УДК 535.41+621.372+621.91}

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ТРАЕКТОРИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Ю.П. Вирченко,* *д-р физ-мат. наук, профессор,*
А.С. Мазманишвили**, *д-р физ-мат. наук, профессор,*
**Институт монокристаллов НАНУ*
***Сумский государственный университет*

Построен алгоритм вычисления детерминанта Фредгольма для ядра $K(\tau,\tau')$, *являющегося корреляционной функцией многомерного процесса Орнштейна-Уленбека* $z(t)$. *Методом Карунена-Лоэва построена характеристическая функция распределения случайных значений энергетического функционала* $J_T[z]$ *от траекторий процесса* $z(t)$, $J_T[z]=\int_0^T (z(\tau),Vz(\tau)\ \ d\tau)$. *Найдена асимптотика плотности распределения* $p(\varepsilon)$ *вероятностей для* $J_T[z]$ *при* $\varepsilon\to\infty$.

Ключевые слова: *плотность распределения, энергетический функционал, стохастический процесс Орнштейна-Уленбека, алгоритм вычисления, детерминант Фредгольма, корреляционная функция, метод Карунена-Лоэва, характеристическая функция, асимптотика плотности распределения.*

Побудовано алгоритм обчислення детермінанту Фредгольма для ядра $K(\tau,\tau')$, *що є кореляційною функцією багатовимірного процесу Орнштейна-Уленбека* $z(t)$. *Методом Карунена-Лоева отримана характеристична функція розподілу випадкових значень енергетичного функціоналу* $J_T[z]$ *від траєкторій процесу* $z(t)$, $J_T[z]=\int_0^T (z(\tau),Vz(\tau)\ \ d\tau)$. *Знайдено асимптотику густини розподілу* $p(\varepsilon)$ *ймовірностей для* $J_T[z]$ *при* $\varepsilon\to\infty$.

Ключові слова: *густина розподілу, енергетичний функціонал, стохастичний процес Орнштейна-Уленбека, алгоритм обчислення, детермінант Фредгольма, кореляційна функція, метод Карунена-Лоева, характеристична функція, асимптотика густини розподілення.*

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость систем принятия решений и автоматического управления определяется набором собственных чисел матрицы системы или связанной с ней корреляционной матрицей соответствующего стохастического процесса. Качество решения, в свою очередь, определяется известными сведениями о вероятностных свойствах используемых законов распределения. В настоящей работе проведено аналитической исследование квадратичного функционала, основанного на траекториях процесса Орнштейна-Уленбека, и построена характеристическая функция распределения случайных значений такого функционала, свойства которых могут быть использованы при синтезе систем автоматического управления.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть векторный процесс Орнштейна-Уленбека определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dz(t) = Az(t)\quad dt + dw(t), \tag{1}$$

где процесс $z(t)$ принимает значения в $\mathbb{C}^d$; A – диссипативная $(d \times d)$-матрица; $w(t)$ – d-мерный комплекснозначный винеровский процесс с вещественной и симметричной ковариационной $(d \times d)$-матрицей D, т.е.

$$\langle w(t) \otimes w(t') = D \min(t, t') \rangle . \tag{2}$$

Пусть, кроме того, задан положительно определенный квадратичный функционал

$$J_T[z] = \int_0^T dt \quad (z(t), \ \ Vz(t)), \tag{3}$$

где V – заданная самосопряженная, неотрицательная $(d \times d)$-матрица; $V = V^+$ (здесь и ниже «+» означает эрмитовское сопряжение); T – действительный положительный параметр.

Рассмотрим распределение вероятностей случайных значений $J_T[z]$

$$\mathrm{P}(\varepsilon) = \Pr\{z(t): \ J_T[z] \geq \varepsilon \ \}, \tag{4}$$

которое зависит от T и матриц A, D, V. Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения плотности распределения вероятностей (4).

Уточним смысл математических объектов, определяющих постановку задачи. Символом $\langle . \rangle$ ниже мы обозначаем математическое ожидание по мере, связанной с процессом $z(t)$.

Комплекснозначным гауссовским процессом $z(t)$ будем называть функционал $z(t) = x(t) + iy(t)$ от траекторий пары процессов $(x(t), \ y(t))$, если для любой непрерывной вектор-функции $v(\tau)$ выполняется соотношение

$$\left\langle \exp \quad \left\{ \ i \ \mathrm{Re} \int (v(\tau), z(\tau)) \quad d\tau \right\} \right\rangle =$$

$$= \exp\left\{ i \,\mathrm{Re} \int (v(\tau), < z(\tau) >) d\tau \right\} \quad \exp\left\{ -\frac{1}{4} \int d\tau \int d\tau' \quad (G(\tau, \tau'), v(\tau), v(\tau')) \right\},$$

где

$$G(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \left\langle (z(\tau) \quad - < z(\tau) >) \otimes (z^*(\tau') \quad - < z^*(\tau') >) \right\rangle .$$

Отметим, что $G^+(t, t') = G(t', t)$ и, следовательно, интеграл $\int d\tau \int d\tau' \ \ (G(\tau, \tau') v(\tau'), v(\tau))$ вещественен и положителен. Для комплекснозначных гауссовских процессов средние

$$A(t_1, \ldots, t_n; \ t'_n, \ldots, t'_{n'}) \equiv \left\langle (z(t_1) - < z(t_1) >) \right\rangle \otimes \ldots \otimes \left\langle (z(t_n) - < z(t_n) >) \right\rangle \otimes$$
$$\otimes \left\langle (z^*(t'_1) - < z^*(t'_1) >) \right\rangle \otimes \ldots \otimes \left\langle (z^*(t'_{n'}) - < z^*(t'_{n'}) >) \right\rangle$$

отличны от нуля, только если $n = n'$, и при этом справедливо правило Вика [2]

$$A(t_1, \ldots, t_n; \ t'_n, \ldots, t'_{n'}) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \prod_{j=1}^{n} G(t_j; t_{i_j}),$$

где суммирование выполняется по всем перестановкам индексов $1,\ 2,\ldots,n$.

Комплекснозначным винеровским процессом $w(t)$ будем называть комплекснозначный гауссовский процесс, у которого $\mathrm{Re}\,w(t)=x(t)$ и $\mathrm{Im}\,w(t)=y(t)$, причем процессы $x(t)$ и $y(t)$ являются статистически эквивалентными и независимыми винеровскими процессами $\left\langle x(t)\otimes x(t')\right\rangle=\left\langle y(t)\otimes y(t')\right\rangle=0.5D\min(t,t')$. Эти свойства процессов $x(t)$ и $y(t)$ являются необходимыми для гауссовости процесса $w(t)$.

Вероятностная мера, связанная с процессом $z(t)$, везде ниже понимается как условная вероятность, при условии $z(t')=z'$ и $t'=\to-\infty$, т.е. $z(t)$ – стационарный гауссовский процесс.

