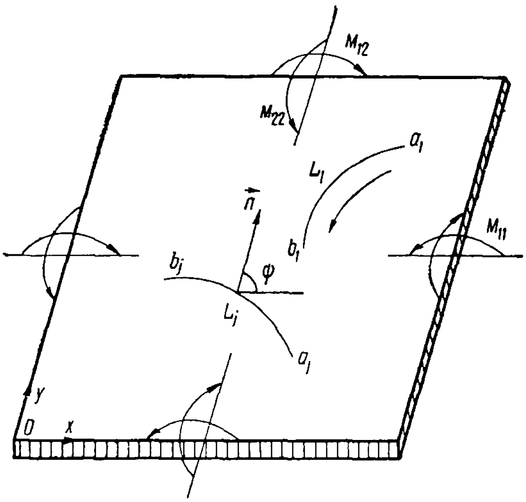
УДК 539.3

Л. А. Фильштинский, В. А. Хандогин

ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Методом работы [4] рассмотрена краевая задача теории тонких анизотропных пластин с несколькими криволинейными разрезами. Аналогичная задача для изотропной пластины иным методом решена в работе [2].

§ 1. Формулировка краевой задачи. Пусть неограниченная анизотропная пластинка, ослабленная k криволинейными разрезами L_j $(j=\overline{1,k})$, нагружена на бесконечности изгибающими и крутящими моментами M_{11}, M_{22}, M_{12}. Будем предполагать, что L_j — простые, непересекающиеся разомкнутые дуги Ляпунова. На берегах разрезов зададим изгибающие моменты $m^{\pm}(t)$ и обобщенную перерезывающую силу $q^{\pm}(t)$, причем будем считать, что $m^{+}(t)=m^{-}(t)$ и $q^{+}(t)=q^{-}(t)$ (знак $+$ относится к левому берегу L_j при движении от начала разреза — a_j к концу — b_j). Требуется определить напряжения в пластине в окрестности разрезов.



Указанная задача сводится к построению двух аналитических функций $w_1(z_1)$ и $w_2(z_2)$, описывающих усилия и моменты в пластине [1] и удовлетворяющих на L_j краевому условию

$$A(\psi)\,w_1''(t_1)+\overline{B(\psi)\,w_1''(t_1)}+C(\psi)\,w_2''(t_2)=M(t);$$

$$A(\psi)=\alpha t_1'(s);\; B(\psi)=\beta t_1'(s);\; C(\psi)=\gamma t_2'(s);$$

$$\alpha=\frac{\overline{A}_2B_1}{\overline{\mu}_2}-\frac{A_1\overline{B}_2}{\mu_1};\; \beta=\frac{A_2B_1}{\mu_2}-\frac{A_1B_2}{\mu_1};\; \gamma=\frac{\overline{A}_2B_2}{\overline{\mu}_2}-\frac{A_2\overline{B}_2}{\mu_2};$$

$$t_\nu'(s)=\frac{dt_\nu(s)}{ds}=\mu_\nu\cos\psi-\sin\psi;\; t\in L=\bigcup_{j=1}^{k}L_j \qquad (\nu=1,2);$$

$$A_\nu=D_{11}+D_{12}\mu_\nu^2+2D_{16}\mu_\nu;\; B_\nu=D_{12}+D_{22}\mu_\nu^2+2D_{26}\mu_\nu; \tag{1.1}$$

$$t_\nu=\operatorname{Re}t+\mu_\nu\operatorname{Im}t;\; z_\nu=\operatorname{Re}z+\mu_\nu\operatorname{Im}z \qquad (\nu=1,2);$$

$$\overline{M(t)}=q_*(t)\left(B_2\sin\psi-\frac{A_2}{\mu_2}\cos\psi\right)-m_*(t)\left(B_2\cos\psi+\frac{A_2}{\mu_2}\sin\psi\right);$$

$$m_*(t)=M_{11}\cos^2\psi+M_{22}\sin^2\psi+M_{12}\sin 2\psi-m(t);$$

$$q_*(t)=B+(M_{22}-M_{11})\cos\psi\sin\psi+M_{12}\cos 2\psi-\int\limits_0^{s(t)}q(s_0)\,ds_0.$$

Здесь D_{ij} — соответствующие цилиндрические жесткости; μ_ν $(\nu=1,2)$ — характеристические числа [1]; t — предельное значение аффикса z на L; ψ — угол между внешней нормалью к левому берегу разрезов и осью ox (см. рисунок); s, s_0 — натуральные координаты дуг; $B=\{B_j$ на $L_j\}$ — постоянные интегрирования.

