

## О ВЛИЯНИИ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РОТОРОВ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ НАСОСОВ

**В. И. Симоновский**, д-р. техн. наук, профессор;

**А. Г. Хализева**, магистр,

Сумский государственный университет,  
ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, 40007, Украина

Разработаны дискретные математические модели для исследования колебаний ротора центробежного насоса, учитывающие реакции жидкостной плёнки подшипников скольжения и уплотнений проточной части. На основе использования программ, реализующих построение областей устойчивости, проведено исследование совместного влияния щелевых уплотнений и подшипников скольжения на устойчивость роторов.

**Ключевые слова:** ротор, центробежный насос, дискретная модель, подшипник скольжения, циркуляционная сила.

### ВВЕДЕНИЕ

Влияние щелевых уплотнений на устойчивость роторов центробежных насосов было ранее экспериментально и теоретически исследовано с помощью одномассовых математических и натурных моделей [1, 2]. Показано, что наличие так называемых циркуляционных сил в щелевых уплотнениях может привести к потере устойчивости вращения ротора. Структура реакций подшипников скольжения в какой-то мере подобна структуре сил в щелевых уплотнениях - там также наличествуют циркуляционные силы. Исследования динамики роторов турбокомпрессоров показали, что подшипники скольжения сами по себе могут обусловить потерю устойчивости [3, 4]. Рассмотрение совместного влияния на устойчивость и колебания как подшипников скольжения, так и щелевых уплотнений (что актуально для многих типов центробежных насосов) до сих пор ни в теоретическом плане, ни с помощью экспериментов не проводилось.

В данной работе поставлена задача выяснить закономерности совместного влияния на устойчивость ротора уплотнений и подшипников на основе изучения специальным образом рассчитанных дискретных моделей роторов центробежных насосов.

### ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

На рисунке 1 приведена расчетная схема дискретной многомассовой модели ротора.

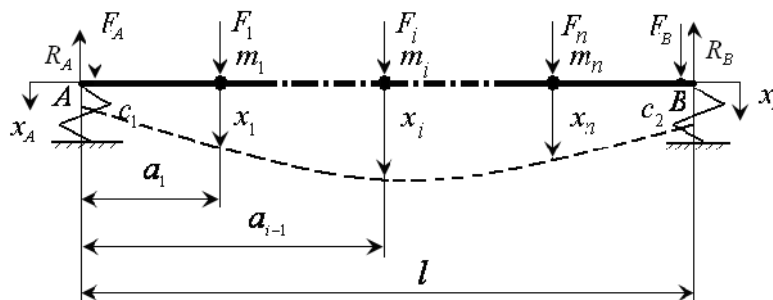


Рисунок 1 – Расчетная схема дискретной модели ротора

В развитие методов построения дискретных роторных моделей, предложенных в [3, 4], принципиально новым является приведение дифференциальных уравнений дискретной модели к стандартному виду в обратной форме, которая предусматривает расположение масс в любых точках ротора, в том числе и их отсутствие в опорных точках. Последнее целесообразно в случае относительно высокой жесткости подшипников, что подтверждается малой величиной погрешности для значений собственных частот при переходе от КЭ-модели к дискретной.

Предположим, что на каждую массу действует некоторая сила. Рассматривая статическую задачу, можем получить значения реакций в опорных точках

$$R_B = (F_{BX} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n (l - a_i) F_{ix})$$

$$R_A = (F_{AX} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n a_i F_{ix})$$
(1)

Очевидно, что смещения опорных точек будут равны

$$x_B = \frac{R_B}{c_2} = \frac{1}{c_2} (F_{BX} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n (l - a_i) F_{ix})$$

$$x_A = \frac{R_A}{c_1} = \frac{1}{c_1} (F_{AX} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n a_i F_{ix})$$
(2)

Для определения прогибов масс представим их в виде суммы

$$x_i = x'_i + x''_i,$$
(3)

где  $x'_i$  – составляющая прогиба в предположении, что балка абсолютно жесткая, но имеют место перемещения опорных точек  $x_A$  и  $x_B$ ;

$x''_i$  – составляющая прогиба в предположении изгиба упругой балки под действием сил при абсолютно жестких опорах.