Замечание 1. Если формулируется задача, аналогичная поставленной выше, для вещественного процесса $x(t)$ Орнштейна-Уленбека в пространстве R^d, определяемого уравнением $dx(t)=Ax(t)\ \ dt+dw(t)$ и вещественными матрицами A, D, V (D, V – симметричны), то её решения нельзя получить из решения комплексной задачи, устремляя статистические характеристики $\mathrm{Im}\,z(t)$ к нулю, так как в этом случае необходимо было бы положить $\mathrm{Im}\,w(t)=0$, что бессмысленно (см. выше). Однако эту задачу можно комплексифицировать, рассмотрев комплекснозначный процесс $z(t)=x(t)+iy(t)$, где $y(t)$ – статистически эквивалентная процессу $x(t)$ и независимая от него функция. Тогда для характеристических функций $Q(i\lambda)$ и $Q(i\lambda,z)$ (см. (15)) и $Q(i\lambda,x)$, связанных с процессами $z(t)$ и $x(t)$, имеем следующую связь

$$Q(i\lambda,z)=Q^2(i\lambda,x)\ . \tag{5}$$

Замечание 2. Стохастический дифференциал в (1) мы понимаем по Стратоновичу [3], поскольку, в отличие от дифференциала Ито, дифференциал Стратоновича более отвечает физической ситуации [4,5], описываемой конструкцией (1)–(4).

Замечание 3. Ниже при вычислении характеристической функции $Q(i\lambda)=\left\langle\exp\left(-i\lambda\quad J_T[z]\right)\right\rangle$ неотрицательность матрицы V не используется, а требование неотрицательности продиктовано соображениями значимости этого случая для приложений.

Замечание 4. Так как траектории винеровского процесса непрерывны с вероятностью единица [6], то траектории процесса $z(t)$ также непрерывны с той же вероятностью, поэтому интеграл в определении (3) можно понимать как обычный интеграл Римана. Действительно, уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению

$$z(t)=z'+\int_0^t d\tau\quad Az(\tau)+w(t)\,, \tag{6}$$

которое имеет единственное решение в $[\,\mathrm{C}\,(0,T)]^{2d}$, в чем можно убедиться последовательными итерациями.

РАВНОВЕСНАЯ ПЛОТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Рассмотрим плотность $p(z,z';t)$ распределения вероятностей перехода из $z(0)=z'$ в $z(t)=z$:

$$p(z,z';t)=\left[(2\pi)^d \det D(t)\right]^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z-e^{At}z'\right)D^{-1}(t)\left(z-e^{At}z'\right)\right\}, \qquad (7)$$

$$D(t)=\int_0^t \exp(A\tau)D\exp(A^+\tau)\ \ d\tau\ . \qquad (8)$$

Такое представление для $p(z,z';t)$ предполагает, что $\det D\neq 0$.

Лемма. Если для некоторого t $(t>0)$ $\det D=0$, то существует нетривиальное подпространство $H\subset \ker D$, инвариантное относительно A^+ , и обратно, если такое подпространство существует, то для всех $t>0$ $\det D=0$.

Доказательство. Если $\det D=0$, то существует вектор z такой, что

$$\left(z,D(t)z\right)=\int_0^t d\tau \quad \left(\exp(A^+\tau)z,\ \ D\exp(A^+\tau)z\right)=0.$$

Поскольку $D\geq 0$ и, следовательно, $\exp(A\tau)D\exp(A^+\tau)=0$, то, ввиду непрерывной зависимости от τ для всех $\tau\in[0,t]$, имеем $D\exp(A^+\tau)=0$. В частности, при $t=0$, $Dz=0$, $z\in\ker D$, а также для натурального n , $D(A^+)^n z=0$, $(A^+)^n z\in\ker D$. Тогда минимальное подпространство $H\subset D$, натянутое на $(A^+)^n z$, $n\geq 0$, инвариантно относительно A^+ . Доказательство второй части Леммы очевидно.

Наличие подпространства $H\in\ker D$, инвариантного относительно A^+ , означает, что существует неособенный оператор W , действием которого в $\mathbb{C}^{2d}$ можно представить уравнение (1) в виде двух несвязанных уравнений такого же типа во взаимно ортогональных пространствах H и $\bar{H}$. При этом уравнение в H уже не будет случайным. Таким образом, наличие подпространства H не изменяет наших дальнейших построений, так как его с помощью оператора W можно исключить из рассмотрения. Однако такая процедура приводит к излишнему усложнению всех последующих построений. Конечный результат, как это будет видно ниже, не зависит от W . В связи с этим далее будем пользоваться следующим принципом регуляризации, в силу которого всегда можно так изменить матрицы A и D, чтобы обеспечить $\det D(t)\neq 0$, а в конце вычислений вернуться к их первоначальному значению.

Утверждение 1. Плотность распределения вероятностей (ПРВ)

$$(2\pi)^{-d}(\det M)^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(z-Lz'\right),M^{-1}\left(z-Lz'\right)\right)\right\} \qquad (9)$$

непрерывно зависит от матриц L и M и имеет слабый предел при $\det M\to 0$.

Доказательству подлежит только вторая часть утверждения. Если $\det M\to M_-$, $\det M_-\to 0$ и $H=\ker M_-$, то в смысле нахождения математического ожидания любой непрерывной функции $f(z)$ плотность (9) стремится к

$$
(2\pi)^{-d+\dim H}(\det \bar{M}_0)^{-1}\delta\left(P_H(z-Lz')\right) \times
$$

$$
\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(P_{\bar{H}}(z-Lz'),\ \bar{M}_0^{-1}P_{\bar{H}}(z-Lz')\right)\right\}, \tag{10}
$$

где P_H – проектор на H и $\bar{M}_0$ – сужение оператора M_0 на $\bar{H}$.

Дадим теперь ответ на вопрос, поставленный в начале раздела. Для этого рассмотрим ПРВ (7), предполагая, ввиду принципа регуляризации, что $\det D \neq 0$.

Утверждение 2. Для существования предела $p(z,z';t)$ при $t \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы оператор A^+ был диссипативным. Это означает, что в жордановом каноническом представлении оператора A диагональные элементы имеют отрицательную реальную часть.

