

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

В. М. Гусятин, канд. техн. наук, доцент;

М. В. Гусятин, инженер,

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
пр. Ленина, 14, Харьков, 61166, Украина

E-mail: vmgus@rambler.ru

Предлагается метод построения пространственной кривой с использованием сферической интерполяции. Метод основан на использовании простейшего квадрата – сферы. Исходными данными являются произвольно заданные точки, а также нормали в этих точках заданные или рассчитанные. Метод позволяет при заданных двух точках и нормалях локально строить гладкую кривую требуемой формы. В статье приведены основные соотношения для построения интерполяционной кривой. Такое представление пространственной кривой позволяет упростить синтез векторных изображений в компьютерной графике методом обратного трассирования.

Ключевые слова: моделирование кривых и поверхностей, квадрат, интерполяция, сеточная модель.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач в современной компьютерной графике является повышение реалистичности синтезируемых сцен [1]. Выполнение требования высокой реалистичности является важным фактором, например, при проектировании систем визуализации тренажеров транспортных средств различного назначения, при создании художественных или научно-популярных фильмов с применением компьютерной графики и др. Главным направлением из возможных путей решения этой проблемы является применение метода обратного трассирования при решении задач синтеза изображений [2, 3]. Этот метод позволяет синтезировать изображение аналитически описываемых поверхностей без их предварительной триангуляции, что существенно повышает реалистичность синтезируемых изображений объектов. Метод обратного трассирования активно развивается в последние годы [3]. Одной из особенностей этого метода является нахождение точки пересечения проекционного луча с поверхностью синтезируемого объекта. Эта операция существенно упрощается, если для интерполяции, кривой, заданной точками в пространстве, или поверхности, заданной полигонами, используются алгебраические кривые или поверхности, записанные в неявной форме. В этом случае, наличие такой особенности у метода обратного трассирования, как возможность работы с аналитическими кривыми и поверхностями позволяет синтезировать гладкие кривые и поверхности, если даже они заданы точками в пространстве, что позволяет повысить реалистичность синтеза изображений объектов [4-12]. Такой подход также решает важную задачу совместимости метода обратного трассирования с накопленной базой моделей и программного обеспечения, которая ориентирована на метод прямого трассирования. Таким образом, поиск новых методов моделирования гладких геометрических форм пространственных точечно-заданных кривых или полигональных поверхностей с целью их дальнейшей визуализации методом обратного трассирования по-прежнему является актуальной задачей на данном этапе развития компьютерной графики.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ

Моделирование кривых и криволинейных поверхностей, интерполирующих точки, которые заданы в пространстве, является одной из важнейших задач компьютерной графики. Различными авторами разработан ряд методов решения этой задачи [5-12]. Рассмотрим некоторые основные методы моделирования гладких геометрических форм кривых и поверхностей. Одним из самых удобных математических методов описания криволинейных форм объектов является их представление при помощи кусков параметрических кривых, поверхностей или сплайнов [4-8]. Недостатком такого представления является сложность соединения кусков поверхностей между собой с выполнением условия непрерывности, как самой поверхности, так и ее производной. Использование сплайнов более высоких порядков обеспечивает непрерывное соединение участков поверхностей [5, 6]. Такой подход дает хорошие по качеству результаты, однако для каждого треугольника необходимо формирование параметрических сплайнов четвертой и пятой степени, что существенно повышает требования к производительности аппаратных средств [5, 6]. Параметрическое описание предусматривает, что исходной позицией проекционного луча, строящего изображение, является точка на поверхности, что затрудняет применение алгоритмов синтеза изображений с использованием метода обратного трассирования. Эта особенность параметрических поверхностей заставила исследователей обратиться к алгебраическим поверхностям [7-11]. Авторами работ [7, 8] предлагается использовать для интерполяции алгебраические поверхности высоких порядков. Недостатком такого подхода является сложность расчета коэффициентов таких поверхностей, которая ограничивает использование этого подхода для интерполяции сеток, конфигурация которых меняется при анимации синтезируемых объектов. В [9] предлагается для интерполяции исходной сетки высокой детализации использовать алгебраическую поверхность второго порядка. В целом данный метод имеет достаточно высокую ресурсоемкость. По мнению автора этого метода, он может быть использован в системах интерактивного объемно-ориентированного геометрического моделирования. В работах [11, 12] предлагается использовать метод сферической интерполяции, который основан на использовании простейшего квадрата – сферы. Такой подход упрощает нахождение точки пересечения проекционного луча с интерполирующей поверхностью методом обратного трассирования [10].

