ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ, КОТОРЫЕ ОПИСЫВАЮТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Мальченков С.М., студент, Белоус Е.А., доцент, СумГУ, г. Сумы

Многие прикладные проблемы, связанные с задачами выбора, управления и проектирования, сводятся, как правило, к принятию решения на основе исследования математических моделей. Каждая математическая модель отображает взаимосвязь тех количественных свойств объекта, которые являются существенными для решаемой задачи.

Оптимизационная задача базируется, как правило, на математической модели управляемого объекта, цели управления или критерии качества, на установленных ограничениях на траекторию системы, длительность процесса управления, классе допустимых управлений и т.д.

Рассмотрим три основных задачи оптимального управления, когда математическая модель процесса представлена дифференциальным уравнением (системой дифференциальных уравнений):

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad t \in [t_0, T] \qquad (1)$$

где $u \in R^m$ – управление; $x \in R^n$ – фазовый вектор системы; $f \in R^n$ – заданная функция; - евклидово пространство размерности n.

Придавая управлению u разные возможные значения, получаем различные состояния объекта, среди которых выбирается оптимальное [1].

Критерий качества формально записывают в виде условия минимума некоторого функционала J, зависящего от управления u и траектории x(t)

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)\, dt + \varphi(T, x(T)) \to min, \qquad (2)$$

Задача (1) - (2) называется задачей Больца. Если F 0 то задача называется задачей Майера, а если $\varphi \equiv 0$, - то задачей Лагранжа.

Решить задачу оптимального управления - это означает найти такой закон управления u при котором достигается минимум функционала J, или определяются условия существования оптимального управления, при этом, функция u удовлетворяет соответствующим условиям.

Рассмотрим данные задачи при условии, что соотношение (1) представлено в виде системы дифференциальных уравнений, где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $f(t, x, u) = \{f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u)\}$ а - вектор-функция. Отметим, что время t может быть как фиксированной (для одних задач) так и не фиксированной (в других задачах) величиной. При этом допускаем, что правая часть равенства (1) такова, что задача Коши $\dot{x} = f(t, x, u_0(t))$ при $x(t_0) = x_0$ для каждой кусочно-непрерывной функции $u = u_0(t)$ имеет единственное решение

$x = x_0$ (t) для всех $t \in [t_0, T]$. Для этого достаточно учесть, например, что вектор-функция $f(t, x, u)$ является непрерывной и удовлетворяет условие Липшица по переменной x [2].

Для каждой кусочно-непрерывной на отрезке $[t_0, T]$ функции управления $u = u(t)$ и для соответствующего решения $x = x$ (t) задачи Коши определен функционал

$$J[u] = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt \qquad (3)$$

Задача Лагранжа. Найти кусочно-непрерывной на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функцию $u = u_0(t)$, такую, чтобы при подстановке в функционал (3) совместно с решением соответствующей задачи Коши это выражение получило наименьшее значение, то есть выполнилось равенство:

$$min \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt = \int_{t_0}^{T} F(t, x_0(t), u_0(t))dt \qquad (4)$$

Рассмотрим функционал $J[u] = \varphi(x(T)),$ (5)

где $\varphi(x)$ - некоторая заданная функция.

Задача Майера. Найти кусочно-непрерывной на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функцию $u = u_0(t)$, такую, чтобы при $x = x_0$ (t) функционал (5) приобрел наименьшее значение.

Задача Больца. Найти на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функцию $u = u_0(t)$, такую, чтобы при подстановке в функционал

$$J[u] = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt \qquad (6)$$

вместе с решением $x = x_0$(t) соответствующей задачи Коши выражение (6) обрело наименьшее значение.

Список литературы

1. Колмановский В.Б. Задачи оптимального управления // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 6. С. 121-127.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление -2-е изд.- М: Физматлит. 2005. 344 с.