Доказательство. Необходимо, чтобы существовал $\lim \exp(A^+ t)z$, $t \to \infty$, для всех векторов z. Из представления Данфорда [7] $A^+ = B + N$, $[B,N] = 0$, где B – оператор скалярного типа, N – нильпотентный оператор, немедленно следует, что $\exp(A^+ t) = \exp(Bt)\cdot \mathrm{P}(t)$. Поскольку $\mathrm{P}(t)$ – полином от t, то собственные числа μ_i оператора B должны иметь отрицательную реальную часть. Кроме того, из $\mathrm{Re}\,\mu_i < 0$ следует существование предела $\lim \mathrm{limits}_{t\to\infty} D(t)$.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПРОЦЕССА $\{z(t)\}$

Заметим, что построенный в предыдущем разделе стационарный процесс – гауссовский, так как он является пределом при $t' \to -\infty$ последовательности гауссовских процессов $\{z(t)\}_{t'}$, определенных уравнением (1) и фиксированным начальным условием $z(t') = z'$, которое статистически не зависит от $w(t)$. Гауссовость процессов из этой последовательности устанавливается вычислением характеристического функционала

$$
G[v(t)] = \left\langle \exp\left\{ i\,\mathrm{Re}\int_{t'}^{t}\left(v(\tau), z(\tau)\right) \right\}\right\rangle, \tag{11}
$$

где $v(\tau)$ – произвольная финитная непрерывная функция на $[t',t]$ со значениями в $\mathbb{C}^d$. Подстановка в (11) решения уравнения (1) даёт

$$
G[v(t)] = \exp\left\{ i\int_{t'}^{t} d\tau \ \ \left(\exp[(\tau - t')A] \ \ v(\tau),\ z(t')\right)\right\} \ G',
$$

а математическое ожидание G' имеет вид:

$$
G' = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t'}^{t} d\tau' \ \ \sum_{\alpha}\left|\int_{\tau'}^{t}\left(v(\tau)\exp\left(\tau-\tau'\right)A\right)_{\alpha} d\tau\right|^2\right\} =
$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t'}^{t} d\tau_1 \int_{t'}^{t} d\tau_2 \left(v(\tau_1),\ g(\tau_1,\tau_2)v(\tau_2)\right)\right\}, \qquad (12)$$

при этом матричное ядро $g(\tau_1,\tau_2)$ определяется формулой

$$g(\tau_1,\tau_2) = \int_{\min(\tau_1,\tau_2)}^{t} d\tau' \ \exp\left[A(\tau_1-\tau')\right] \ \exp\left[A^{+}(\tau_2-\tau')\right].$$

Гауссовость $\{z(t)\}_{t'}^{t}$ непосредственно видна из (12).

Найдем теперь корреляционную функцию $K_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = \langle z_\alpha(\tau) \ \ z_\beta(\tau')\rangle$, которая вследствие гауссовости процесса $\{z(\tau)\}$ полностью его определяет.

Утверждение 3. Корреляционная функция $K_{\alpha\beta}(\tau,\tau')$ определяется формулой

$$K_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = \vartheta(\tau-\tau') \ \left(e^{A(\tau-\tau')}K\right)_{\alpha\beta} + \vartheta(\tau'-\tau) \ \left(Ke^{A^{+}(\tau'-\tau)}\right)_{\alpha\beta}, \qquad (13)$$

где $\alpha,\beta = 1,\ldots,d$; $\vartheta(\tau)$ – функция Хевисайда; матрица K удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова

$$AK + KA^{+} = -D. \qquad (14)$$

Доказательство. Согласно определению дифференциал Стратоновича

$$\langle z_\alpha(\tau) \ \ dw_\beta^{*}(\tau')\rangle = \frac{1}{2}D_{\alpha\beta} \ \ d\tau,$$

поэтому независящая (в силу стационарности процесса $z_\alpha(\tau)$ от τ матрица $K_{\alpha\beta}(\tau,\tau) = K_{\alpha\beta}$ может быть вычислена на основании (1)

$$< z_\alpha(\tau)(A \ \ z^{*}(\tau))_\beta d\tau > + < (Az(\tau) \ )_\beta z_\beta^{*}(\tau) \ \ d\tau > +$$

$$+ < z_\alpha(\tau)dw_\beta^{*}(\tau) > + < dw_\alpha(\tau)z_\beta^{*}(\tau) >=$$

$$=< z_\alpha(\tau) \ \ dz_\beta^{*}(\tau) > + < dz_\alpha(\tau) \ \ z_\beta^{*}(\tau) >= 0,$$

что эквивалентно уравнению (14). Наконец, усредняя уравнение (1), умноженное на $z^{*}(\tau')$, получаем ($\tau > \tau'$)

$$\frac{d}{d\tau} \ \ K_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = A_{\alpha\gamma}K_{\gamma\beta}(\tau,\tau'),$$

так как при $\tau > \tau'$ благодаря статистической независимости $< dw_\alpha(\tau) \ \ z_\beta^{*}(\tau') >= 0$. Отсюда следует часть утверждения (3) при $\tau > \tau'$. Случай $\tau < \tau'$ рассматривается аналогично.

Замечание 5. Ввиду диссипативности A уравнение (14) имеет единственное решение, так как в этом случае из (14) для матрицы K вытекает следующее интегральное представление $K = \int_0^\infty d\tau \ \ \exp(A\tau)D\exp(A^{+}\tau)$.

Тогда очевидно, что $K^{+} = K$, и поскольку K является пределом при $t \to \infty$ монотонно возрастающей матричной функции $D(t)$ (см. (8)), то $\det K \neq 0$.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ $Q(\lambda)$ ФУНКЦИОНАЛА $J_T[z]$

Целью настоящего раздела будет вычисление следующего математического ожидания

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda J_T[z]\right)\right\rangle . \tag{15}$$

Вычисление производящей функции $Q(\lambda)$ осуществим, пользуясь методом Карунена-Лоэва [6, 8], который основан на следующем утверждении.

Теорема (Карунен–Лоэв). Пусть $z(t)$ – стационарный гауссовский процесс со значениями в $\mathbb{C}^d$, и $K_{\alpha\beta}(\tau,\tau')$ суть его корреляционная функция; $e_n(\tau)$ – неслучайные собственные вектор-функции интегрального оператора с ядром $K_{\alpha\beta}(\tau,\tau')$ и, наконец, λ_n – соответственно собственные числа; $n = 1, 2, \ldots$;

$$e_n(\tau) = \lambda_n \int_0^T d\tau' \quad K(\tau,\tau') \quad e_n(\tau'). \tag{16}$$

Тогда справедливо сходящееся с вероятностью единица разложение Фурье

$$z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n e_n(\tau), \tag{17}$$

где случайные коэффициенты z_n – статистически независимые величины, а каждая из них имеет плотность распределения вероятностей

$$\rho_n(z_n) = \frac{\lambda_n}{2\pi}\exp\left(-\lambda_n \mid z_n \mid^2 /2\right). \tag{18}$$

Сформулированное утверждение справедливо тогда, когда не существует таких функций $e_m(\tau)$, для которых

$$\int_0^T K(\tau,\tau') \quad e_m(\tau') \quad d\tau' = 0,$$

так как в противном случае необходимо было бы положить $\lambda_m = \infty$ и $\rho_m(z_m) = \delta(z_m)$. Можно показать, что для ядра (13) указанное условие сводится к требованию отсутствия нетривиального подпространства $H \subset \ker D$, $H = \mathrm{inv} \quad \mathrm{A}^{+}$ либо, что эквивалентно, $\ker K = 0$. Последнее условие в дальнейшем будем предполагать выполненным в силу принципа регуляризации.

Доказательство теоремы приведено в [6].