ЦЕЛЬ СТАТЬИ

Излагается метод построения (конструирования) пространственной кривой с использованием сферической интерполяции. Такое представление пространственной кривой позволяет упростить синтез векторных изображений методом обратного трассирования в компьютерной графике.

МЕТОД КОНСТРУИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

1. *Область интерполяции и формирование нормалей.* В процессе моделирования пространственных кривых, интерполирующих произвольно расположенные точки в пространстве, важно определиться с областью интерполяции и векторным полем направляющих. По аналогии с [12] область интерполяции определим локально для двух последовательно заданных точек. Векторное поле направляющих, на которых собственно и будут лежать точки интерполирующей кривой, определим как прямые, лежащие на некоторой линейчатой поверхности (см. ниже) и расположенные перпендикулярно к прямой линии, соединяющей две последовательно заданные точки в области

интерполяции. На рисунке 1 в системе координат (с/к) XYZ показан набор произвольно расположенных точек $p_1(x_1, y_1, z_1) - p_{12}$, которые пронумерованы в порядке их задания. Эти исходные данные дополняются единичными нормальными в каждой точке $n_1\{n_1x, n_1y, n_1z\} - n_{12}$. Нормали могут быть, как и точки, заданы, либо получены расчетом с учетом расположения точек. Как один из вариантов, направление нормалей в точке может совпадать с биссектрисами углов, образованных линиями, соединяющими эту точку с соседними и лежать в плоскости этих линий.

2. *Соотношения для построения интерполирующих сфер.* Основной особенностью метода является использование такого квадрата как сфера для построения кривой произвольной формы между двумя точками. Наличие нормалей к будущей кривой в каждой точке, через которые она проходит, позволяет получить наряду со связностью (C0) [1,11] и непрерывность первой производной т. е. гладкость (C1) конструируемой кривой. Для конструирования кривой выполним следующие геометрические построения. Через концы отрезка каждой прямой, например, через точки p_1, p_2 проведем две сферы с центрами o_1 и o_2 :

$$|r_1 - ro_1| = R_1; |r_2 - ro_2| = R_2, \quad (1)$$

где r_1, r_2 – радиус-векторы точек p_1, p_2 ; ro_1, ro_2 – радиус-векторы точек центра сфер, а R_1, R_2 – радиусы этих сфер.

При этом центр o_1 одной сферы должен находиться на прямой, проходящей через точку p_1 и совпадающей с нормалью n_1 в этой точке. Центр o_2 второй сферы должен находиться на прямой, проходящей через точку p_2 и совпадающей с нормалью n_2 . Определим координаты центров этих сфер. Для этого запишем нормали с учетом их компонент:

$$n_1\{n_1x, n_1y, n_1z\}; n_2\{n_2x, n_2y, n_2z\}. \quad (2)$$

Запишем уравнение плоскости $F_{1,2}$, проходящей через середину отрезка p_1p_2 и перпендикулярно к этому отрезку. Пусть это будет точка $p_{1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$. Тогда уравнение плоскости $F_{1,2}$ в векторной форме имеет вид: $(r - r_{1,2})p_1p_2 = 0$.

Перепишем это уравнение в координатной форме:

$$(x - x_{1,2})(x_2 - x_1) + (y - y_{1,2})(y_2 - y_1) + (z - z_{1,2})(z_2 - z_1) = 0. \quad (3)$$

И окончательно, используя уравнение (3), запишем уравнение плоскости F_{12} в общей форме:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4)$$

где $A = x_2 - x_1; B = y_2 - y_1; C = z_2 - z_1; D = -(x_{1,2}A + y_{1,2}B + z_{1,2}C)$.

Запишем уравнения прямых, проходящих через точки p_1 и p_2 параллельно к соответствующим нормальным n_1 и n_2 . Для точки p_1 имеем

$$(x - x_1) / n_1x = (y - y_1) / n_1y = (z - z_1) / n_1z.$$

По аналогии для точки p_2

$$(x - x_2) / n_2 x = (y - y_2) / n_2 y = (z - z_2) / n_2 z. \quad (5)$$

Найдем точки пересечения плоскости (4) с прямыми (5). Для этого перепишем уравнения прямых (5) в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + n_1 x t; & y &= y_1 + n_1 y t; & z &= z_1 + n_1 z t; \\ x &= x_2 + n_2 x t; & y &= y_2 + n_2 y t; & z &= z_2 + n_2 z t. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим (6) в (4) и найдем соответственно для каждой из прямых (5) значения параметров t_1 и t_2 в точке пересечения их с плоскостью (4).

