УДК 681.142

# РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ СЖАТОГО ДВУХМЕРНОГО ДЕРЕВА ФЕНВИКА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ОБРАБОТКИ D-МЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

М.М. Соколов; О.О. Воронова; С.А. Петров
Сумский государственный университет
e-mail: tiiirz@gmail.com

Дерево Фенвика позволяет находить сумму на префиксе матрицы за время $O((logN)^D)$ и обновлять один элемент матрицы за время $O((logN)^D)$ [1]. Используя это можно решать задачу поиска количества объектов попадающих в $D$-мерный прямоугольник, с удалением и добавлением точек с заранее известными координатами. Данная задача может быть решена также с использованием сжатого дерева отрезков [2]. Оба подхода имеют одинаковую асимптотику времени ответа на запрос $O((logN)^D)$, однако недостатком дерева Фенвика является то, что он требует $O(N^D)$ памяти (размерность матрицы). Предлагается метод сокращения потребления памяти до $O(N(logN)^D)$.

С целью упрощения наглядной интерпретации рассмотрим случай для $D$=2. Пусть даны $N$ точек на плоскости $(x,y)$. Сожмем $x$-координаты, каждой такой координате будет соответствовать внутреннее дерево. Внутренним деревом назовем дерево Фенвика построенное по y-координатам, внешним – дерево Фенвика внутренних деревьев. Каждая точка попадет в $O(logN)$ внутренних деревьев. Для каждой $x$-координаты посчитаем сколько точек попадает в соответствующее ей внутреннее дерево. Теперь построим внутренние деревья посчитанных размеров, и создадим дерево Фенвика над ними. Сжатие координат можно провести за O($N$) времени. Подсчет размеров внутренних деревьев требует O($NlogN$) времени, создание внутренних деревьев требует суммарно O($NlogN$) времени, построение дерева Фенвика над внутренними деревьями – O($N$) времени. Следовательно асимптотика времени и памяти инициализации сжатого дерева Фенвика равняется O($NlogN$) . Для ответа на исходный запрос необходимо сделать $2^D$ запроса на префиксе, так как сумма – обратимая операция, к ней можно применить формулу включений-исключений.

Найдем внутренние деревья соответствующие $x$-координате запроса, в каждом таком дереве найдем бинарным поиском границу запроса по y-координатам. Просуммировав результаты запросов на внутренних деревьях получаем ответ на запрос на префиксе. $X$-координате запроса соответствует O($logN$) внутренних деревьев, в каждом внутреннем дереве бинарный поиск займет O($logN$) времени, столько же необходимо запросу на префиксе. Таких запросов требуется совершить $2^D$ , но размерность пространства является константой, значит общая асимптотика времени ответа на запрос O($(logN)^2$). Обновление точки выполняется аналогично запросу и имеет такую же временную оценку.

Проведем практический эксперимент для подтверждения эффективности разработанного метода (рис. 1). Анализ рисунка показывает, что, не смотря на то, что асимптотика времени ответа на запрос предлагаемого алгоритма такая же, как и у сжатого дерева отрезков, на практике скрытая в асимптотике константа меньше.

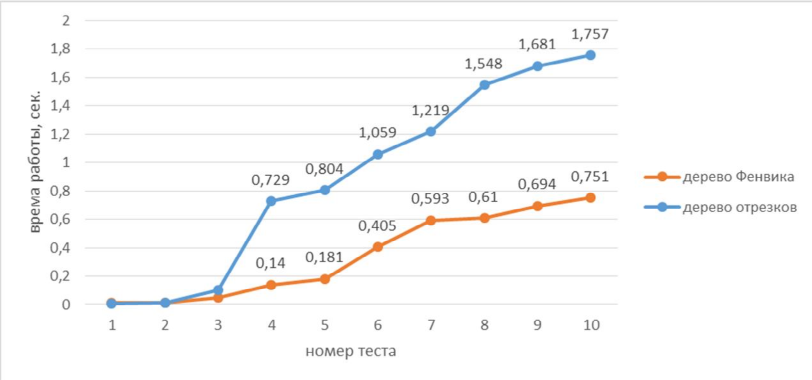

Рисунок 1 – Результаты экспериментального сравнения для *D*=2

Таким образом, данный подход может использоваться как замена сжатого дерева отрезков. При этом не требует изменений интерфейса работы с ним, так как доступные операции одинаковы.

Данный алгоритм может быть применен для повышения эффективности обработки наборов разряженных *D*-мерных объектов, которые применяются для описания технических объектов интеллектуальных систем. Полученный результат дает возможность исследования возможности реализации запроса обновления прямоугольника.

1. Fenwick P.M. A New Data Structure for Cumulative Frequency Tables Software / P.M. Fenwick // Practice and experience. – 1994. – №3. – P. 327-336.
2. Bentley J.L. Multidimensional binary search trees used for associative searching / J.L. Bentley // Communications of the ACM. – 1975. – № 9. – P. 509-517.