Вторая составляющая прогиба вычисляется по известной из курса сопротивления материалов формуле

$$x''_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} F_j,$$
(4)

где коэффициент податливости  $\delta_{ij}$  численно равен прогибу  $i$ -ой массы при действии на  $j$ -ую массу единичной силы  $F_j=1$ . Коэффициенты податливости могут быть получены по программе расчета статических прогибов КЭ-модели реального ротора.

Для нахождения первой составляющей рассмотрим перемещение жесткой балки при некоторых известных прогибах (рис. 2).

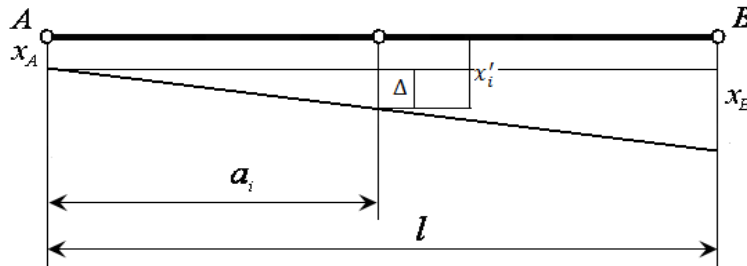


Рисунок 2 – К определению прогибов масс

Очевидно, что

$$x'_i = x_A + \Delta$$

$$\frac{\Delta}{a_i} = \frac{x_B - x_A}{l}$$

Откуда следует

$$x'_i = \frac{l - a_i}{l} x_A + \frac{a_i}{l} x_B \quad (5)$$

Учитывая соотношения (2)...(5), выражения для прогибов балки в точках расположения масс (при  $F_{Ax} = F_{Bx} = 0$ ) можно представить в классическом виде

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j, \quad (6)$$

где эквивалентные коэффициенты податливости балки определяются по формуле

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \frac{(l - a_i)(l - a_j)}{c_1 l^2} + \frac{a_i a_j}{c_2 l^2}. \quad (7)$$

Заметим, что эквивалентные коэффициенты податливости учитывают жёсткости опорных точек.

Если согласно принципу Даламбера положить  $F_i = -m_i \cdot \ddot{x}_i$ , уравнения свободных колебаний дискретной модели (рис. 1) примут классический вид уравнений в обратной форме

$$x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j \cdot \ddot{x}_j = 0. \quad (8)$$

### ДИСКРЕТНЫЕ НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА

Анализ устойчивости проводился для ротора центробежного насоса с температурой перекачиваемой среды  $160^{\circ}\text{C}$ , который развивает давление  $30 \text{ МПа}$  и подачу  $600 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Расчетная схема исследуемого ротора показана на рис. 3.

КЭ-модель этого ротора и две первые собственные формы для собственных частот  $988$  и  $1117 \text{ с}^{-1}$  приведены на рис. 4.