Тогда для прямой, проходящей через точку p_1 , имеем

$$t_1 = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1) / (An_1x + Bn_1y + Cn_1z).$$

По аналогии для прямой, проходящей через точку p_2 , имеем

$$t_2 = -(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2) / (An_2x + Bn_2y + Cn_2z). \quad (7)$$

Подставив t_1 и t_2 в (6), найдем координаты центра сфер o_1 и o_2 :

$$\begin{aligned} x_{o_1} &= x_1 + n_1 x t_1, & y_{o_1} &= y_1 + n_1 y t_1, & z_{o_1} &= z_1 + n_1 z t_1; \\ x_{o_2} &= x_2 + n_2 x t_2, & y_{o_2} &= y_2 + n_2 y t_2, & z_{o_2} &= z_2 + n_2 z t_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Окончательно, после подстановки (8) в (1) для определения радиусов уравнения сфер в векторной форме имеют вид:

$$|r - r_{o_1}| = R_1; |r - r_{o_2}| = R_2. \quad (9)$$

3. Основные соотношения для построения пространственной кривой. Выполним построение пространственной кривой, например, между точками p_1 и p_2 . Для этого запишем уравнение для любой точки p на отрезке $p_1 p_2$ в векторной форме (параметрический вид):

$$p = p_1 + p_1 p_2 t. \quad (10)$$

Запишем компоненты векторов для двух отрезков прямых, соединяющих центры окружностей o_1 и o_2 с центром отрезка $p_1 p_2$:

$$\begin{aligned} p_{o_1} \{ p_{o_1 x} &= (x_{o_1} - (x_1 + x_2) / 2, p_{o_1 y} = (y_{o_1} - (y_1 + y_2) / 2, p_{o_1 z} = (z_{o_1} - (z_1 + z_2) / 2, \}, \\ p_{o_2} \{ p_{o_2 x} &= (x_{o_2} - (x_1 + x_2) / 2, p_{o_2 y} = (y_{o_2} - (y_1 + y_2) / 2, p_{o_2 z} = (z_{o_2} - (z_1 + z_2) / 2, \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее найдем в векторной форме (параметрический вид) уравнения прямых, проходящих через произвольную точку (10) и параллельно векторам p_{o_1} и p_{o_2} :

$$r = p + p_{o_1} t^0; r = p + p_{o_2} t^0 \quad (12)$$

Подставляем (12) в уравнения сфер (9) и находим значения t^0 , при которых выполняется пересечение прямых (12) соответственно со сферами (9). Пусть это будут: для первой сферы t_{11}^0, t_{12}^0 , а для второй t_{21}^0, t_{22}^0 . Подставим эти значения в уравнение (12) и получим для каждой точки пересечения значения координат в с/к XYZ. Для каждой сферы имеем по две точки пересечения. Пусть это будут для первой и второй сферы соответственно:

$$\begin{aligned} & p_{11}^0(x_{11}^0, y_{11}^0, z_{11}^0), p_{12}^0(x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0); \\ & p_{21}^0(x_{21}^0, y_{21}^0, z_{21}^0), p_{22}^0(x_{22}^0, y_{22}^0, z_{22}^0). \end{aligned} \quad (13)$$

Для правильного выбора корней в решениях (13) для каждой сферы соответственно определим функцию, используя уравнения плоскостей, проведенных соответственно через точки p_1 и p_2 перпендикулярно векторам (11):

$$L_1 = (r - r_1)\overline{po_1}, L_2 = (r - r_2)\overline{po_2}. \quad (14)$$

Подставим в равенство (14) координаты центров сфер o_1 и o_2 . По результатам этих подстановок получим эталонные значения этих функций:

$$os_1 = L_1(o_1), os_2 = L_2(o_2). \quad (15)$$

Подставляя (13) в (14) и попарно сравнивая результат с (15), выбираем из пары корней тот, который имеет знак, противоположный знакам os_1 и os_2 или равен нулю. Пусть, например это будут p_{11}^0 и p_{21}^0 . С учетом (10) запишем выражения для векторов:

$$s_{11} = p_{11}^0(t) - p(t), s_{21} = p_{21}^0(t) - p(t). \quad (16)$$

Окончательно выражение для радиуса – вектора, задающего точку на конструируемой кривой, например, на отрезке между точками p_1, p_2 , запишем в виде соотношения:

$$r_{12}(t) = p(t) + (s_{11}(1 - t) + s_{21}t)k, \quad (17)$$

где k – коэффициент коррекции кривой; t – параметр, изменяющейся от нуля до единицы. В уравнении (17) второе слагаемое образует векторное поле направляющих, на которых собственно и будут лежать точки интерполирующей кривой. При изменении параметра t образуется некоторая линейчатая поверхность, в которой лежат направляющие вектора, расположенные перпендикулярно к отрезку p_1p_2 , как это следует из соотношений (12).