Представления искомых функций возьмем в виде

$$w_\nu''(z_\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{p_\nu(t)\,dt_\nu}{t_\nu-z_\nu} \qquad (\nu=1,2); \tag{1.2}$$

$$p_\nu(t)=\{p_{\nu j}(t),\ t\in L_j\} \qquad (j=\overline{1,k}).$$

§ 2. Основное сингулярное уравнение задачи. Подставляя предельные значения (1.2) на L в (1.1), приходим к связи между $p_1(t)$ и $p_2(t)$

$$C(\psi)\,p_2(t)=M_1(t)-A(\psi)\,p_1(t)-\overline{B(\psi)\,p_1(t)} \tag{2.1}$$

и основному сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p_1(t)\,dt_1}{t_1-t_{10}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K_1(t,t_0)\,p_1(t)\,dt_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{K_2(t,t_0)\,p_1(t)\,dt_1}=N(t_0);$$

$$K_1(t,t_0)=\frac{d}{dt_{10}}\ln\frac{t_1-t_{10}}{\bar t_2-\bar t_{20}};\ t_{\nu 0}=\operatorname{Re}t_0+\mu_\nu\operatorname{Im}t_0;\ t_0\in L; \tag{2.2}$$

$$K_2(t,t_0)\,\overline{B(\psi_0)}=A(\psi_0)\frac{d}{dt_{10}}\ln\frac{t_1-t_{10}}{t_2-t_{20}};\ 2\overline{B(\psi_0)}\,\overline{N(t_0)}=M_2(t_0)-\frac{c(\psi_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{M_1(t)\,dt_2}{C(\psi)(t_2-t_{20})};$$

$$M_1(t)=M^+(t)-M^-(t);\ M_2(t)=M^+(t)+M^-(t).$$

Здесь $M^+(t)$ и $M^-(t)$ — значения $M(t)$ на левом и правом берегах разрезов L соответственно.

При сделанных допущениях относительно L ядра $K_1(t,t_0)$ и $K_2(t,t_0)$ могут иметь не более, чем слабую особенность [3]. Действительно,

$$K_1(t,t_0)=\frac{1}{t_1'(s_0)}\left(\frac{1}{\cos\Theta+\bar\mu_2\sin\Theta}-\frac{1}{\cos\Theta+\mu_1\sin\Theta}\right)\frac{d\Theta}{ds_0};$$

$$\frac{\overline{B(\psi_0)}}{A(\psi_0)}K_2(t,t_0)=\frac{1}{t_1'(s_0)}\left(\frac{1}{\cos\Theta+\mu_2\sin\Theta}-\frac{1}{\cos\Theta+\mu_1\sin\Theta}\right)\frac{d\Theta}{ds_0}; \tag{2.3}$$

$$\frac{d\Theta}{ds_0}=\frac{\sin(\Theta-\Theta_0)}{|t-t_0|};\ \Theta=\arg(t-t_0);\ \psi_0=\psi(s_0),$$

где Θ_0 — угол между положительной касательной к L в точке t_0 и осью ox.

Система уравнений (2.2) имеет наиболее простой вид, когда разрезы L_j прямолинейны и расположены на одной прямой,

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{p_1(t)\,dt_1}{t_1-t_{10}}=N(t_0). \tag{2.4}$$

К основному уравнению (2.2) необходимо присовокупить k условий однозначности тангенциального перемещения $u+iv$ и k условий однозначности функций прогиба w.

Интегрируя функции (1.2), находя приращения функций $w'_\nu(z_\nu)$ и $w_\nu(z_\nu)$ при обходе вокруг контура L^j, учитывая (2.1) и формулы для тангенциальных смещений u и v в пластине [1], получаем условие однозначности смещений u и v

$$\int\limits_{L_j} p_1(t)\,dt_1 = 0 \quad (j=\overline{1,k}) \tag{2.5}$$

и условия однозначности функции прогиба

$$\operatorname{Re}\int\limits_{L_j} p_1(t)\left(t_1 - \frac{\alpha}{\gamma}t_2 - \frac{\beta}{\gamma}\bar{t}_2\right)dt_1 = 0 \quad (j=\overline{1,k}). \tag{2.6}$$

Поскольку решение уравнения (2.2) разыскивается в классе h_0 [3], дополнительные условия (2.5) и (2.6) удовлетворяются за счет постоянных интегрирования B_j, фигурирующих в правой части краевого условия (1.1), и появляющихся произволов в функции $p_1(t)$.