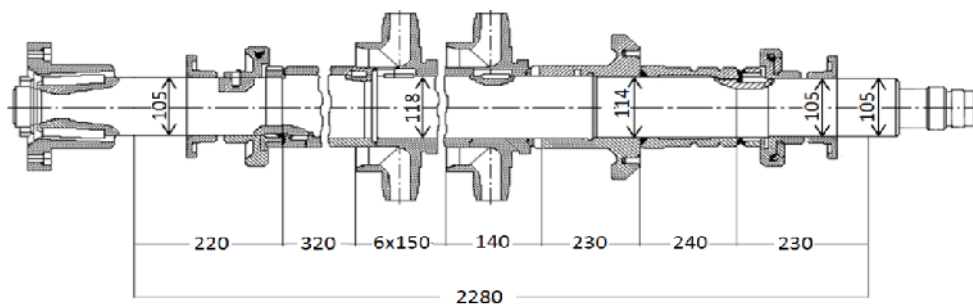


Рисунок 3 – Расчетная схема исследуемого ротора ПЭ 600-300

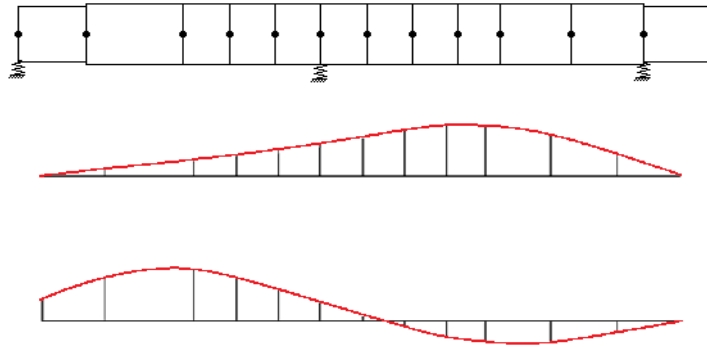


Рисунок 4 – КЭ – модель исследуемого ротора

Для рассмотренного ротора были разработаны три модели: модель *A* – дискретная трехмассовая линейная консервативная (рис. 5), которая была использована для определения величин дискретных масс; модель *B* – дискретная трехмассовая линейная, неконсервативные силы для которой учитываются только для уплотнений (рис. 6); модель *C* – дискретная трехмассовая линейная, неконсервативные силы для которой учитываются одновременно и в уплотнениях, и в опорных узлах (подшипниках скольжения) (рис. 7).

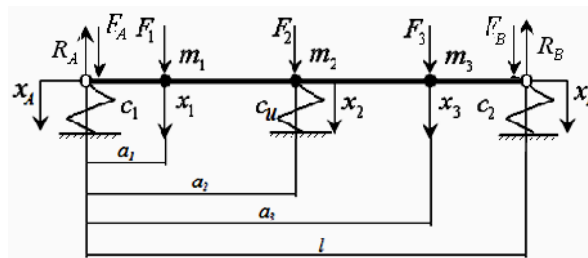


Рисунок 5 – Модель А

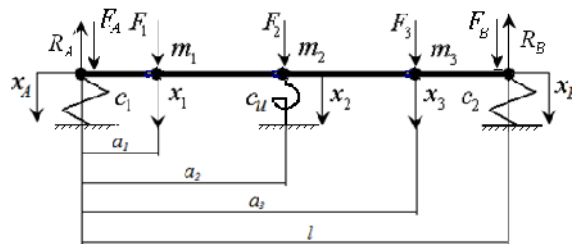


Рисунок 6 – Модель В

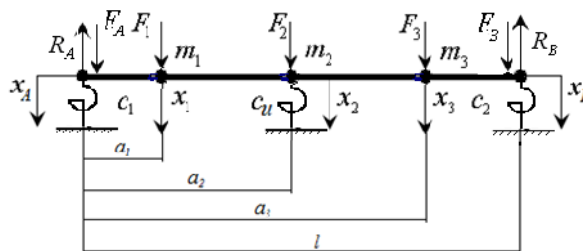


Рисунок 7 – Модель С

Значения дискретных масс модели  $A$  определялось при помощи формулы линейной регрессии по первой и второй форме:

$$\hat{m} = [\bar{B}^T \cdot \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T \cdot \bar{D}$$

где выражения для матриц  $B$  и  $D$  имеют вид:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11}; \alpha_{12} \cdot U_{21}; \alpha_{13} \cdot U_{31} \\ \alpha_{21}; \alpha_{22} \cdot U_{21}; \alpha_{23} \cdot U_{31} \\ \alpha_{31}; \alpha_{32} \cdot U_{21}; \alpha_{33} \cdot U_{31} \\ \alpha_{11}; \alpha_{12} \cdot U_{22}; \alpha_{13} \cdot U_{32} \\ \alpha_{21}; \alpha_{22} \cdot U_{22}; \alpha_{23} \cdot U_{32} \\ \alpha_{31}; \alpha_{32} \cdot U_{22}; \alpha_{33} \cdot U_{32} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot (1 + \alpha_{12} \cdot c_u \cdot U_{21}) \\ \lambda_1 \cdot U_{21} \cdot (1 + \alpha_{22} \cdot c_u) \\ \lambda_1 \cdot (U_{31} + \alpha_{32} \cdot c_u \cdot U_{21}) \\ \lambda_2 \cdot (1 + \alpha_{12} \cdot c_u \cdot U_{22}) \\ \lambda_2 \cdot U_{22} \cdot (1 + \alpha_{22} \cdot c_u) \\ \lambda_2 \cdot (U_{32} + \alpha_{32} \cdot c_u \cdot U_{22}) \end{bmatrix}$$

где  $U_{ij}$  - относительные собственные формы, подсчитанные для КЭ-модели,  $\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2}$ ;  $\lambda_2 = \frac{1}{\omega_2^2}$  - величины обратные  $i$ -ой собственной частоте колебаний ротора.

Дискретные массы располагались в точках максимумов первой и второй собственных форм. Как показали расчёты, такое расположение масс даёт максимальную точность совпадения собственных частот и форм КЭ-модели и трехмассовой дискретной.

