$$

$$\zeta_2 = \frac{\pi}{2a} (\zeta_1 - \zeta_{01}), \quad \zeta_3 = \frac{\pi}{2a} (\zeta_1 + \zeta_{01}), \quad \eta_2 = \eta_1 - \eta_{01}, \quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_{01},$$

$$\zeta_{01} = \xi_0 + i\eta_{01}, \quad \eta_{01} = \chi_1 \eta_0, \quad \chi_0 = \sqrt{1 + \chi^2}, \quad \chi_1 = 1/\sqrt{1 + \chi^2},$$

$$c_{1k} = \cos \alpha_k \xi_0, \quad c_{2k} = \cos \alpha_k \xi_0, \quad s_{1k} = \sin \alpha_k \xi_0, \quad s_{2k} = \sin \alpha_k \xi_0.$$

Здесь ядро $h(s, s_0)$ — сингулярное; $H(s, s_0)$ — имеет логарифмическую особенность.

Условие отсутствия разрывов перемещения в вершинах разреза приводит к равенству

$$\int_L p'(s) ds = 0. \quad (12)$$

Уравнения (11), (12) однозначно определяют решение с ограниченной производной на концах разреза [4].

Далее удобно ввести параметризацию контура разреза: $\xi = \xi(\beta)$ ($-1 \leq \beta \leq 1$). В соответствии с этим $p'(s) = \Omega(\beta)/(s'(\beta) \times \sqrt{1-\beta^2})$, $\Omega(\beta) \in H[-1, 1]$.

Для определения суммарных напряжений σ_{xz} , σ_{yz} в окрестности вершины дефекта воспользуемся интегральным представлением (9). Асимптотический анализ входящих в формулы для напряжений интегралов дает

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = & -\frac{\mu}{2} \sqrt{1+\chi^2} e^{i\psi_c/2} \Omega(\pm 1) / \sqrt{\mp 2is'(\pm 1)(z-c)} + \\ & + O(1), \quad z \rightarrow c, \quad c = \xi(\pm 1), \quad \psi_c = \psi|_{z=c}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (13) определяем динамический коэффициент интенсивности напряжений

$$\begin{aligned} K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{xz} \cos \psi_c + \sigma_{yz} \sin \psi_c) = \\ &= \pm \frac{\mu}{2} \sqrt{\pi(1+\chi^2)/s'(\pm 1)} \Omega(\pm 1), \end{aligned} \quad (14)$$

где r — расстояние от рассматриваемой точки на продолжении трещины до вершины c .

Численная реализация уравнений (11), (12) проводилась методом механических квадратур с использованием квадратурных формул Гаусса-Чебышева для регулярных и сингулярных интегралов [6].

Расчеты безразмерной величины α^\pm проведены для случая дифракции падающей сдвиговой волны ($\tau \neq 0$) на свободной от сил трещине ($Z=0$). Коэффициент интенсивности напряжений выражается через α^\pm следующим образом: $K_{III} = \sqrt{A} \alpha^\pm |T_y| \arg \Omega(\pm 1)$, $|T_y| = \mu \gamma_2 \tau / \sqrt{1+\chi^2}$ — модуль механического напряжения в падающей волне, причем верхний знак отвечает вершине разреза $\xi(1)$, нижний — $\xi(-1)$.

На рис. 1, 2 представлена зависимость величины α^- от нормализованного волнового числа $\gamma_2 a$. Параметрическое представление контура трещины следующее: $\xi/a = 0,5 + 0,2\beta$, $\eta/a = 1 + p\beta^2$, $-1 \leq \beta \leq 1$. Значение параметра кривизны $p=0$ отвечает прямой трещине (рис. 1), $p=0,1$ — параболической (рис. 2). Кривые 1 построены для закрепленного ($A=1$), 2 — для свободного ($A=1$) торцевого края полуслоя. Сплошные кривые соответствуют значению $x=1$, пунктирные — $x=0$. Видно, что приложенное магнитное поле сдвигает точки экстремумов в сторону больших значений $\gamma_2 a$. При этом для заданного расстояния пря-

молинейной трещины до торцевого края K_{III} обращается в нуль, при $\gamma_2 a = (2k+1)\pi\sqrt{1+\chi^2}/2$, $A=-1$ и $k\pi\sqrt{1+\chi^2}$, $A=1$ ($k=0, 1, \dots$). При увеличении $\gamma_2 a$ для слоя ($A=0$) α^- увеличивается незначительно.