§ 3. **Предельный переход к изотропной среде.** Система (2.2) допускает прямой предельный переход по схеме работы [4]. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательные результаты

$$M_{xx} + M_{yy} = -8D(1+\mu)\operatorname{Re}\Phi(z);$$

$$M_{yy} - M_{xx} + 2iM_{xy} = 4D(1-\mu)\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right];$$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L \frac{p(t)\,dt}{t-z}; \quad \Psi(z) = \frac{1}{4\pi i n}\int\limits_L \frac{\overline{p(t)}\,e^{-2i\psi}}{t-z}\,dt +$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L p(t)\left(2 + e^{-2i\psi} + \frac{\bar{t}}{t-z}\right)\frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{M_1(t)\,dt}{t-z}; \quad n = \frac{1-\mu}{3+\mu}. \tag{3,1}$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона; D — цилиндрическая жесткость.

Для плотности $p(t)$ получаем сингулярное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{p(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L G_1(t,t_0)\,p(t)\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{G_2(t,t_0)}\,\overline{p(t)\,dt} = N(t_0);$$

$$G_1(t,t_0) = \frac{d}{dt_0}\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}; \quad G_2(t,t_0) = 2n\frac{(t-t_0)+(\bar{t}-\bar{t}_0)\,e^{2i\psi_0}}{(t-t_0)^2}; \tag{3.2}$$

$$N(t_0) = \frac{1}{2(3+\mu)D}\left[(m_*^+(t_0) + m_*^-(t_0)) + i\,(q_*^+(t_0) + q_*^-(t_0))\right].$$

где $m_*^+(t)$, $m_*^-(t)$ и $q_*^+(t)$, $q_*^-(t)$ — значения $m_*(t)$, $q_*(t)$ на левом и правом берегах разрезов L соответственно.

§ 4. **Асимптотические выражения для моментов в окрестности концов разрезов.** Используя асимптотические значения интеграла типа Коши в окрестности концов линии интегрирования [3] и выражения для моментов [1], находим

$$M_{xx} = -\frac{1}{\sqrt{r_j}}\operatorname{Re}\sum_{\nu=1}^{2} A_\nu\,\Omega_\nu(c_j)\,\Gamma_\nu(\vartheta_j); \quad r_j = |z-c_j|;$$

$$M_{yy} = -\frac{1}{\sqrt{r_j}}\operatorname{Re}\sum_{\nu=1}^{2} B_\nu\,\Omega_\nu(c_j)\,\Gamma_\nu(\vartheta_j); \quad \vartheta_j = \arg(z-c_j);$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{r_j}} \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{2} C_\nu \Omega_\nu (c_j) \Gamma_\nu (\vartheta_j); \quad a_{1j} = \operatorname{Re} a_j + \mu_1 \operatorname{Jm} a_j; \; b_{1j} = \operatorname{Re} b_j + \mu_1 \operatorname{Im} b_j;$$

$$\Omega_1 (c_j) = \frac{1}{\sqrt{b_{1j} - a_{1j}}} \lim_{t \to c_j} [p_1 (t) \sqrt{(t_1 - a_{1j})(t_1 - b_{1j})}];$$

$$\Omega_2 (c_j) = -\frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{t_1' (c_j)}{t_2' (c_j)} \right)^{1/2} \Omega_1 (c_j) - \frac{\overline{\beta}}{\gamma} \left(\frac{\overline{t_1' (c_j)}}{\overline{t_2' (c_j)}} \right)^{1/2} \overline{\Omega_1 (c_j)};$$

$$C_\nu = D_{16} + D_{26}\mu_\nu^2 + 2D_{66}\mu_\nu; \quad \Gamma_\nu^{-1} (\vartheta_j) = \sqrt{\pm (\cos \vartheta_j + \mu_\nu \sin \vartheta_j)} \quad (\nu = 1, 2). \tag{4.1}$$

Здесь a_j и b_j — начало и конец дуги L_j; верхний знак берется при $c_j = b_j$ и нижний при $c_j = a_j$; величины A_ν и B_ν заданы в (1.1).

В изотропном случае из (4.1) получаем

$$k_B (c_j) - i k_S (c_j) = \frac{3\sqrt{\pi}(3 + \mu) D}{h^2 \sqrt{2 (b_j - a_j)}} \lim_{t \to c_j} [p (t) \sqrt{(t - a_j)(t - b_j)}], \tag{4.2}$$

где h — толщина пластинки; k_B и k_S — соответствующие коэффициенты интенсивности.