Используя следующие функции

$$p_n(\tau) = \int_0^{\tau} \exp\left(A(\tau - \tau')\right) K e_n(\tau') d\tau',$$
$$q_n(\tau) = \int_{\tau}^{T} \exp\left(A^{+}(\tau' - \tau)\right) \quad e_n(\tau') \quad d\tau', \tag{19}$$

уравнение (16) с ядром (13) запишем в виде

$$e_n(\tau) = \lambda_n \left(p_n(\tau) + K q_n(\tau)\right).$$

С помощью этого соотношения и определения (19) найдем дифференциальное уравнение для вектора (p_n, q_n) в пространстве $\mathbb{C}^{2d}$:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ q_n(\tau \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ q_n(\tau \end{pmatrix}, \tag{20}$$

при этом оператор H в $\mathbb{C}^{2d}$ имеет следующую матричную структуру:

$$\begin{pmatrix} A + \lambda_n K & \lambda_n K^2 \\ -\lambda_n & -A^{+} - \lambda_n K \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Здесь в блоках матрицы указаны операторы, действующие в $\mathbb{C}^{d}$. Кроме того, функции $p_n(\tau)$ и $q_n(\tau)$ удовлетворяют, вследствие (19), граничным условиям

$$p_n(0) = 0, \qquad q_n(T) = 0. \tag{22}$$

Легко видеть, что задача об определении собственных чисел и собственных функций, отвечающих ядру (13), при связи (19), эквивалентна решению краевой задачи (20)-(22). Решение этой краевой задачи выражается в терминах матрицы $\exp(H\tau)$ и поэтому, ввиду (22),

$$\begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \exp(H\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ q_n(0) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Представим теперь $\exp(H\tau)$ в виде

$$\exp(H\tau) = \begin{pmatrix} E_1(\lambda,\tau) & E_2(\lambda,\tau) \\ E_3(\lambda,\tau) & E_4(\lambda,\tau) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $E_k(\lambda,\tau)$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ – операторы, действующие в $\mathbb{C}^{d}$ и функционально зависимые от λ и τ. Тогда для существования нетривиального решения краевой задачи при фиксированном λ, необходимо и достаточно существование нетривиального решения однородного уравнения

$$E_4(\lambda,\tau) \quad q_n(0) = 0, \tag{25}$$

что непосредственно следует из (23). Отсюда вытекает, что уравнение

$$\Phi_d(\lambda,T) \equiv E_4(\lambda,T) = 0 \tag{26}$$

определяет спектр собственных значений λ_n интегрального уравнения (16) с ядром (13).

Отметим, что в отличие от случая $d = 1$ [9] нельзя гарантировать простоту спектра $\{\lambda_n\}$. Число собственных функций, отвечающих данному λ_n, равно $(d - \mathrm{rank} E_4(\lambda_n, T))$. То, что это число может принимать произвольное значение, не превышающее d, вытекает из следующего примера. В качестве исходной системы стохастических дифференциальных уравнений возьмем d статистически независимых экземпляров одного и того же процесса Орнштейна-Уленбека. Тогда $A = -\nu I$, $D = \sigma I$, где I – единичная матрица, и ν, $\sigma > 0$. В этом случае [10]

$$\Phi_1(\lambda, T) = r^{-1}\left[(r+\nu)^2 \exp(rT) - (r-\nu)^2 \exp(-rT)\right], \quad r = \left(\nu^2 - \lambda\sigma\right)^{1/2}, \tag{27}$$

откуда следует, что $\Phi_d(\lambda, T) = (\Phi_1(\lambda, T))^d$.

В связи с этим вопрос о равенстве кратности каждого собственного значения λ_n и кратности каждого нуля уравнения $\Phi_d(\lambda, T) = 0$ должен быть исследован дополнительно (см. Приложение 3). Ввиду того, что каждый нуль уравнения $\Phi_d(\lambda, T) = 0$ является собственным значением ядра (13) и, обратно, равенство кратностей этих величин означает, что функция $\Phi_d(\lambda, T)$ пропорциональна детерминанту Фредгольма ядра $K(\tau, \tau')$. С целью получить аналитическое выражение для $Q(\lambda, T)$ (15) воспользуемся утверждением о том, что указанное равенство кратностей имеет место. Учтем прежде всего то, что $\Phi_d(\chi, T)$ – целая функция χ с нулями λ_n с учетом их кратности и не имеет никаких других нулей. Кроме того, эта функция имеет порядок роста, меньший единицы (доказательство этого утверждения приведено в Приложении 2). Поэтому для неё справедливо сходящееся разложение Адамара

$$\Phi_d(\chi, T) = \mathrm{const}\prod_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(1 - \chi / \lambda_{\mathrm{n}}\right). \tag{28}$$

Возвратимся теперь к (15) и учтем, что $z(t)$ – стационарный гауссовский процесс. Пусть сначала $V = I$. Используя теорему Карунена-Лоэва, получаем сходящееся с вероятностью единица разложение $\int_0^T \left(z(t), z(t)\right) \; dt = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$.

Тогда усреднение $\exp\left(-\lambda \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2\right)$ с помощью плотностей (18) приводит к

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + 2\lambda / \lambda_n\right)^{-1}, \tag{29}$$

т.е. существование производящей функции при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ обусловлено сходимостью этого бесконечного произведения и тем, что $\lambda_n > 0$. Из сопоставления выражений (28) и (29) вытекает, что это произведение сходится и $Q(\lambda) = \mathrm{const} \cdot [\Phi_d(-2\lambda, T)]^{-1}$. Поскольку безусловное среднее $Q(0)$ тождественно равно единице, то получим окончательно

$$Q(\lambda) = \Phi_d(0,T) / \Phi_d(-2\lambda, T). \tag{30}$$

Рассмотрим теперь общий случай $V \neq I$. Будем считать $\det V \neq 0$, что не приносит к потере общности в силу непрерывной зависимости всех результирующих выражений от V. Пусть $V^{1/2}$ – произвольный фиксированный квадратный корень из оператора V (конечный результат не будет зависеть от конкретного выбора вида $V^{1/2}$). Введем случайный процесс $z_V(\tau) = V^{1/2}z(\tau)$ и винеровский процесс $w_V(\tau) = V^{1/2}w(\tau)$ с ковариационной матрицей $D_V = V^{1/2}DV^{1/2}$, при этом $D_V^+ = D_V$. Так как матрица $A_V = V^{1/2}AV^{-1/2}$ диссипативна и процесс $z_V(\tau)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dz_V(\tau) = A_V z_V(\tau)d\tau + dw_V(\tau), \qquad z_V(\tau') = z'_V, \qquad t \to -\infty, \tag{31}$$

то $z_V(\tau)$ так же, как и $z(\tau)$, является процессом Орнштейна-Уленбека. Из (15) вытекает

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda \int_0^T \left(z_V(\tau), z_V(\tau) \right) d\tau \right) \right\rangle,$$

символ $<.>_V$ означает усреднение по мере, порожденной процессом $z_V(\tau)$. Следовательно

$$Q(\lambda) = \Phi_{Vd}(0,T) / \Phi_{Vd}(-2\lambda, T). \tag{32}$$

Здесь $\Phi_{Vd}(\chi,T) = \det E_{V4}(\chi,T)$, $E_{V4}(\chi,T)$ – правый нижний блок матрицы $\exp(H_V T)$ и

$$H_V = \begin{pmatrix} A_V + \chi K_V & \chi K_V^2 \\ -\chi & -A_V^+ - \chi K_V \end{pmatrix}, \tag{33}$$

