

УДК 539.375 : 534.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ТУННЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Фильштинский Л. А.

Рассматривается стационарный волновой процесс в полупространстве с туннельными криволинейными трещинами в условиях антиплоской деформации. Возникающие краевые задачи сводятся к сингулярным интегродифференциальным уравнениям, которые реализуются численно. Если конец трещины выходит на границу полупространства, то в ядре интегродифференциального уравнения помимо подвижной особенности типа Коши появляется еще и неподвижная особенность, что существенным образом меняет характер волновых полей напряжений продольного сдвига. Ниже этот случай исследуется детально. Отмечаются некоторые особенности рассматриваемых волновых процессов. Приводятся результаты расчетов динамического коэффициента интенсивности напряжений.

Напряжения в телах при импульсных нагружениях рассмотрены в [1]. Различные динамические задачи теории упругости для среды с прямолинейным разрезом содержатся в [2, 3]. В [4] изложены методы расчета дифракции и рассеяния электромагнитных волн.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полупространство $x_2 \geq 0$, в котором имеется K криволинейных туннельных вдоль оси x_3 разрезов L_j (фиг. 1, а). Пусть граница полупространства $x_2 = 0$ либо свободна от сил (напряжение $\tau_{23} = 0$ при $x_2 = 0$), либо заземлена (смещение $w = 0$ при $x_2 = 0$), на берегах L_j задана гармоническая во времени нагрузка $Z_n^\pm = \text{Re}(e^{-i\omega t} Z^\pm)$, а из бесконечности излучается монохроматическая волна продольного сдвига

$$(1.1) \quad w_0 = \text{Re}(e^{-i\omega t} W_0), \quad \gamma_2 = \omega/c_2, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$$

$$W_0 = \tau \exp[-i\gamma_2(x_1 \cos \beta_* + x_2 \sin \beta_*)], \quad \tau = \text{const}$$

Здесь ω — круговая частота, c_2 — скорость распространения волны сдвига, μ и ρ — модуль сдвига и плотность материала среды, w_0 — упругое смещение вдоль оси x_3 , $\beta_* \neq 0$ — угол между нормалью к фронту волны и осью x_1 .

Предполагаем, что амплитуда нагрузки $Z^+ = -Z^- = Z$ удовлетворяет на $L = \cup L_j$ условию Гельдера, а L_j — простые непересекающиеся гладкие дуги Ляпунова, обладающие непрерывной по Гельдеру кривизной [5].

Порождаемое внешними воздействиями сингулярное поле напряжения продольного сдвига выражается через перемещения по формулам [6]

$$(1.2) \quad \tau_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \tau_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad w = \text{Re}[e^{-i\omega t}(W + W_0)]$$

$$\nabla^2 W + \gamma_2^2 W = 0$$

Величина W_0 определена в (1.1), а W описывает возмущенное волновое поле, удовлетворяющее одному из указанных выше краевых условий на границе полупространства и краевому условию на L вида

$$(1.3) \quad e^{i\psi} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (W + W_0) \right]^\pm + e^{-i\psi} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (W + W_0) \right]^\pm = \pm \frac{Z^\pm}{\mu}, \quad \zeta \in L$$

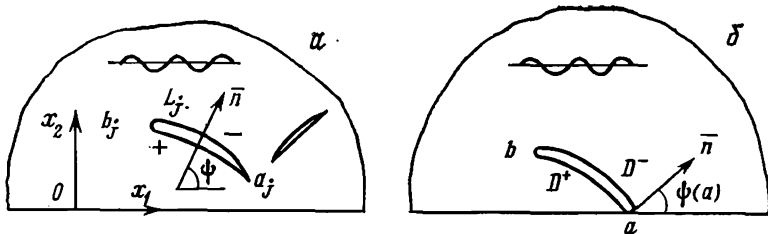
Верхний знак относится к левому берегу разреза (при движении от его начала a_j к концу b_j), ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу в точке ζ и осью x_1 .

Обобщая [7], представим искомую функцию W в виде

$$(1.4) \quad W(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_L p(\zeta) \left[\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) - A \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1) \right] d\zeta - \\ - \frac{1}{2} \int_{\bar{L}} p(\zeta) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) - A \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1) \right] d\bar{\zeta} - AW_1$$

$$W_1 = \tau \exp[-i\gamma_2(x_1 \cos \beta_* - x_2 \sin \beta_*)], \quad r = |z - \zeta|, \quad r_1 = |z_1 - \bar{\zeta}| \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2$$

Здесь $p(\zeta) = \{p_j(\zeta), \zeta \in L_j\}$ — искомые функции, $H_\nu^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля порядка ν , $A = 1$ для случая закрепленного полупространства