§ 5. Примеры. Приведем результаты решений для одного прямолинейного разреза, ориентация которого определяется углом $\psi = -\pi/2$. Основное уравнение имеет вид (2.4).

Введем натуральный параметр $s \in [-l, l]$, отсчитываемый от середины разреза. Тогда $t_\nu = s$, $\nu = 1,2$. Решение основного уравнения имеет вид

$$p_1 (s_0) = \frac{1}{\pi i \sqrt{s_0^2 - l^2}} \int_{-l}^{+l} N (s) \frac{\sqrt{s^2 - l^2}}{s - s_0} ds;$$

$$\Omega_1 (l) = -\frac{1}{\pi \sqrt{2l}} \int_{-l}^{+l} N (s) \sqrt{\frac{l + s}{l - s}} ds. \tag{5.1}$$

Асимптотика моментов (4.1) для прямолинейной трещины с помощью (5.1) приводится к виду ($c_j = l$; $\vartheta_j = \vartheta$)

$$M_{xx} = \frac{k_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{A_1 A_2}{\beta \mu_1 \mu_2} (\mu_2 \Gamma_2 (\vartheta) - \mu_1 \Gamma_1 (\vartheta)) \right] + \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\beta} (B_1 A_2 \Gamma_2 (\vartheta) - B_2 A_1 \Gamma_1 (\vartheta)) \right];$$

$$M_{yy} = \frac{k_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{A_1 B_2}{\mu_1} \Gamma_2 (\vartheta) - \frac{A_2 B_1}{\mu_2} \Gamma_1 (\vartheta) \right) \right] + \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{B_1 B_2}{\beta} (\Gamma_2 (\vartheta) - \Gamma_1 (\vartheta)) \right];$$

$$M_{xy} = \frac{k_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{A_2 C_1}{\mu_2} \Gamma_1 (\vartheta) - \frac{A_1 C_2}{\mu_1} \Gamma_2 (\vartheta) \right) \right] + \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\beta} (C_1 B_2 \Gamma_1 (\vartheta) - C_2 B_1 \Gamma_2 (\vartheta)) \right]. \tag{5.2}$$

Здесь k_1 и k_2 — коэфффициенты интенсивности моментов, по смыслу аналогичные коэффициентам интенсивности напряжений.

Имеет место равенство

$$\frac{A_2}{\mu_2} k_1(l) + B_2 k_2(l) = -\sqrt{2\pi}\,\beta\,\overline{\Omega_1(l)}. \tag{5.3}$$

Если к берегам трещины в точке $s=\xi$ приложены сосредоточенные изгибающий M_n и крутящий M_{ns} моменты, то для k_1 и k_2 из (5.3) получаем

$$k_1(l) = \frac{M_n}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}}\,; \quad k_2(l) = \frac{M_{ns}}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}}\,. \tag{5.4}$$

Если к берегам трещины приложены распределенные изгибающий $m(s)$ и крутящий $h(s)$ моменты и на бесконечности действуют изгибающие M_{11}, M_{22} и крутящие M_{12} моменты, то коэффициенты интенсивности имеют вид

$$\begin{aligned} k_1(l) &= \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{+l} m(s) \sqrt{\frac{l+s}{l-s}}\, ds - M_{22}\sqrt{\pi l}; \\ k_2(l) &= M_{12}\sqrt{\pi l} + \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{+l} h(s) \sqrt{\frac{l+s}{l-s}}\, ds. \end{aligned} \tag{5.5}$$

С помощью асимптотических выражений моментов (5.2) можно получить асимптотики напряжений в вершине трещины по известному правилу $\sigma_{ij}=12zh^{-3}M_{ij}$ (z — расстояние от нейтрального слоя), интенсивность которых принято определять коэффициентами k_B и k_S, связанными с k_1 и k_2 соотношениями

$$k_B = 6h^{-2}k_1; \quad k_S = 6h^{-2}k_2. \tag{5.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: Гостехиздат, 1957.—355 с.
2. Линьков А. М., Меркулов В. А. Задача об изгибе пластин с разрезами.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 1, с. 111—119.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 512 с.
4. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 5, с. 91—97.

Сумский филиал
Харьковского политехнического института
Новосибирский электротехнический институт

Поступила
15.XI 1977 г.