Найденные значения для дискретных масс и собственных частот дискретной модели составили: 24.1, 161.7, 37.6 кг и 985.2, 1146  $\text{с}^{-1}$ , соответственно. Погрешность определения частот: 0.3% и 11.2%.

Дифференциальные уравнения колебаний модели  $B$  (рис.6) записывались в двух плоскостях. На основании принципа Даламбера в уравнениях общего вида (2)...(5) следует положить:

$$\begin{cases} F_{AX} = 0 \\ F_{AY} = 0 \\ F_{1X} = -m_1 \cdot \ddot{x}_1 \\ F_{1Y} = -m_1 \cdot \ddot{y}_1 \\ F_{2X} = -m_2 \cdot \ddot{x}_2 - b \cdot \dot{x}_2 - c \cdot x_2 - q \cdot y_2 \\ F_{2Y} = -m_2 \cdot \ddot{y}_2 - b \cdot \dot{y}_2 - c \cdot y_2 + q \cdot x_2 \\ F_{3X} = -m_3 \cdot \ddot{x}_3 \\ F_{3Y} = -m_3 \cdot \ddot{y}_3 \\ F_{BX} = 0 \\ F_{BY} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

где  $q_y = 0.5 \cdot b_y \cdot \omega$  - циркуляционные силы в щелевых уплотнениях;

$\omega$  - частота колебаний ротора;

$b_y$  - коэффициент демпфирования в щелевых уплотнениях;

$q_y = \delta \cdot b_y \cdot \omega$  - циркуляционные силы в опорных подшипниках;

$\delta$  - безразмерный коэффициент циркуляционных сил в щелевых уплотнениях;

$b$  - коэффициент демпфирования в опорных подшипниках;

- жесткость щелевых уплотнений;

$1, 2$  - жесткость опорных подшипников;

$m_1, m_2, m_3$  - дискретные массы;

$$f(p) = -m_2 \cdot \ddot{x}_2 - b \cdot \dot{x}_2 - c \cdot x_2.$$

Для получения дифференциальных уравнений модели С (рис.7) следует положить:

$$\begin{cases} F_{AX} = -b \cdot \dot{x}_A - q \cdot y_A \\ F_{AY} = -b \cdot \dot{y}_A + q \cdot x_A \\ F_{1X} = -m_1 \cdot \ddot{x}_1 \\ F_{1Y} = -m_1 \cdot \ddot{y}_1 \\ F_{2X} = -m_2 \cdot \ddot{x}_2 - b \cdot \dot{x}_2 - c \cdot x_2 - q \cdot y_2 \\ F_{2Y} = -m_2 \cdot \ddot{y}_2 - b \cdot \dot{y}_2 - c \cdot y_2 + q \cdot x_2 \\ F_{3X} = -m_3 \cdot \ddot{x}_3 \\ F_{3Y} = -m_3 \cdot \ddot{y}_3 \\ F_{BX} = -b \cdot \dot{x}_B - q \cdot y_B \\ F_{BY} = -b \cdot \dot{y}_B + q \cdot x_B \end{cases} \quad (10)$$

Полагая  $f(ai) = l \cdot ai$ , где  $i=(1,3)$  - количество дискретных масс многомассовой модели, а также в зависимости от плоскости, для которой составлено данное уравнение:

$$f(p) = m_2 \ddot{x}_2 + c_{yn} x_2 + b_y \dot{x}_2 + q_y y_2$$

или

$$f(p) = m_2 \ddot{y}_2 + c_{yn} y_2 + b_y \dot{x}_2 - q_y x_2,$$

получаем характеристический определитель для модели С:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{b_n \cdot p}{c_n} & \frac{q_n}{c_n} & \frac{a_1 \cdot m_1 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & 0 & \frac{a_2 \cdot f(p)}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot q_{yn} \cdot p}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot m_2 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_n}{c_n} & 1 + \frac{b_n \cdot p}{c_n} & 0 & \frac{a_1 \cdot m_1 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & -\frac{a_2 \cdot q_{yn} \cdot p}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot f(p)}{c_n \cdot l} & 0 & \frac{a_2 \cdot m_2 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & 0 & 0 \\ \frac{f(a_1) \cdot b_n \cdot p}{c_n \cdot l} & \frac{f(a_1) \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot p^{2+1} & 0 & \alpha_{12} \cdot f(p) & \alpha_{12} \cdot q_{yn} & \alpha_{13} \cdot m_3 \cdot p^2 & 0 & \frac{a_1 \cdot b_n \cdot p^2}{c_n \cdot l} & \frac{a_1 \cdot q_n}{c_n \cdot l} \\ -\frac{f(a_1) \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \frac{f(a_1) \cdot b_n \cdot p}{c_n \cdot l} & 0 & \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot p^{2+1} & -\alpha_{12} \cdot q_{yn} & \alpha_{12} \cdot f(p) & 0 & \alpha_{13} \cdot m_3 \cdot p^2 & -\frac{a_1 \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \frac{a_1 \cdot b_n \cdot p^2}{c_n \cdot l} \\ \frac{f(a_2) \cdot b_n \cdot p}{c_n \cdot l} & \frac{f(a_2) \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \alpha_{21} \cdot m_1 \cdot p^2 & 0 & \alpha_{22} \cdot f(p) + 1 & \alpha_{22} \cdot q_{yn} & \alpha_{23} \cdot m_3 \cdot p^2 & 0 & \frac{a_2 \cdot b_n \cdot p^2}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot q_n}{c_n \cdot l} \\ -\frac{f(a_2) \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \frac{f(a_2) \cdot b_n \cdot p}{c_n \cdot l} & 0 & \alpha_{21} \cdot m_1 \cdot p^2 & -\alpha_{22} \cdot q_{yn} & \alpha_{22} \cdot f(p) + 1 & 0 & \alpha_{23} \cdot m_3 \cdot p^2 & -\frac{a_2 \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot b_n \cdot p^2}{c_n \cdot l} \\ \frac{f(a_3) \cdot b_n \cdot p}{c_n \cdot l} & \frac{f(a_3) \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \alpha_{31} \cdot m_1 \cdot p^2 & 0 & \alpha_{32} \cdot f(p) & \alpha_{32} \cdot q_{yn} & \alpha_{33} \cdot m_3 \cdot p^{2+1} & 0 & \frac{a_3 \cdot b_n \cdot p^2}{c_n \cdot l} & \frac{a_3 \cdot q_n}{c_n \cdot l} \\ -\frac{f(a_3) \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \frac{f(a_3) \cdot b_n \cdot p}{c_n \cdot l} & 0 & \alpha_{31} \cdot m_1 \cdot p^2 & -\alpha_{32} \cdot q_{yn} & \alpha_{32} \cdot f(p) & 0 & \alpha_{33} \cdot m_3 \cdot p^{2+1} & -\frac{a_3 \cdot q_n}{c_n \cdot l} & \frac{a_3 \cdot b_n \cdot p^2}{c_n \cdot l} \\ 0 & 0 & \frac{a_1 \cdot m_1 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & 0 & \frac{a_2 \cdot f(p)}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot q_{yn} \cdot p}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot m_2 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & 0 & 1 + \frac{b_n \cdot p}{c_n} & \frac{q_n}{c_n} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_1 \cdot m_1 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & -\frac{a_2 \cdot q_{yn} \cdot p}{c_n \cdot l} & \frac{a_2 \cdot f(p)}{c_n \cdot l} & 0 & \frac{a_2 \cdot m_2 \cdot p^2}{c_n \cdot l} & -\frac{q_n}{c_n} & 1 + \frac{b_n \cdot p}{c_n} \end{bmatrix}$$

Для оценки устойчивости системы с помощью критерия Раунса-Гурвица, исходя из условия нетривиальности решения системы дифференциальных уравнений (10), приравняем данный определитель нулю.

На основании полученного в программном комплексе Maple массива значений для граничных частот была построена область устойчивости ротора с учетом влияния подшипников скольжения.

На рисунке 8 изображена зависимость величины безразмерной граничной частоты ротора (отнесенной к первой собственной частоте дискретной консервативной модели А) от величины безразмерного коэффициента циркуляционной силы  $\delta$ . Как показали исследования [3, 4], этот коэффициент у разных типов подшипников скольжения имеет значения в пределах 0,1...0,4.

