

УДК 539.3: 534.1

© 2006 г. Д. В. Кушнир, Л. А. Фильштинский

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И ИМПУЛЬСНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Рассматривается пространственная задача теории упругости о гармонических колебаниях цилиндрических тел (слой с несколькими туннельными полостями, цилиндр конечной длины) при однородных смешанных граничных условиях на его основаниях. С использованием построенных в работе Фурье-решений граничные задачи сводятся к системе одномерных сингулярных интегральных уравнений хорошо изученного типа. Решение задачи об импульсном возбуждении слоя на поверхности полости “собирается” из пакета соответствующих гармонических колебаний при помощи интегрального преобразования Фурье по времени. Приводятся результаты расчетов динамической концентрации напряжений в слое (плите), ослабленном одним и двумя отверстиями различной конфигурации, амплитудно-частотные характеристики для цилиндра конечной длины с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами и данные расчетов для трапециевидного импульса, действующего на поверхность круговой полости.

При исследовании гармонических колебаний конечного кругового цилиндра либо слоя с полостью эффективно применяются методы однородных решений [1] или суперпозиции [2, 3] и некоторые другие [4, 5]. Если в слое имеется плоская неоднородность типа сквозной трещины или включения, то решение может быть получено (в принципе) по методу однородных решений в сочетании с интегральным преобразованием Фурье [6]. Для множественных плоских трещин, параллельных основаниям слоя, была развита соответствующая теория [7, 8]. В случае конфигураций, отличных от круговых, целесообразно использовать метод интегральных уравнений. При этом возникает проблема соответствия между граничными условиями теории упругости и граничными условиями для совокупности метагармонических функций, фигурирующих в соответствующих однородных решениях (см. [9]).

Иным методом было получено [10] взаимнооднозначное соответствие между плотностями в интегральных представлениях метагармонических функций и физическими величинами – скачками кинематических величин на поверхности цилиндрической неоднородности. Однако этот путь ведет к необходимости регуляризации расходящихся интегралов и, как следствие, приводит к интегро-дифференциальным уравнениям достаточно сложной структуры [10, 11].

Ниже развивается новый подход к исследованию гармонических колебаний многосвязных цилиндрических тел достаточно произвольных конфигураций.

1. Постановка задачи. В декартовой прямолинейной системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим упругий однородный изотропный слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $|x_3| \leq h$, ослабленный сквозными туннельными полостями с общей границей поперечного сечения $\Gamma = \cup \Gamma_v$ ($\cap \Gamma_v = \emptyset$, $v = 1, 2, \dots, N$). Будем полагать, что Γ_v – простые замкнутые контуры без точек самопересечения с непрерывными по Гёльдеру кривизнами. На поверхностях полостей $S = \cup S_v$ зададим вектор напряжений $(X_{1n}, X_{2n}, X_{3n})(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$. На основаниях слоя примем однородные граничные условия смешанного типа

$$u_1 = u_2 = \sigma_{33} = 0, \quad x_3 = \pm h, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

Задача состоит в определении волновых полей вектора перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)$ и тензора напряжений с компонентами σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) при гармоническом или импульсном возбуждении слоя.

Для определения волнового поля перемещений используем систему уравнений Ламе

$$\Delta u_j + \sigma \partial_j \vartheta + \frac{X_j}{\mu} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Delta = \partial_k \partial_k, \quad \vartheta = \partial_k u_k, \quad \sigma = \frac{1}{1 - 2\nu}$$

где Δ – оператор Лапласа в R^3 , ϑ – объемное расширение, X_j – интенсивность объемных сил, μ и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала. Здесь и далее по повторяющимся индексам i, k ведется суммирование от 1 до 3.

Введем обозначения

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \gamma_l = \frac{\omega}{c_l}, \quad \mu_{lm}^2 = \gamma_l^2 - \lambda_m^2, \quad \Delta_{lm} = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \mu_{lm}^2; \quad l = 1, 2$$

где c_1 и c_2 – скорости распространения продольной волны и поперечной (сдвиговой) волны в упругом теле, γ_1 и γ_2 – соответствующие волновые числа.