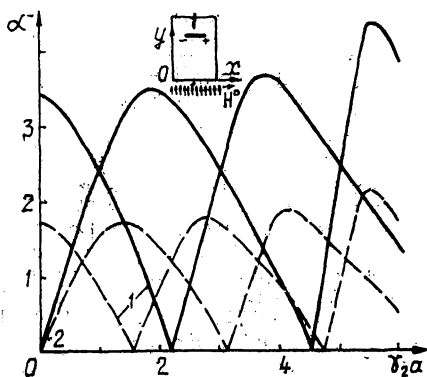


Рис. 1

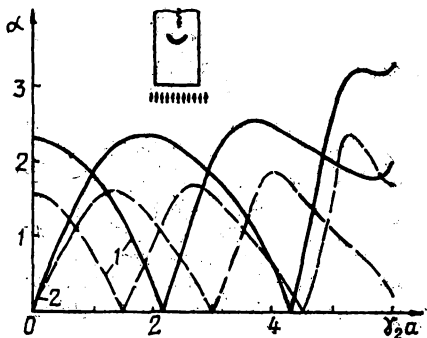


Рис. 2

На рис. 3 показано изменение величины α^- от угла ориентации φ прямолинейной трещины длины $0,4a$ для полуслоя с закреплённым ($A=1$, $\gamma_2 a=4$, кривые 1) и свободным ($A=1$, $\gamma_2 a=\pi/2$, кривые 2) торцом и для слоя ($A=0$, $\gamma_2 a=4$, кривые 3). Уравнения контура L имеют вид $\xi/a=0,5+0,2\beta\cos\varphi$; $\eta/a=1+0,2\beta\sin\varphi$,

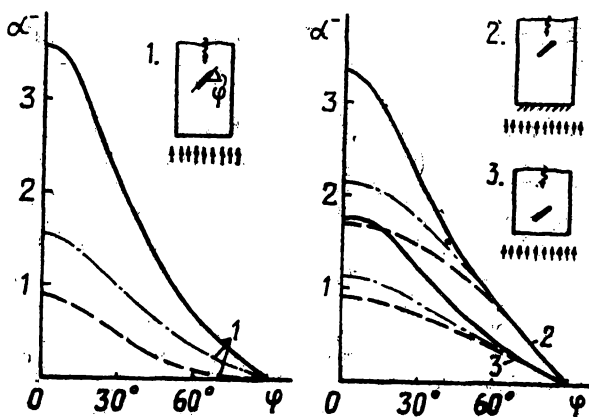


Рис. 3

$-1 \leq \beta \leq 1$. Сплошные кривые соответствуют значению $\chi=1$; штрихпунктирные — $\chi=0,5$; пунктирные — $\chi=0$. Характер влияния магнитного поля на коэффициент интенсивности напряжений K_{III} зависит как от угла ориентации трещины, так и от вида граничного условия на торце $y=0$. Так, приложенное статическое

магнитное поле, соответствующее значению $\chi=1$, значительно увеличивает α^- при $\varphi \in [0, 45^\circ]$ для всех рассматриваемых значений параметра A . В то же время при $\varphi \in [45^\circ, 90^\circ]$ величина α^- резко возрастает в случае закрепленного торца и увеличивается незначительно в случае слоя и свободного торца полуслоя.

Представленные зависимости иллюстрируют возможность управления динамической напряженностью тела при помощи внешнего магнитного поля.

Список литературы: 1. *Новацкий В* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М., 1986. 160 с. 2. *Shindo Y.* Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack in the presence of the magnetic field//Z. angew. Math. und Mech. 1976. 56, № 1. P. 33—41. 3. *Shindo Y.* Diffraction of normal compression waves by a penny-shaped crack in the presence of an axial magnetic field// Int. J. Eng. Sci. 1979. 17, № 5. P. 651—658. 4. *Мухомедовичи Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962. 599 с. 5. *Свешников А. Г.* Принцип предельного поглощения для волновода//Докл. АН СССР. 1951. 80, № 3. С. 345—347. 6. *Erdogan F. E., Gupta G. D., Cook T. S.* The numerical solutions of singular integral equations//Mechanics of Fract. Leyden: Int. Publ. 1973. 1. P. 368—425.

Поступила в редколлегию 05.01.91

УДК 550.34

О. В. АВРАМЕНКО, И. Т. СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук

Кировоград, Киев

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЖИМАЕМОСТИ ЖИДКОСТИ НА ГЕНЕРАЦИЮ ВОЛН В ОКЕАНЕ

Явление генерации волн цунами осесимметричным подъемом дна и анализ влияния сжимаемости жидкости на отклонение свободной поверхности рассматривались в [1]. При этом было установлено, что для моментов времени, соответствующих некоторой окрестности максимального подъема дна, отклонение свободной поверхности для сжимаемой жидкости больше, чем для несжимаемой. В то же время в начале подъема дна, а также при его опускании обнаруживается обратное явление. Здесь на примере простейшей одномерной модели делается попытка провести анализ этого явления во времени.

Рассмотрим идеальную сжимаемую жидкость конечной глубины, покоящуюся на абсолютно жестком дне. Предполагаем, что первоначальное возмущение обусловлено подъемом дна $\delta = \delta(t)$, отклонения малы по сравнению с глубиной жидкости, движение описывается потенциалом скоростей φ , жидкость неограничена и имеет в невозмущенном состоянии постоянную глубину H . Система ориентирована в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z с осью Oz , направленной вертикально вверх, а плоскость $z=0$ расположена на невозмущенной поверхности.