4. *Математическое моделирование.* Моделирование предлагаемого метода выполнено с использованием математического пакета Wolfram Mathematica. На рис.1 представлены результаты моделирования. Показаны произвольно расположенные, пронумерованные в порядке их задания точки $p_1 - p_{12}$ и интерполирующая кривая, построенная в

соответствии с предлагаемым методом и проведенная через эти точки с учетом порядка их задания.

Наряду с построением интерполяционной кривой с помощью пакета Wolfram Mathematica выполнена оценка погрешности конструируемой кривой. В качестве эталонных кривых выбраны кривые типа спираль с постоянным и переменным радиусом. Для таких разных кривых погрешность будем оценивать как относительную погрешность отклонения точек конструируемой кривой от эталонных, лежащих на направляющей прямой. Запишем в нашем случае относительную погрешность в следующей форме:

$$\delta = \Delta / M, \quad (18)$$

где Δ – абсолютная погрешность отклонения точек конструируемой кривой от эталонных, лежащих на направляющей прямой; M – некоторый параметр, имеющий максимальное значение, для той или иной эталонной функции. В нашем случае это максимальное значение диаметра спирали.

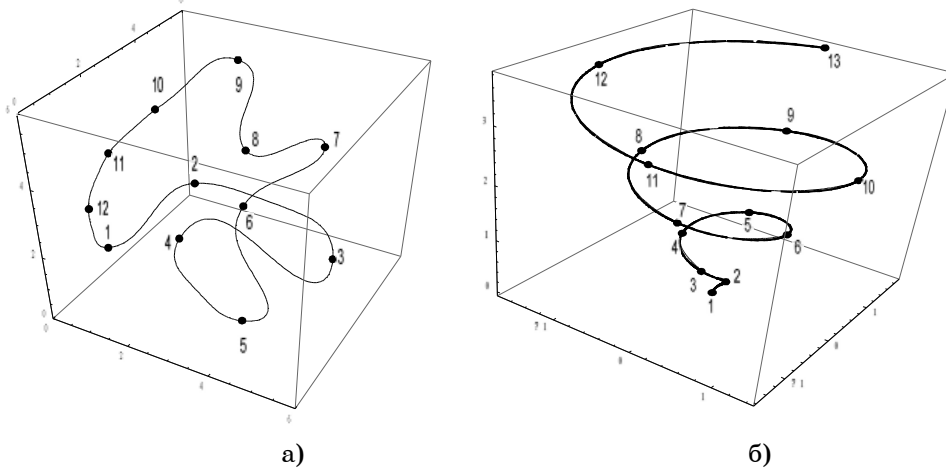


Рисунок 1 – а) исходное задание точек $p_1 - p_{12}$ и интерполирующая их кривая; б) пример интерполирования по точкам $p_1 - p_{13}$ кривой – спираль с переменным радиусом

На рис. 1 б) показан пример интерполирования кривой – спираль с переменным радиусом (проведена сплошной линией), интерполяционная кривая (проведена пунктирной линией). В таблице 1 приведены результаты оценки погрешности в соответствии с (18). В колонке нормаль представлены два случая: первый – нормаль совпадает с биссектрисой; второй – нормаль рассчитана аналитически для эталонных кривых.

Таблица 1 – Результаты оценки погрешности интерполяции

| Эталон – спираль | Кол. точек интерпол. | Нормаль | δ_{\max} |
|------------------|----------------------|-------------------------|-----------------|
| $R = const$ | 13 | биссектриса аналитик | 0,011 0,011 |
| $R = var$ | 13 | биссектриса аналитик | 0,028 0,028 |

ВЫВОДЫ

Метод позволяет построить пространственную гладкую кривую как локально для двух точек, так и для ансамбля произвольно расположенных точек в порядке их задания. Метод основан на использовании простейшего квадрата – сферы, что упрощает расчеты при конструировании кривой. Дальнейшая работа авторов направлена на построение поверхностей предлагаемым методом, а также визуализацию этих кривых и поверхностей методом обратного трассирования