Рассмотрим сначала гармоническое возбуждение слоя; положим

$$u_j = e^{-i\omega t} U_j, \quad \vartheta = e^{-i\omega t} \theta = e^{-i\omega t} \partial_k U_k, \quad X_j = e^{-i\omega t} Y_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

где $U_j = U_j(x)$, $\theta = \theta(x)$, $Y_j = Y_j(x)$ ($x = (x_1, x_2, x_3)$) – амплитуды соответствующих величин.

Исключая время t в уравнениях (1.2) в соответствии с представлениями (1.3), приходим к системе дифференциальных уравнений в амплитудах

$$\Delta U_j + \sigma \partial_j \partial_k U_k + \gamma_2^2 U_j = -\frac{Y_j}{\mu}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

К системе (1.4) необходимо присовокупить граничные условия на поверхностях полостей

$$S_{ij} n_i = Y_{jn}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

где S_{ij} , Y_{jn} – амплитудные значения величин σ_{ij} и X_{jn} соответственно.

Имея в виду симметричное состояние относительно срединной плоскости слоя, представим амплитуды перемещений и интенсивностей объемных сил в виде рядов Фурье

$$\{U_1, U_2, \theta, Y_1, Y_2\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{1m}, U_{2m}, \theta_m Y_{1m}, Y_{2m}\} \cos \lambda_m x_3$$

$$\{U_3, Y_3\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{3m}, Y_{3m}\} \sin \lambda_m x_3 \quad (1.6)$$

$$U_{jm} = U_{jm}(x_1, x_2), \quad Y_{jm} = Y_{jm}(x_1, x_2); \quad j = 1, 2, 3$$

$$\theta_m = \partial_1 U_{1m} + \partial_2 U_{2m} + \lambda_m U_{3m}, \quad \lambda_m = \pi(2m - 1)/(2h)$$

В этом случае граничные условия (1.1) на основаниях слоя будут выполнены.

Исключив в уравнениях (1.4) толщинную координату x_3 при помощи представлений (1.6), приходим к системе уравнений относительно коэффициентов Фурье U_{jm}

$$\Delta_{2m} U_{lm} + \sigma \partial_l \theta_m = -\frac{Y_{lm}}{\mu}, \quad l = 1, 2; \quad \Delta_{2m} U_{3m} - \sigma \lambda_m \theta_m = -\frac{Y_{3m}}{\mu}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Для исключения толщинной координаты из равенств (1.5) воспользуемся следующими представлениями для амплитуд компонент тензора напряжения и вектора поверхностной нагрузки, согласованными с представлениями (1.6):

$$\begin{aligned} \{S_{uv}, Y_{un}\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{uv}^{(m)}, Y_{un}^{(m)}\} \cos \lambda_m x_3, \quad u, v = 1, 2 \\ \{S_{j3}, Y_{3n}\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{j3}^{(m)}, Y_{3n}^{(m)}\} \sin \lambda_m x_3, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда граничные условия (1.5) распадутся на совокупность равенств вида

$$S_{ij}^{(m)} n_i = Y_{jn}^{(m)}, \quad j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

2. Ф-решения для слоя. Пусть теперь вдоль шнура $x_1 = 0, x_2 = 0, |x_3| \leq h$ распределены усилия с погонными интенсивностями $\{P_1, P_2, P_3\}(x_3)$. Тогда фигурирующие в правых частях уравнений (1.7) коэффициенты Фурье интенсивностей объемных сил примут вид

$$Y_{jm} = P_{jm} \delta(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

где $\delta(x)$ – двумерная дельта-функция.

Под Ф-решениями для слоя, соответствующими смешанным граничным условиям (1.1), будем понимать компоненты матрицы фундаментальных решений системы (1.7) с правыми частями, определенными равенствами (2.1).

Из уравнений (1.7) обычным приемом выводим

$$\Delta_{1m} \theta_m = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} (P_{1m} \partial_1 + P_{2m} \partial_2 + P_{3m} \lambda_m) \delta(x) \quad (2.2)$$

Подробно рассмотрим случай $P_1 \neq 0, P_2 = P_3 = 0$.