Фиг. 1

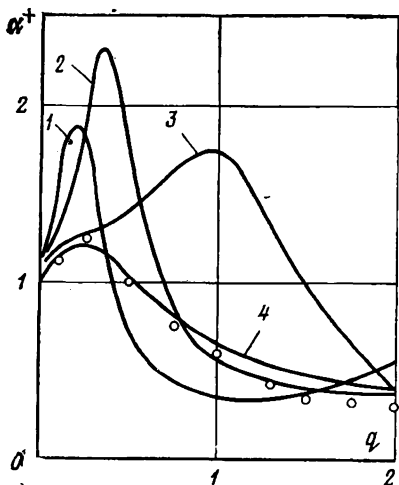
ства и $A = -1$ для полупространства со свободной от сил границей $x_2 = 0$; $\bar{\zeta}$ — величина, комплексно сопряженная с ζ . Можно показать, учитывая легко выводимые соотношения

$$(1.5) \quad \frac{\partial^n}{\partial z^n} H_0^{(1)}(\gamma r) = \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{-i\alpha} H_n^{(1)}(\gamma r), \quad r = |z - z_0| \\ \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} H_0^{(1)}(\gamma r) = \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{i\alpha} H_n^{(1)}(\gamma r), \quad \alpha = \arg(z - z_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma^2}{4} H_0^{(1)}(\gamma r), \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_0 = x_{10} + ix_{20}$$

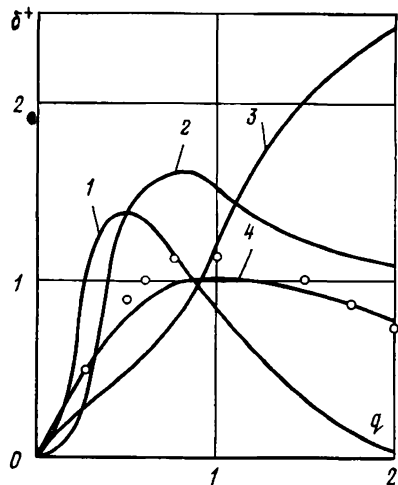
что представления (1.4) удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1.2) и соответствующим условиям на бесконечности ($x_2 = +\infty$), при $A = 1$ автоматически дают условия заземления $w(x_1, 0, t) = 0$, а при $A = -1$ — условие $\tau_{23}(x_1, 0, t) = 0$.

2. Интегральное уравнение краевой задачи (1.3) для случая, когда разрезы не выходят на границу полупространства. Дифференцируя функцию W из (1.4) и используя при этом формулы (1.5), имеем (ds — элемент дуги контура L)

$$(2.1) \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dp(\zeta)}{\zeta - z} + \int_L p(\zeta) K_1(\zeta, z) ds - A \frac{\partial W_1}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{L}} \frac{dp(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \int_{\bar{L}} p(\zeta) K_2(\zeta, z) ds - A \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}} \\ K_1(\zeta, z) = \frac{i\gamma_2^2}{8} e^{i\psi} [AH_0^{(1)}(\gamma_2 r_1) + H_2(\gamma_2 r) e^{-2i\alpha}] - \\ - \frac{i\gamma_2^2}{8} e^{-i\psi} [H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + AH_2^{(1)}(\gamma_2 r_1) e^{-2i\alpha_1}] \\ K_2(\zeta, z) = \frac{i\gamma_2^2}{8} e^{i\psi} [H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + AH_2^{(1)}(\gamma_2 r_1) e^{2i\alpha_1}] - \\ - \frac{i\gamma_2^2}{8} e^{-i\psi} [H_2(\gamma_2 r) e^{2i\alpha} + AH_0^{(1)}(\gamma_2 r_1)] \\ H_2(\gamma_2 r) = \frac{4i}{\pi\gamma_2^2 r^2} + H_2^{(1)}(\gamma_2 r), \quad \alpha = \arg(z - \zeta), \quad \alpha_1 = \arg(z - \bar{\zeta})$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Используя поведение интегралов типа Коши, входящих в (2.1) в окрестности концов линии интегрирования L [5], формулы (4.1) и (1.2), находим асимптотические значения напряжений в окрестности вершин трещины

$$(4.2) \quad \tau_{13} - i\tau_{23} = \mp \frac{\mu}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \exp \left[\frac{i}{4} (\pm \pi - 2\psi(\pm 1) - 2\Theta) \right] \times \\ \times \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1)], \quad s'(\pm 1) = \frac{ds}{d\beta} \Big|_{\beta=\pm 1} \\ r = |z - c|, \quad \Theta = \arg(z - c)$$

Здесь верхний знак относится к вершине трещины $c = b$, нижний — к вершине $c = a$.