BUILDING A SPACE CURVE BY SPHERICAL INTERPOLATION METHOD IN TASKS OF COMPUTER GRAPHICS

*V.M. Gusiatin, M. V. Gusiatin,
Kharkov National University of Radioelectronics,
14, Street Lenin, 61166, Kharkov, Ukraine
E-mail: vmgus@rambler.ru*

A method of constructing a space curve using spherical interpolation is offered. The method is based on a simple quadric-sphere. The initial data are randomly given points. Normals at these points are either given or calculated. The method allows for the given two points and the normal to build locally smooth curve of the desired shape. The paper presents the basic relations for the construction of the interpolation curve. Such representation of the space curve allows to simplify the synthesis of vector images in the computer graphics by ray-tracing technique.

Key words: modeling of curve and surfaces, quadrics, interpolation, grid model.

ПОБУДОВА ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ МЕТОДОМ СФЕРИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ В ЗАДАЧАХ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

*В. М. Гусятін, М. В. Гусятін,
Харківський національний університет радіоелектроніки,
пр. Леніна, 14, Харків, 61166, Україна
E-mail: vmgus@rambler.ru*

Пропонується метод побудови просторової кривої з використанням сферичної інтерполяції. Метод заснований на використанні найпростішого квадрата-сфери. Вихідними даними є довільно задані точки, а також нормалі в цих точках задані або розраховані. Метод дозволяє при заданих двох точках і нормалях локально будувати гладку криву необхідної форми. У статті наведені основні співвідношення для побудови інтерполяційної кривої. Таке представлення просторової кривої дозволяє спростити синтез векторних зображень в комп'ютерній графіці методом зворотного трасування.

Ключові слова: моделювання кривих та поверхонь, квадрат, інтерполяція, сіткова модель.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Computer Graphics (principles and practice) / J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes. – Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1996. – 1175 p.
2. Иванов В. П. Трехмерная компьютерная графика / В. П. Иванов, А. С. Батраков; под ред. Г. М. Полищука. – М. : Радио и связь, 1995. – 224 с.: ил.
3. Hurley J. Ray Tracing Goes Mainstream / Jim Hurley // Intel Technology Journal "Compute-Intensive, Highly Parallel Applications and Uses". – 2005. – May 19, Vol. 09. – Issue 02.
4. Hahmann S. Polynomial Surface Interpolating Arbitrary Triangulations / Stefanie Hahmann, George-Pierre Bonneau // IEEE Transaction On Visualization And Computer Graphics. – January-march 2003. –Vol. 9, No. 1. – P. 99-109.
5. Barth W. Efficient Ray Tracing for Bezier and B-Spline Surfaces / W. Barth and W. Sturzlinger // Computers & Graphics. – 1993. – Vol. 17(4). – P. 423-430.
6. Campanga S. Improving Bezier Clipping and Chebyshev Boxing for Ray Tracing Parametric Surfaces. / S. Campanga and P. Slusallek // Technical report, University of Erlangen, Computer Graphics Group. – 1996.
7. Turk G. Modelling with Implicit Surfaces that Interpolate / G. Turk, J. O' Brien// ACM Transactions on Graphics – 2002. – Vol. 21(4). – P. 855-873.
8. Bajaj C. Modeling with Cubic A-Patches / C. Bajaj, J. Chen, G. Xu // ACM Trans. on Graphics. – 1995. – Vol. 14 (2). – P. 103-133.
9. Вяткин С. И. Моделирование сложных поверхностей с применением функций возмущения / С. И. Вяткин // Автометрия. – 2007. – № 3.

10. Гусятин В. М. Метод уменьшения итераций в алгоритмах синтеза изображений реального масштаба времени / В. М. Гусятин // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 1. – С. 99-100.
11. Гусятин В. М. Метод сферической интерполяции триангулированных поверхностей / В. М. Гусятин, А. Е. Громенко, Р. В. Сорокин // Материалы второй международной научной конференции «Современные информационные системы. Проблемы и тенденции развития». – Харьков-Туапсе, 2007. – С. 495-496.
12. Гусятин В. М. Векторное поле направляющих в задаче моделирования криволинейных поверхностей методом сферической интерполяции / В. М. Гусятин, М. В. Гусятин // Вимірjувальна та обчислювальна технiка в технологiчних процесах. – Хмельницький, 2012. – №1. – С. 88-92.

Поступила в редакцию 26 февраля 2013 г.