Из уравнения (2.2) для рассматриваемого случая получаем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta_{1m} \theta_m^{(1)} = -\frac{P_{1m}}{\mu(1+\sigma)} \partial_1 \delta(x) \quad (2.3)$$

Пусть E – фундаментальное решение оператора Гельмгольца [12]. Учитывая, что функция $\delta(x)$ финитна и свертка $E * \partial_1 f = f * \partial_1 E$ существует, получаем из уравнения (2.3)

$$\theta_m^{(1)} = \frac{iP_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1 H_{01m} \quad (2.4)$$

где

$$H_{plm} = H_p^{(1)}(\mu_{lm} r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad p = 0, 1, 2, 3; \quad l = 1, 2$$

$H_p^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля первого рода, порядка p .

Формула (2.4) дает возможность разделить уравнения в системе (1.7) и представить ее в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{2m} U_{1m}^{(1)} &= -\frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1^2 H_{01m} - \frac{P_{1m}}{\mu} \delta(x) \\ \Delta_{2m} U_{2m}^{(1)} &= -\frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \partial_1 \partial_2 H_{01m}, \quad \Delta_{2m} U_{3m}^{(1)} = \frac{i\sigma P_{1m}}{4\mu(1+\sigma)} \lambda_m \partial_1 H_{01m} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интегрирование системы (2.5) в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(R^2)$ дает

$$U_{1m}^{(1)} = \frac{iP_{1m}}{4\mu} \left(-\frac{1}{\gamma_2^2} \partial_1^2 H + H_{02m} \right), \quad U_{2m}^{(1)} = -\frac{iP_{1m}}{4\mu\gamma_2^2} \partial_1 \partial_2 H, \quad U_{3m}^{(1)} = \frac{iP_{1m}}{4\mu\gamma_2^2} \partial_1 \lambda_m H$$

$$H = H_{01m} - H_{02m}$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда $P_2 \neq 0, P_1 = P_3 = 0$ и $P_3 \neq 0, P_1 = P_2 = 0$. Выпишем окончательные результаты для вектора перемещения

$$U_{nm}^{(j)} = \frac{iP_{jm}}{4\mu} g_{nm}^{(j)} \quad (2.6)$$

Величины $g_{nm}^{(j)}$ – компоненты матрицы Φ -решений для каждого фиксированного значения m

$$g_m = \|g_{nm}^{(j)}\|, \quad n, j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots$$

$$g_{vm}^{(v)} = \frac{1}{2\gamma_{2l}^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^2 ((-1)^v H_{2lm} \cos 2\alpha + H_{0lm}) + H_{02m}, \quad v = 1, 2$$

$$g_{2m}^{(1)} = g_{1m}^{(2)} = -\frac{1}{2\gamma_{2l}^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^2 H_{2lm} \sin 2\alpha \quad (2.7)$$

$$\frac{g_{3m}^{(1)}}{\cos \alpha} = -\frac{g_{1m}^{(3)}}{\cos \alpha} = \frac{g_{3m}^{(2)}}{\sin \alpha} = -\frac{g_{2m}^{(3)}}{\sin \alpha} = -\frac{\lambda_m}{\gamma_2^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm} H_{1lm}$$

$$g_{3m}^{(3)} = \frac{\lambda_m^2}{\gamma_2^2} H + H_{02m}$$

Истинные значения перемещений для общего случая можно определить по формулам

$$u_l = \operatorname{Re} \left(e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} U_{lm}^{(j)} \cos \lambda_m x_3 \right), \quad l = 1, 2; \quad u_3 = \operatorname{Re} \left(e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} U_{3m}^{(j)} \sin \lambda_m x_3 \right) \quad (2.8)$$

Выражения (2.6), (2.8) дают представление о волноводных свойствах слоя. Видно, что при любой частоте возбуждения всегда найдется номер m , при котором характеристическое число μ_{lm} или оба характеристических числа станут чисто мнимыми, что приводит к неоднородным, экспоненциально затухающим по r волнам. При $\pi(2m-1) < 2\gamma_1 h$ первые m членов в рядах (1.6) представляют собой суперпозицию распространяющихся от источника волн. Члены ряда, удовлетворяющие неравенству $\pi(2m-1) > 2\gamma_2 h$, экспоненциально затухают с ростом r , а также с увеличением номера m . Отсюда следует, что чем толще волновод, тем более широкий спектр частот он пропускает.