На продолжении за вершину трещины получаем

$$(4.3) \quad \tau_{13} - i\tau_{23} = \frac{\mu e^{-i\psi(\pm 1)}}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1)] \\ \tau_n = \tau_{13} \cos \psi(\pm 1) + \tau_{23} \sin \psi(\pm 1) = \frac{\mu}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1)]$$

Таким образом, наибольшее сдвигающее напряжение действует на площадке, являющейся продолжением трещины за вершину.

Динамический коэффициент интенсивности напряжений определяется формулой [3]

$$(4.4) \quad k_3 = \sqrt{2\pi r} \tau_n = \mu \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1)]$$

Рассмотрим теперь случай, когда вершина трещины a выходит на границу полуплоскости $x_2 = 0$. Если граница закреплена, то, согласно методу сингулярных решений [3], в секторе с острым углом раствора напряжения τ_{13} , τ_{23} конечны, а в дополнительном секторе они обладают степенной особенностью, порядок которой σ определяется в (3.6). В случае, когда трещина выходит к закрепленной границе под прямым углом или когда граница полуплоскости свободна от сил, напряжения у точки a конечны.

5. Результаты расчетов. Рассматривалась параболическая трещина, параметрическое уравнение которой

$$(5.1) \quad \xi_1 = p_1\beta, \quad \xi_2 = p_2 + p\beta^2, \quad -1 \leq \beta \leq 1$$

Интегральное уравнение (2.4) с учетом (4.1) и (5.1) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $\Omega_0(\beta)$ в узлах интерполяции согласно процедуре работы [9]. Результаты расчетов представлены на фиг. 2—4.

На фиг. 2 приведены значения $\alpha^+ = \mu |\Omega_0(1)| / (Z \sqrt{l s'(1)})$, на фиг. 3 — значения $\delta^+ = \arg \Omega_0(1)$ в зависимости от переменной $q = \gamma_2^2 l^2 / 4$ (l — половина длины трещины) для случая $\tau = 0, Z \neq 0, p_1 = 1$. Кривая 1 отвечает значениям $p_2 = 1, A = -1, p = 0,05$; кривая 2 — значениям $p_2 = 1, A = -1, p = 1$; кривая 3 — значениям $p_2 = 1, A = 1, p = 1$; кривая 4 соответствует «прямой» трещине в неограниченной среде ($p = 0,05, A = 0$). Здесь же для сравнения точками нанесены соответствующие данные работы [10].

Зная величины α^+, δ^+ , можно вычислить динамический коэффициент интенсивности k_3 по формуле

$$k_3 = Z \sqrt{\pi l} \alpha^+ \cos(\omega t - \delta^+)$$

На фиг. 4 даны в зависимости от q значения $\alpha_1^+ = |\Omega_0(1)| \sqrt{l} / (\tau \sqrt{s'(1)})$ (сплошные линии) и $\delta_1^+ = \arg \Omega_0(1)$ (штриховые линии) для случая $Z = 0, \tau \neq 0, p_1 = 1$, причем $p_2 = \pi / \gamma_2, p = 10^{-4}, A = 1$ (кривые 1); $p_2 = \pi / (2\gamma_2), p = 10^{-4}, A = -1$ (кривые 2); $p_2 = \pi / \gamma_2, p = 1, A = 1$ (кривые 3). Динамический коэффициент интенсивности для этого случая вычисляется по формуле

$$k_3 = \mu \tau \sqrt{\pi l} \alpha_1^+ \cos(\omega t - \delta_1^+)$$

Из приведенных результатов видно, что кривизна трещины существенно влияет на коэффициент k_3 .

На актуальность динамических задач теории упругости для полупространства в связи с проблемой идентификации дефектов указывал Ильющин А. А. на Всесоюзной конференции по теории упругости (Ереван, ноябрь 1979 г.).

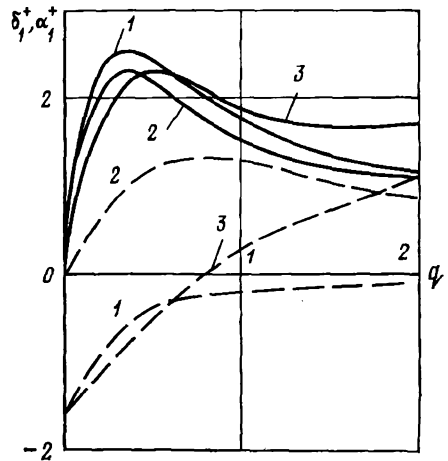
Автор благодарит А. Т. Гуменного за помощь при численной реализации алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. М.: Высшая школа, 1975. 463 с.
2. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
6. Ильющин А. А. Механика сплошной среды, М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
7. Фильштинский Л. А. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига).— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6, с. 1327—1330.
8. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
9. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
10. Бородачев Н. М. Динамическая задача о трещине в случае деформации продольного сдвига.— Проблемы прочности, 1973, № 4, с. 23—25.

Сумы

Поступила в редакцию
22.V.1981



Фиг. 4