а K_V – решение уравнения Ляпунова $A_V K_V + K_V A_V^+ = -D_V$, которое в силу (14) имеет вид $K_V = V^{1/2}KV^{1/2}$. После простых преобразований найдем $H_V = UH(V)U^{-1}$, где

$$U = \begin{pmatrix} V^{1/1} & 0 \\ 0 & V^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad H(V) = \begin{pmatrix} A + \chi KV & \chi KVK \\ -\chi & -A_V^+ - \chi VK \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Тогда $$\exp(H_V T) = U \exp(H(V)T)U^{-1} \text{ и}$$

$$E_{V4}(\chi,T) = V^{-1/2}E_{V4}(\chi,T;V)V^{1/2}, \tag{35}$$

где $E_{V4}(\chi,T;V)$ – правый нижний блок матрицы $\exp(H(V)T)$. Поэтому на основании (32) можно записать

$$Q(\lambda) = \Phi_d(0,T;V) / \Phi_d(-2\lambda,T;V), \qquad \Phi_d(\chi,T;V) = E_4(\chi,T;V). \tag{36}$$

Отметим, что в результате (36) матрица V везде участвует в целых положительных степенях. В силу непрерывной зависимости от V выражения (36), оно имеет место и при $\det V = 0$.

Замечание 6. Если W – неособенный оператор, $\det W \neq 0$, то, определив случайный процесс $\{z'(t) = Wz(t)\}$, перейдем к изоморфной задаче, причем

$$A \Rightarrow A' = WAW^{-1}, \qquad D \Rightarrow D' = WDW^{+},$$

$$V \Rightarrow V' = WVW^{-1}, \qquad K \Rightarrow K' = WKW^{+}.$$

Тогда матрица H_V преобразуется в

$$H'_V = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & (W^{-1})^{+} \end{pmatrix} \; H_V \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & W^{+} \end{pmatrix},$$

и поэтому $E'_4 = (W^{+})^{-1} E_4 W^{+}$. Таким образом, функция $\Phi_d(\lambda, T; V)$ при таком преобразовании не меняется. Выбирая подходящим образом W, например, приводящим A к жордановой форме, можно добиться чтобы для всех z выполнялось $\mathrm{Re}(Az, z) < 0$.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА $J_T[z]$

В этом разделе мы проанализируем свойства плотности $p(\varepsilon)$ распределения вероятностей (4). Исследуем прежде всего асимптотическое поведение собственных чисел $\{\lambda_m\}_1^{\infty}$ при $m \to \infty$.

Теорема. Пусть $\det D \cdot \det V \neq 0$, спектр D_V – простой. Тогда при $m \to \infty$ множество собственных чисел $\{\lambda_m\}$ распадается на d серий $\{\lambda_{mk}\}_1^{\infty}$, $k = 1, \ldots, d$ с учетом их кратности, где

$$\lambda_{mk} = \left(\frac{\pi m}{T} \delta_k^{-1/2} + O(1) \right)^2, \tag{37}$$

а $\{\delta_k\}$ – собственные числа оператора VD (либо оператора DV).

Доказательство. Заметим, что на основании уравнений (П12), (П13)

$$R_1(\lambda) = i\sqrt{\lambda} D_V^{1/2} + O(1), \qquad R_2(\lambda) = i\sqrt{\lambda} D_V^{1/2} + O(1),$$

$$S(\lambda) = -i\left(2\sqrt{\lambda}\right)^{-1} D_V^{-1/2} + O(\lambda^{-1}), \qquad \lambda \to \infty, \tag{38}$$

при этом выбор корня $D_V^{1/2}$ обусловлен выбором решений в (П12), конкретизация этого выбора не влияет на асимптотическое поведение $\{\lambda_m\}$. Ввиду (38) оператор $\lambda^{-1/2} R_1(\lambda)$ при больших λ является оператором скалярного типа, так как спектр D_V – простой. Таким образом оператор $R_1(\lambda)$ имеет спектральное разложение

$$R_1(\lambda) = \lambda^{1/2} \sum_{k=1}^{d} \vartheta_k(\lambda) \quad I_k(\lambda), \tag{39}$$

где собственные числа $\vartheta_k(\lambda)$ и соответствующие единичные операторы $I_k(\lambda)$ имеют, в силу (38), асимптотическое представление

$$\vartheta_k(\lambda) = i\delta_k^{1/2} + O(\lambda^{-1/2}), \qquad I_k(\lambda) = I_k + O(\lambda^{-1/2}), \tag{40}$$

а I_k – проекторы на собственные векторы оператора D_V. Аналогичное рассуждение справедливо для оператора $R_2(\lambda)$. Из формулы (39) имеем $\exp\left(R_1(\lambda)T\right) = \sum_{k=1}^{d} \exp\left(\sqrt{\lambda}\vartheta_k(\lambda)T\right) \quad I_k(\lambda)$ и поэтому

$$\exp\left(R_1(\lambda)T\right) = \exp\left(\tilde{R}_1(\lambda) \quad T\right) + o(1), \tag{41}$$

где $\tilde{R}_1(\lambda) = \lambda^{1/2} \sum_{k=1}^{d} \vartheta_k(\lambda) \quad I_k(\lambda), \qquad [\tilde{R}_1(\lambda), D] = 0.$

Для оператора $R_2(\lambda)$ справедлива формула, аналогичная (41),

$$\exp\left(-R_2(\lambda)T\right) = \exp\left(-\tilde{R}_2(\lambda) \quad T\right) + o(1), \tag{42}$$

где

$$\tilde{R}_2(\lambda) = \lambda^{1/2} \sum_{k=1}^{d} \vartheta'_k(\lambda) \quad I_k(\lambda), \quad [\tilde{R}_2(\lambda), D_V] = 0, \quad \vartheta'_k(\lambda) = i\delta_k^{1/2} + O(\lambda^{-1/2}). \tag{43}$$

Найдем теперь асимптотику матричных элементов матрицы $E_4(\lambda,T;V)$. Из (П14) и формул (38)-(43) получим

$$E_4(\lambda,T;V) = V^{1/2}\left[\exp\left(-\tilde{R}_2(\lambda)T\right) - \exp\left(\tilde{R}_1(\lambda)T\right)\right] \frac{\lambda^{1/2}}{2i} D_V^{-1/2} K_V V^{-1/2} + O(1). \tag{44}$$

Уравнение для собственных чисел $\{\lambda_m\}$, $\lambda^{-d/2}\Phi(\lambda,T;V) = 0$, согласно (44), представим в виде $\det\left\{\exp\left(-\tilde{R}_2(\lambda)T\right) - \exp\left(\tilde{R}_1(\lambda)T\right)\right\} + o(1) = 0$, так как произведение $\det D \cdot \det V$ отлично от нуля. Поскольку $\lambda_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то из этого уравнения следует, что при больших m можно указать такие $\lambda_m^{(0)}$, для которых $\lambda_m = \lambda_m^{(0)} + o(1)$. Величины $\lambda_m^{(0)}$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{k=1}^{d}\left[\exp\left(T\sqrt{\lambda}\vartheta_k(\lambda)\right) - \exp\left(-T\sqrt{\lambda}\vartheta'_k(\lambda)\right)\right] = 0.$$

Следовательно, все $\lambda_m^{(0)}$ распадаются на d серий $\lambda_{mk}^{(0)}$ с учетом их кратности, т.е.

$$\lambda_{mk}^{(0)} = \left(\frac{\pi m}{T}\delta_k^{-1/2} + O(1)\right)^2, \qquad m \to \infty,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-2} < \infty, \tag{45}$$

таким образом, интегральный оператор с ядром (13) является оператором Гильберта-Шмидта.