Из сказанного видно, что остатки рядов (1.6) стремятся к нулю, так как общий член любого из этих рядов экспоненциально убывает с ростом номера m . Можно показать, что эти ряды абсолютно сходятся при $r \neq 0$.

3. Интегральные представления решений граничной задачи (1.7), (1.9). Пусть $f \in C^2(\bar{G})$, где $G = R^\lambda \Gamma$ – физическое поле с линией разрыва Γ . Запишем формулы для обобщенных производных [12]

$$\partial_j f = \{\partial_j f\} + n_j [f] \delta_\Gamma \quad (\partial_1^2 + \partial_2^2) f = \{(\partial_1^2 + \partial_2^2) f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \delta_\Gamma + \frac{\partial}{\partial n} ([f] \delta_\Gamma)$$

где $\{\cdot\}$ – соответствующая классическая производная, $[\cdot]$ – скачок указанной функции на контуре Γ , n_j – проекция орта нормали к контуру Γ на ось x_j ; $[\cdot] \delta_\Gamma$ и $\frac{\partial}{\partial n} ([\cdot] \delta_\Gamma)$ – соответственно простой и двойной слой.

Вводя эти соотношения в систему (1.7) с учетом выражений (2.1), представим ее в виде

$$\Delta_{2m} U_{jm} + \sigma \partial_j \theta_m = f_{jm}, \quad j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots$$

$$f_{jm} = - \left[\frac{\partial U_{jm}}{\partial n} \right] \delta_\Gamma - \frac{\partial}{\partial n} ([U_{jm}] \delta_\Gamma) - \sigma [\theta_m] n_j \delta_\Gamma, \quad n_3 = 0 \tag{3.1}$$

Используя матрицу Φ -решений (2.7), решение системы (3.1) можно представить в виде свертки

$$U_m(x) = \{U_{1m}, U_{2m}, U_{3m}\} = g_m * f_m; \quad x = (x_1, x_2), \quad f_m = \{f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}\}$$

В развернутом виде получаем отсюда интегральные представления волнового поля перемещений (всюду далее, если не оговорено иное, интегрирование ведется по контуру Γ)

$$U_{jm}(x) = \int [U_{km}](y) \frac{\partial}{\partial n_y} g_{jm}^{(k)}(x-y) dS_y -$$

$$- \int \left(\left[\frac{\partial U_{km}}{\partial n} \right] + \sigma [\theta_m] n_k \right) (y) g_{jm}^{(k)}(x-y) dS_y, \quad j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots \tag{3.2}$$

где dS_y – элемент дуги контура Γ , суммирование – по $k = 1, 2, 3$.

В случае, когда контур Γ – совокупность разомкнутых дуг (математических разрезов) Γ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) и вектор напряжения непрерывно продолжим через все Γ_ν , достаточно оставить первое слагаемое в правой части равенства (3.2), т.е. разыскивать решение в виде обобщенных потенциалов двойного слоя. Для решения рассматриваемой здесь задачи оставим только второе слагаемое и будем искать решение в виде обобщенных потенциалов простого слоя, которые в развернутом виде выглядят так:

$$U_{1m}(z) = \frac{1}{\gamma_2} \int \left[D_m \frac{\partial}{\partial \xi_1} H + p_m \gamma_2^2 H_{02m} \right] dS, \quad U_{2m}(z) = \frac{1}{\gamma_2} \int \left[D_m \frac{\partial}{\partial \xi_2} H + q_m \gamma_2^2 H_{02m} \right] dS$$

$$U_{3m}(z) = \frac{1}{\gamma_2} \int [\lambda_m D_m H + r_m \gamma_2^2 H_{02m}] dS, \quad \theta_m(z) = \int D_m H_{01m} \frac{dS}{1 + \sigma} \tag{3.3}$$

$$D_m = -p_m \frac{\partial}{\partial \xi_1} - q_m \frac{\partial}{\partial \xi_2} + r_m \lambda_m$$