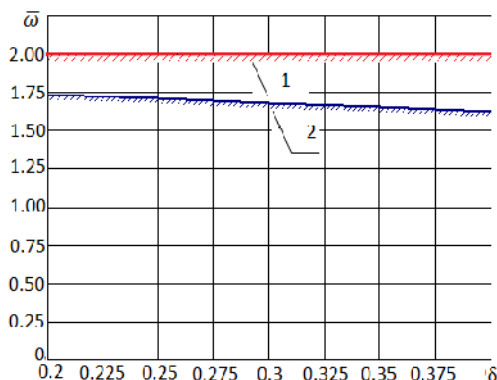


Рисунок 8 – Область устойчивости

Кривая 1 на рисунке определяет область устойчивости модели В. Следует отметить, что в [2] было теоретически доказано: при зависимости циркуляционной силы вида  $q=0,5b$ , характерной для целевых уплотнений, граничная по устойчивости частота вращения точно равна удвоенной первой собственной частоте консервативной многомассовой модели.

Кривая 2 построена для модели С. Как видно из рисунка, запас устойчивости вследствие влияния подшипников скольжения, уменьшается на 10...19%.

#### ВЫВОДЫ

Разработана методика построения многомассовых дискретных линейных консервативной и неконсервативной моделей ротора центробежного насоса. В качестве примера рассчитаны дискретные трехмассовые модели исследуемого ротора центробежного насоса (модели В и С).

Проведено исследование областей устойчивости рассмотренного ротора согласно критерию Раунса-Гурвица для систем 16-го порядка при помощи программного комплекса Maple.

Оценка влияния подшипников скольжения на устойчивость системы показала, что учет неконсервативных сил, возникающих в подшипниках скольжения, сужает область устойчивости ротора на 10...19%. Это свидетельствует о целесообразности исследования многомассовых дискретных моделей ротора, в которых наличие демпфирующих и циркуляционных сил учитывается не только в целевых уплотнениях, но и в опорных узлах исследуемого ротора.

## INFLUENCE OF SLIDING BEARINGS IN ROTOR STABILITY OF CENTRIFUGAL PUMPS

**V. I. Simonovskii, A. G. Halizeva,**  
Sumy State University,  
2, Rimsky-Korsakov, Str., Sumy, 40007, Ukraine

*There were developed discrete linear conservative and non-conservative mathematical models for the study of oscillations of the rotor of a centrifugal pump, considering the reaction of fluid film bearings and seals of the flow part. Through the use of programs that implement the numerical integration of differential equations, as well as the construction of the stability regions of a study of joint influence of gap seals and bearings on the stability of the rotors.*

**Keywords:** rotor, centrifugal pump, discrete model, plain journal (slider) bearing, quasielastic force.

## ПРО ВПЛИВ ПІДШИПНИКІВ КОВЗАННЯ НА СТАБІЛЬНІСТЬ РОТОРІВ ВІДЦЕНТРОВИХ НАСОСІВ

**В. І. Симоновський, А. Г. Халізева,**  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007, Україна

*Розроблено дискретні математичні моделі для дослідження коливань ротора відцентрового насоса, що враховують реакції рідинної плівки підшипників ковзання і ущільнень проточної частини. На основі використання програм, що реалізують побудову областей стійкості, проведено дослідження спільного впливу щільних ущільнень та підшипників ковзання на стійкість роторів.*

**Ключові слова:** ротор, відцентровий насос, дискретна модель, підшипник ковзання, циркуляційна сила.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Марцинковский В. А. Гидродинамика и прочность центробежных насосов / В. А. Марцинковский. – М. : Машиностроение, 1970. – 272 с.
2. Симоновский В. И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин / В. И. Симоновский. – Харьков : Вища школа, 1986. - 128 с.
3. Гадяка В. Г. Математическая модель ротора турбокомпрессора для исследования несинхронных составляющих вибрации / В. Г. Гадяка, Д. В. Лейких, В. И. Симоновский // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2010. – № 2(20). – С. 48-50.
4. Гадяка В. Г. Оценивание влияния нелинейных реакций сегментных подшипников на динамику и устойчивость роторов турбокомпрессоров / В. Г. Гадяка, Д. В. Лейких, В. И. Симоновский // Прочность материалов и элементов конструкций: труды Международной научно-технической конференции (Киев, 28–30 сентября 2010 г.). – К. : Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2011. – С. 17–24.
5. Симоновський В. І. Уточнення математичних моделей коливальних систем за експериментальними даними / В. І. Симоновський. – Суми : Вид-во СумДУ, 2010. – 92 с.

*Поступила в редакцию 12 июля 2013 г.*