Согласно определению (15) плотность распределения вероятностей $p(\varepsilon)$ является обратным преобразованием Лапласа от функции $Q(\lambda)$

$$p(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \quad Q(\lambda) \quad e^{\lambda\varepsilon}. \tag{46}$$

Поскольку интеграл $\int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda \prod_{m=1}^{n}\left(1+2\lambda/\lambda_m\right)^{-1} e^{\lambda\varepsilon}$ сходится равномерно относительно n на пределах интегрирования и на каждом компакте в (-∞,∞) и сходимость бесконечного произведения в (29) в силу (45) равномерна по λ, то

$$p(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \quad \prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{2\lambda}{\lambda_m}\right)^{-1} e^{\lambda\varepsilon} \; = \sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{Res}\left[Q(\lambda)e^{\lambda\varepsilon}\right]\Big|_{\lambda=-\lambda_m/2}.$$

Отсюда вытекает

$$p(\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\varepsilon\lambda_m/2\right), \tag{47}$$

где $a_m=\left(\frac{\lambda_m}{2}\right)^{l_m}\sum_{k=1}^{l_m-1}\binom{l_m-1}{k} \quad \varepsilon^{\,l_m-k-1}\frac{d^k}{d\lambda^k} \; Q_m(\lambda)\Big|_{\lambda=-\lambda_m/2}$,

и $\quad Q_m(\lambda)=\prod_{n=1,\, n\le m}^{\infty} \left(1+2\lambda/\lambda_m\right)^{-1}.$

Здесь l_m – кратность точки спектра $\{\lambda_m\}$. Если спектр $\{\lambda_m\}$ – простой, то набор коэффициентов $\{a_m\}$ обладает свойством знакочередуемости,

$$a_m=(-1)^{m-1}\left|\operatorname{Res} \quad Q_m(\lambda)\right|_{\lambda=-\lambda_m/2}.$$

Следующее утверждение содержит основной результат этого раздела.

Теорема. Если $\det D\cdot\det V\neq 0$, спектр D_V – простой, то при любом $\varepsilon_0>0$ для $\varepsilon\ge\varepsilon_0$ ряд (47) сходится равномерно и абсолютно, следовательно, при $\varepsilon\to\infty$

$$p(\varepsilon)=a_1\exp(-\lambda_1/2)+O\left(e^{-\varepsilon\lambda_2/2}\right). \tag{48}$$

Замечание. Асимптотическое поведение (48) плотности $p(\varepsilon)$ показывает неприменимость центральной предельной теоремы для распределения случайных значений функционала $J_T[z]$.

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно вытекает из (37) и следующей оценки на коэффициенты $\{a_m\}$

$$|a_m|\le \text{const}\cdot\varepsilon^{\text{d-2}}, \qquad \varepsilon\to\infty, \qquad m\to\infty, \tag{49}$$

при этом каждая k-ая серия $(1\le k\le d)$ коэффициентов $\{a_{mk}\}$ соответствует k-ой серии собственных чисел $\{\lambda_{mk}\}$. Сначала допустим, что асимптотически все нули $\{\lambda_m\}$ – простые, общий случай может быть получен с помощью предельного перехода, приводящего, может быть, к совпадению δ_k. В этом случае

$$a_{mk} = \Phi_d(0,T;V)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\Phi_d(-2\lambda,T;V)\right]^{-1}\Big|_{\lambda=-\lambda_m/2}.$$

Согласно (44)

$$\Phi_d(\lambda,T;V) = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2i}\right)^d \det K \cdot \left(\frac{\det V}{\det D}\right)^{1/2} \times$$

$$\times\prod_{k=1}^{d}\left[\exp\left(-\vartheta_k'(\lambda)T\right) - \exp\left(-\vartheta_k(\lambda)T\right)\right] + O\left(\lambda^{(d-1)/2}\right).$$

Поскольку возможно дифференцирование этого асимптотического разложения, найдем производную $\partial\Phi_d(-2\lambda,T;V)/\partial\lambda$ в точке $\lambda = -\lambda_{mk}/2$. Тогда

$$a_{mk} = \text{const}\ \ (\text{-}1)^m\left\{\sqrt{\delta_k}\ \ \left(\frac{m}{\sqrt{\delta_k}}\right)^{d-1}\prod_{j=1,\,j\neq k}^{d}\sin\left(\frac{\pi m\sqrt{\delta_j}}{\sqrt{\delta_k}} + O(1)\right) + O(m^{d-2})\right\}^{-1}.$$

Из этой формулы и (47) следует, что коэффициенты a_m ведут себя при $m\to\infty$ при δ_k наихудшим образом, в случае совпадения всех собственных чисел δ_k. Устремляя все δ_k друг к другу, получаем оценку (49).

ВЫВОДЫ

Таким образом, в настоящей работе проведено аналитическое исследование квадратичного функционала, основанного на траекториях процесса Орнштейна-Уленбека, построена характеристическая функция распределения случайных значений такого функционала. Найденная в работе характеристическая функция полностью определяет статистические свойства функционала управления, что может быть использовано при синтезе систем автоматического управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем положительность собственных чисел $\{\lambda_n\}$ ядра (13).

Теорема. Пусть правая часть равенства (16) не равна тождественно нулю, т.е. $\ker K = 0$. Тогда собственные числа $\{\lambda_n\}$ положительны.