Функции

$$p_m = \{p_m^\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma_\nu\}, \quad q_m = \{q_m^\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma_\nu\}, \quad r_m = \{r_m^\nu(\zeta), \zeta \in \Gamma_\nu\}$$

подлежат определению; $\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in \Gamma = \cup \Gamma_v$, dS – элемент дуги контура Γ , $\zeta - z = re^{i\alpha}$; функция $H = H(r)$ определена в разд. 2.

4. Разрешающая система интегральных уравнений. Граничные условия (1.9) на контуре Γ целесообразно представить в комплексной форме

$$S_1^{(m)} - e^{\pm 2i\psi} S_2^{\pm(m)} = 2e^{i\psi} (Y_1^{(m)} \mp iY_2^{(m)}) = 2(N^{(m)} \mp iT^{(m)})$$

$$e^{i\psi} S_3^{-(m)} + e^{-i\psi} S_3^{+(m)} = 2Y_3^{(m)}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

$$S_1^{(m)} = S_{11}^{(m)} + S_{22}^{(m)}, \quad S_2^{\pm(m)} = S_{22}^{(m)} - S_{11}^{(m)} \pm 2iS_{12}^{(m)}, \quad S_3^{\pm(m)} = S_{13}^{(m)} \pm iS_{23}^{(m)}$$

где ψ – угол между нормалью к контуру Γ и осью Ox_1 , $N^{(m)}$ и $T^{(m)}$ – коэффициенты Фурье амплитуд нормальных и касательных напряжений на Γ .

Используя закон Гука в амплитудах, получим представления введенных в (4.1) комбинаций через компоненты вектора перемещений

$$S_1^{(m)} = 2\mu(\sigma\theta_m - \lambda_m U_{3m}), \quad S_2^{\pm(m)} = -2\mu(\partial_1 \mp i\partial_2) \frac{\partial}{\partial z} V_m^{\mp}$$

$$S_3^{\pm(m)} = \mu\{(\partial_1 \mp i\partial_2)U_{3m} - \lambda_m V_m^{\mp}\}; \quad V_m^{\pm} = U_{1m} \pm iU_{2m} \quad (4.2)$$

Введем функции y_{jm} равенствами

$$p_m = y_{1m}e^{i\psi} + y_{2m}e^{-i\psi}, \quad q_m = i(y_2e^{-i\psi} - y_{1m}e^{i\psi}), \quad r_m = y_{3m} \quad (4.3)$$

Подставив предельные значения комбинаций (4.2) в граничные равенства (4.1) с использованием представлений (3.3) и принимая во внимание формулы (4.3), получим систему сингулярных интегральных уравнений граничной задачи (1.7), (1.9)

$$\mp iy_{jm}(\zeta_0) + \frac{1}{4} \int y_{km}(\zeta) K_{jk} dS = \frac{1}{4\mu} \chi_j^{(m)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

Здесь

$$\chi_1^{(m)} = (Y_1^{(m)} + iY_2^{(m)})e^{-i\psi_0}, \quad \chi_2^{(m)} = (Y_1^{(m)} - iY_2^{(m)})e^{i\psi_0}, \quad \chi_3^{(m)} = 2Y_3^{(m)}$$

$$K_{11} = \left[\frac{1}{2(1-\nu)} \mu_{1m} H_{11m}^0 - \lambda_m^2 g_{1m} + \{g_{4m} + 2\mu_{2m} H_{12m}^0\} e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \right] e^{i(\psi - \alpha_0)}$$

$$K_{12} = \left[\frac{1}{2(1-\nu)} \mu_{1m} H_{11m}^0 - \lambda_m^2 g_{1m} - g_{3m} e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \right] e^{i(\alpha_0 - \psi)}$$

$$K_{13} = \lambda_m \left[\frac{1}{2(1-\nu)} H_{01m}^0 - H_{02m}^0 - \frac{\lambda_m^2}{\gamma_2} H^0 - g_{2m} e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \right]$$

$$K_{31} = 2\lambda_m [g_{2m} e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} - g_{0m} - H_{02m}^0] e^{i(\psi - \psi_0)}$$

$$K_{33} = 2[2\lambda_m^2 g_{1m} + \mu_{2m} H_{12m}^0] \cos(\alpha_0 - \psi_0)$$

$$\zeta_0 \in \Gamma = \cup \Gamma_v, \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$$

$$g_{0m} = \frac{1}{\gamma_{2l=1}^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^2 H_{0lm}^0, \quad g_{jm} = \frac{1}{\gamma_{2l=1}^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^j H_{jlm}^0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$g_{4m} = \frac{1}{\gamma_{2l=1}^2} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \mu_{lm}^3 H_{1lm}^0, \quad H_{plm}^0 = H_p^{(1)}(\mu_{lm} r_0), \quad H^0 = H(r_0)$$

$$p = 0, 1, 2, 3; \quad l = 1, 2$$

Ядра $K_{22}, K_{21}, K_{23}, K_{32}$ получаются из $K_{11}, K_{21}, K_{13}, K_{31}$ заменой α_0, ψ_0, ψ на $-\alpha_0, -\psi_0, -\psi$ соответственно.

Суммарный индекс системы (4.4) равен нулю; следовательно, она однозначно разрешима для любой частоты ω , не принадлежащей спектру.

Замечание. Систему (4.4) можно использовать как для исследования волновых полей в слое (плите) с полостями, оставляя при внеинтегральных членах нижний знак, так и при рассмотрении колебаний цилиндров конечной длины (верхний знак).

Далее понадобится также выражение для нормального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на граничных поверхностях Γ . Используя соотношения (3.3) и (4.2), представим его в виде

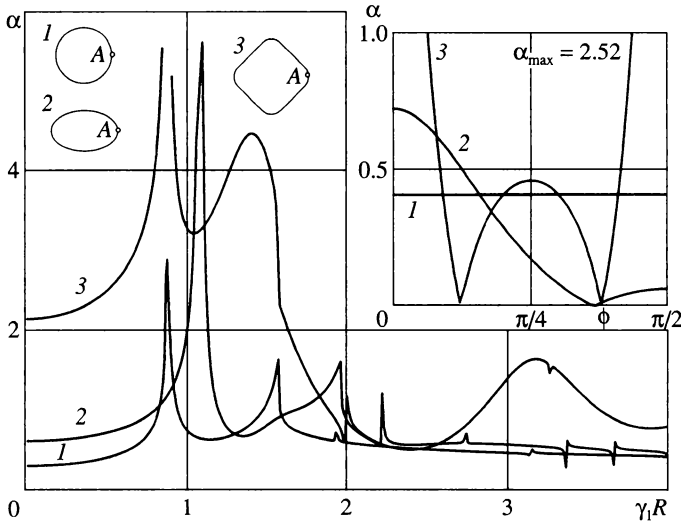
$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= |S_{\theta\theta}| \cos(\omega t - \Omega); \quad \Omega = -\arg S_{\theta\theta}, \quad S_{\theta\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{\theta\theta}^{(m)} \cos \lambda_m x_3 \\ S_{\theta\theta}^{(m)} &= S_1^{(m)} - N^{(m)} = \mp \frac{i(y_{1m}(\zeta_0) + y_{2m}(\zeta_0))}{1 - \nu} + \\ &+ \int \left\{ (y_{1m}(\zeta) e^{i(\psi - \alpha_0)} + y_{2m}(\zeta) e^{i(\alpha_0 - \psi)}) \left(\frac{\mu_{1m}}{2(1-\nu)} H_{11m}^0 - \lambda_m g_{1m} \right) + \right. \\ &\left. + y_{3m}(\zeta_0) \lambda_m \left[\frac{1}{2(1-\nu)} H_{01m}^0 - H_{02m}^0 - \frac{\lambda_m^2}{\gamma_2^2} H^0 \right] \right\} dS - N^{(m)}, \quad \zeta_0 \in \Gamma \end{aligned} \tag{4.5}$$