Доказательство. Введем вектор $f(\tau) = K^{1/2}e_n(\tau)$ и матрицу $\tilde{A} = K^{-1/2}AK^{1/2}$. Воспользуемся равенством

$$\vartheta(\tau)\exp(\tilde{A}\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\omega\tau}\left(i\omega - \tilde{A}\right)^{-1}, \qquad (\text{П}1)$$

которое является следствием интегрального представления Данфорда-Рисса для матричных аналитических функций [7] и тем, что реальная часть собственных чисел матрицы $\tilde{A}$ меньше нуля (так же, как и матрицы A в силу её диссипативности). Тогда на основе (16) получим неравенство

$$0 < \int_0^T\left(e_n(\tau), e_n(\tau)\right)d\tau =$$

$$= \lambda_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^T d\tau' \Big(f_n(\tau), \Big[e^{i\omega(\tau-\tau')} (i\omega - \tilde{A})^{-1} + e^{i\omega(\tau'-\tau)} (i\omega - \tilde{A}^{+})^{-1} \Big] f_n(\tau') \Big) . \qquad (\text{П}2)$$

Введем теперь вектор $\tilde{f}(\omega) = \int\limits_0^T d\tau e^{i\omega\tau} f(\tau)$, тогда из (П2) следует

$$0 < \int\limits_0^T \big(e_n(\tau), e_n(\tau) \big) d\tau = \qquad (\text{П}3)$$

$$= \lambda_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int\limits_0^T d\tau \Big(\tilde{f}_n(\omega) \Big[(i\omega - \tilde{A})^{-1} - (i\omega - \tilde{A}^{+})^{-1} \Big], \tilde{f}_n(\omega) \Big) =$$

$$= -\lambda_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \Big((i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1} \tilde{f}_n(\omega), (\tilde{A} + \tilde{A}^{+}) (i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1} \tilde{f}_n(\omega) \Big) .$$

Так как

$$\tilde{A} + \tilde{A}^{+} = K^{-1/2}(AK + KA^{+})K^{-1/2} = -K^{-1/2} D K^{-1/2} < 0 ,$$

то все λ_n положительны, кроме того возможного случая, когда интеграл в правой части (П3) строго равен нулю. Но в этом случае для почти всех ω $(i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1} \tilde{f}_n(\omega) = 0$ и поэтому для почти всех τ $f(\tau) = K^{1/2} e_n(\tau) = 0$, т.е. $e_n(\tau) \in \ker K$, что не имеет места по условиям теоремы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценим порядок роста функции $\Phi_d(\lambda, T; V)$. Поскольку нам потребуется явное выражение для матрицы $E_4(\lambda, T; V)$, представим резольвенту оператора H_V (32) в виде

$$(\chi - H_V)^{-1} = \begin{pmatrix} G_1(\chi) & G_2(\chi) \\ G_3(\chi) & G_4(\chi) \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}4)$$

тогда на основании операторного исчисления Данфорда-Рисса и определения матрицы $E_4(\lambda, T; V)$ следует

$$E_4(\lambda, T; V) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\chi \, G_4(\chi) e^{\chi T} , \qquad (\text{П}5)$$

при этом контур интегрирования должен охватывать все собственные числа матрицы H_V . Из (П4) вытекает

$$G_4(\chi) = \Big[\big(\chi + A^{+} + \lambda V K \big) + \lambda^2 V \big(\chi - A - \lambda K V \big)^{-1} K V K \Big]^{-1} . \qquad (\text{П}6)$$

Как и ранее, будем предполагать, что $\det V \neq 0$. Поэтому рассмотрим оператор $G_{4V}(\chi) = V^{-1/2} G_4(\chi) V^{1/2}$, такое преобразование оставляет неизменным функцию $\Phi_d(\lambda, T; V)$. Из (П6) и уравнения Ляпунова для K_V следует

$$G_4(\chi) = \Big[\chi^2 + \chi \big(A_V^{+} - A_V \big) - A_V A_V^{+} + \lambda D_V \Big]^{-1} \big(\chi - A_V - \lambda K_V \big) . \qquad (\text{П}7)$$

Интеграл (П5) определяется вкладом полюсов, являющихся нулями полинома

$$\tilde{P}(\chi) = \det\left[\chi^2 + \chi\left(A_V^+ - A_V\right) - A_V A_V^+ + \lambda D_V\right]. \qquad (П8)$$

Нули этого полинома $\chi = \chi(\lambda)$ обладают следующим свойством инвариантности: $\chi \Rightarrow -\chi^*(\lambda^*)$, что указывает на возможность считать их двумя наборами собственных чисел для двух матриц $R(\lambda)$ и $-R^+(\lambda^*)$. С целью нахождения этих матриц представим операторный полином

$$\tilde{P}(\chi) = \chi^2 + \chi(A_V^+ - A_V) - A_V A_V^+ + \lambda D_V \qquad (П9)$$

в виде

$$\tilde{P}(\chi) = (\chi - R_1)(\chi + R_2). \qquad (П10)$$

Для существования представления (П10) необходимо, чтобы матрицы R_1 и R_2 удовлетворяли уравнениям

$$R_2 - R_1 = A_V^+ - A_V, \quad R_1 R_2 = A_V^+ A_V - \lambda D_V, \qquad (П11)$$

из которых следует

$$R_1^2 + R_1\left(A_V^+ - A_V\right) - A_V A_V^+ + \lambda D_V = 0,$$
$$R_2^2 - \left(A_V^+ - A_V\right) R_2 - A_V A_V^+ + \lambda D_V = 0.$$

(

Известно [11], что каждое из этих уравнений разрешимо и, кроме того, каждое из решений является аналитической функцией от λ, обладающей конечным множеством особенностей. Выберем определенную ветвь решений для, например, $R_2 = R_2(\lambda)$. На основании обобщенной теоремы Безу [11] результат правого деления многочлена $\mathsf{P}(\chi)$ на $(\chi + R_2)$ должен давать $(\chi - R_1)$, при этом ветвь R_1 автоматически согласовывается с выбранной выше ветвью R_1.

Выберем такие ветви R_1 и R_1, которые при $\lambda \to 0$ имеют вид:

$$R_1 = A + \lambda K + o(\lambda), \qquad R_2 = A^+ + \lambda K + o(\lambda),$$

тогда для достаточно малых λ согласованные спектры операторов R_1 и $(-R_2)$ не пересекаются в силу диссипативности *A*. Поэтому при тех же λ однозначно разрешимо относительно оператора *S* следующее уравнение:

$$SR_1 + R_2 S = I. \qquad (П13)$$

Для построения аналитического продолжения оператора $S = S(\lambda)$ покажем конечность набора Λ тех λ, для которых происходит перекрытие спектров операторов R_1 и $(-R_2)$. Пусть λ_0 – граничная точка этого набора. Существует путь γ в плоскости λ, приводящий в точку λ_0 с обходом точек неаналитичности $R_1(\lambda)$ и $R_2(\lambda)$. Из уравнений (П11), переходя вдоль пути γ к пределу $\lambda \to \lambda_0$, находим, что производной $dR_2 / d\lambda$ в граничной точке не существует, поскольку уравнение для этой производной $R_1 \frac{dR_1}{d\lambda} + \frac{dR_2}{d\lambda} R_2 = -DV$ при $\det D \neq 0$ не разрешимо в точке λ_0 из-за перекрытия спектров рассматриваемых операторов R_1 и $(-R_2)$. Поэтому $\lambda = \lambda_0$ – точка неаналитичности для $R_2(\lambda)$. Ввиду конечности набора точек неаналитичности оператора $R_2(\lambda)$ множество Λ совпадает с этим набором.