Рассмотрим теперь импульсное возбуждение слоя с туннельной сквозной полостью. Введя интегральное преобразование Фурье по времени

$$U_j(x, \omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u_j(x, t) e^{i\omega t} dt, \quad u_j|_{t=0} = \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$u_j(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} U_j(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega; \quad j = 1, 2, 3$$

приводим граничную задачу (1.7), (1.9) относительно трансформант Фурье соответствующих плотностей к системе интегральных уравнений (4.4), где правые части представляют теперь спектральные функции действующей на поверхности полости нагрузки. Решение импульсной задачи является суперпозицией “элементарных” решений по всему спектру частот.



Фиг. 1

5. Некоторые результаты. Пусть слой ослаблен туннельной полостью с контуром поперечного сечения в виде эллипса ($\zeta = R_1 \cos \phi + i R_2 \sin \phi$) или квадрата со скругленными углами ($\zeta = R(e^{i\phi} + 0.14036e^{-3i\phi})$). На поверхность полости действует гармонически изменяющееся во времени нормальное давление с амплитудой

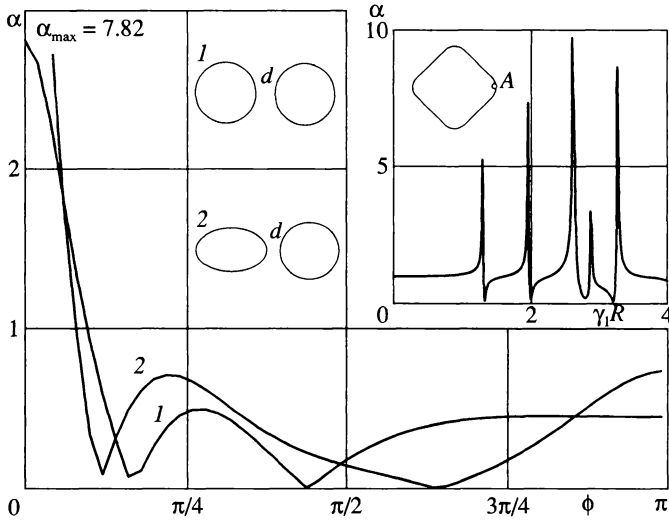
$$N = N_0 \cos \frac{\pi x_3}{2h} \quad (N_0 = \text{const}) \quad (5.1)$$

Расчеты проводили в следующей последовательности. Сначала находили приближенное численное решение системы интегральных уравнений (4.4) по методу механических квадратур [13], затем по соотношениям (4.5) восстанавливали амплитудные значения механических напряжений $\sigma_{\theta\theta}$.

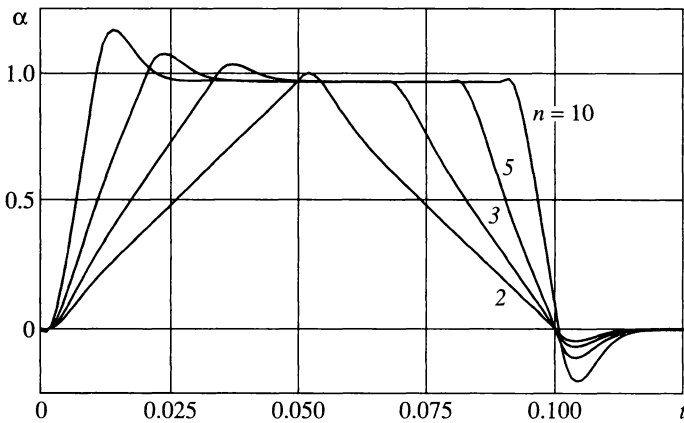
Изменение относительной величины $\alpha = |S_{\theta\theta}/N_0|$ в точке A ($x_3 = 0$) в зависимости от относительного волнового числа $\gamma_1 R$ для полости кругового ($R_1 = R_2 = R = 1$), эллиптического ($R_1 = 3/2, R_2 = 1, R = (R_1 + R_2)/2$) и “квадратного” ($R = 1$) сечения представлено на фиг. 1. Здесь $h = 1, \nu = 0.28$. Кривые 1, 2 и 3 построены для круга, эллипса и квадрата соответственно. В правом верхнем углу фиг. 1 показано распределение величины α вдоль кругового, эллиптического и квадратного контуров в срединной плоскости слоя при тех же параметрах и в том же соответствии, что и выше, для $\gamma_1 R = 0.5$ (это распределение симметрично относительно оси $\phi = \pi/2$).

Рассмотрим теперь слой, ослабленный двумя туннельными полостями. Кривая 1 на фиг. 2 иллюстрирует распределение величины α вдоль контура отверстия (в срединной плоскости слоя) для случая двух круговых полостей одинакового радиуса $R = 1$ при перемычке между ними $d = 0.1$. Кривая 2 соответствует распределению величины α вдоль контура эллиптического отверстия ($R_1 = 3/2, R_2 = 1$), взаимодействующего с круговым отверстием ($R = 1$) при $d = 0.1$. В обоих случаях на поверхности полостей действует нормальное давление с амплитудой (5.1). Остальные параметры те же, что и выше.

В правой верхней части фиг. 2 представлена амплитудно-частотная характеристика величины α в точке A для цилиндра конечной длины с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами для тех же значений параметров, что и выше.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть на поверхность круговой полости действовал трапециевидный импульс давления (T – продолжительность импульса)

$$N = N_0 \cos \frac{\pi x_3}{2h} \begin{cases} \tilde{t}, & 0 \leq \tilde{t} \leq 1 \\ 1, & 1 < \tilde{t} \leq n-1 \quad (n \geq 2), \quad \tilde{t} = \frac{t}{T} \\ (n - \tilde{t}), & n-1 < \tilde{t} \leq n \end{cases}$$

Результаты расчетов эволюции относительной величины $\alpha = \sigma_{00}/N_0$ во времени для разных значений n представлены на фиг. 3 при

$$T = 0.1, \quad h = 100, \quad x_3 = 0, \quad R = 10, \quad \nu = 0.28$$

Таким образом, развит достаточно эффективный метод решения пространственных граничных задач о гармонических колебаниях многосвязного цилиндрического тела при смешанных граничных условиях на его основаниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела (Москва, 1996). М.: Наука, 1968. С. 116–136.
2. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
3. *Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Гринченко В.Т., Украинский Л.Е.* Осесимметричная смешанная задача стационарной динамической теории упругости для слоя с цилиндрическим отверстием // Прикл. механика. 1998. Т. 34. № 1. С. 39–46.
4. *Wang H., Williams K.* Vibrational modes of thick cylinders of finite length // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 191. № 5. P. 955–971.
5. *Дзюбак Л.П., Янютин Е.Г.* Нестационарное деформирование полого цилиндра конечной длины // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 5. С. 123–131.
6. *Шалдырван В.А., Васильев Т.А.* Туннельная трещина в трансропном слое // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 8-й Междунар. конф. г. Ростов-на-Дону. Ростов-на-Дону: Изд-во “Новая книга”, 2003. Т. 1. С. 211–215.
7. *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
8. *Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
9. *Ворович И.И., Малкина О.С.* Напряженное состояние толстой плиты // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 230–241.
10. *Фильшинский Л.А.* Растяжение слоя, ослабленного туннельными разрезами // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 827–835.
11. *Fil'shtinskii L.A., Kovalev Yu.D., Ventsel E.S.* Solution of the elastic boundary value problems for a layer with tunnel stress raisers // Intern. J. Solids and Struct. 2002. V. 39. № 26. P. 6385–6402.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
13. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 235 с.

Сумы (Украина)
e-mail: leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Поступила в редакцию
13.IX.2004