Найдем теперь искомое представление для матрицы $E_4(\lambda, T; V)$. Благодаря однозначности решения уравнения (П13) для оператора S из (П10) следует $\{\tilde{P}(\chi)\}^{-1} = S(\chi - R_1)^{-1} - (\chi + R_2)^{-1} S$. Поэтому в силу (П7) и (П9) получим после взятия контурного интеграла в (П5)

$$E_{4V}(\lambda, T; V) = V^{1/2}\big[S\exp(R_1 T)R_1 + R_2\exp(-R_2 T)S +$$

$$+\exp(-R_2 T)S - S\exp(R_1 T)R_1\big](A_V + \lambda K_V)V^{-1/2}. \quad \text{(П14)}$$

На основании (П14) можно найти оценку для порядка роста α функции $\Phi_d(\lambda, T; V)$

$$\alpha = \lim_{r\to\infty}\Big[\ln\ln\max_{|\lambda|=R}\left|\Phi_d(\lambda, T; V)/\ln R\right|\Big],$$

для чего достаточно получить асимптотику при больших $|\lambda|$ операторов, R_1, R_2, и S. Из (П12) и (П13) вытекает, что при $\det V \neq 0$

$$R_1(\lambda) \approx R_2(\lambda) \approx i(\lambda D_V)^{1/2}, \qquad S(\lambda) \approx (2i)^{-1}(\lambda D_V)^{-1/2}. \quad \text{(П15)}$$

Поскольку $\Phi_d(\lambda, T; V) \leq d!\left\|E_4(\lambda, T; V)\right\|^d$, где норма понимается в смысле максимума матричных элементов, и $\left\|\exp(R_1\tau)\right\| \leq 1 + d^{-1}\left[\exp\left(Td\left\|R_1\right\|\right) - 1\right]$, то на основании (П15) можно заключить, что

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \quad \text{(П16)}$$

для искомого порядка роста.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Докажем равенство кратностей κ'_n любого нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, \tau; V)$ и величины $\kappa_n = \dim\ker E_4(\lambda_n\tau; V)$ размерности ядра оператора E_4.

При $d = 1$ это равенство доказывается непосредственно на основе явного представления (27) для $\Phi_1(\lambda, \tau; V)$.

Докажем предварительно простое утверждение, имея в виду общий случай $d \geq 1$, что кратность нуля λ_n не меньше, чем κ_n. Отметим, что содержание этого утверждения не связано с конкретной структурой матрицы E_4, а оно имеет место для произвольной матричной функции.

Приведем матрицу E_4 к жордановой матричной форме

$$E_4 = \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & 0 & \\ & & B_3 & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \cdot \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \beta_i & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \beta_i & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \beta_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_i \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta_i = \beta_i(\lambda, \tau)$ – некоторые функции λ и τ. Число нулевых собственных векторов κ_n матрицы $E_4(\lambda_n \tau; V)$ равно $\sum_m \dim B_{i_m}$, где суммирование осуществляется по тем i_m, для которых функция $\beta_{i_m}(\lambda, \tau)$ обращается в нуль при $\lambda = \lambda_n$. Если k_m – кратность нуля λ_n функции $\beta_{i_m}(\lambda, \tau)$, то кратность нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, \tau; V)$ равна $\sum_m k_m \dim B_{i_m}$. Отсюда и вытекает указанное утверждение.

Теперь докажем обратное.

Утверждение. Кратность нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, \tau; V)$ не превышает κ_n.

Доказательство. Введем пространство упорядоченных пар матриц $\mathrm{M} = \{(D, A)\}$ таких, что $D^+ = D$, $D > 0$ и A – диссипативна. Для того чтобы подчеркнуть зависимость функций $\Phi_d(\lambda, \tau; V)$, $Q(\lambda, \tau; V)$ и матрицы $E_4(\lambda, \tau; V)$ от элементов пространства M, введем обозначения: $\Phi_d(\lambda, | y) \equiv \Phi_d(\lambda, \tau; V)$, $Q(\lambda \mid y) \equiv Q(\lambda)$, $E_4(\lambda \mid y) \equiv E_4(\lambda, \tau; V)$, где $y \equiv (D, A)$.

Доказательство будем строить от противного. Именно, предположим, что не существует всюду плотного в M подмножества X такого, что при $y \in X$ для всех нулей λ_n имело бы место совпадение κ_n и κ'_n, где κ'_n – кратность нуля λ_n функции $\Phi(\lambda \mid y)$. Иными словами, при y, принадлежащих некоторому открытому подмножеству в M, функция $\pi(\lambda \mid y) = \mathrm{const} \cdot \Phi(\lambda \mid y) Q(-\lambda / 2)$ не равна тождественно 1, а является целой функцией λ, имеющей разложение Адамара. Если бы κ_n и κ'_n совпадали на всюду плотном в M подмножестве, то на этом подмножестве $\pi(\lambda \mid y) = 1$ и, используя непрерывность функций $\Phi(\lambda \mid y)$ и $Q(\lambda \mid y)$ по y, мы бы имели $\pi(\lambda \mid y) \equiv 1$. Будем считать, что набор нулей $\{\lambda_n\}$ всегда упорядочен по величине. Сопоставим каждой точке $y \in \mathrm{M}$ соответствующий ей набор $\{\lambda_n\}$. Тем самым мы получим набор функций $\{\lambda_n(y)\}$, причем $\lambda_n(y) \le \lambda_{n+1}(y)$. В связи с тем, что кратность каждого нуля $\{\lambda_n(y)\}$ функции $\Phi(\lambda \mid y)$ может быть только конечной, назовем функцию $\lambda_n(y)$ l-кратно вырожденной в точке y, если существует ровно $l > 1$ номеров m таких, что $\lambda_m(y) = \lambda_n(y)$. Для l-кратно вырожденной в y

функции $\lambda_n(y)$ имеем $\left.\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\Phi(\lambda\mid y)\right|_{\lambda=\lambda_n(y)}=0;$ $k=0,1,\ldots,l-1;$ $\left.\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}\Phi(\lambda\mid y)\right|_{\lambda=\lambda_n(y)}\neq 0$.

Функция $\Phi(\lambda\mid y)$ согласно построению, данному в разделе 4, бесконечно дифференцируема по λ и y в $\mathsf{M}\otimes(0,\infty)$. Построим множества X_l в M $X_l=\{y;$ существует $\lambda_n(y)$, $\left.\partial^k\Phi(\lambda\mid y)/\partial\lambda^k\right|_{\lambda=\lambda_n(y)}=0;$ $k=0,1,\ldots,l-1;$ $\left.\partial^l\Phi(\lambda\mid y)/\partial\lambda^l\right|_{\lambda=\lambda_n(y)}\neq 0\};$ $l=2,3,\ldots$, т.е. при $y\in X_1$ существует по крайней мере одна l-кратно вырожденная функция $\lambda_n(y)$. Из предположения, принятого нами выше, следует, что замыкание X_1 не исчерпывает M. Тогда, ввиду конечной кратности вырождения каждой $\lambda_n(y)$, существует по крайней мере одно непустое X_l, содержащее открытое подмножество Z. В самом деле, если замыкание X_1 совпадает с M, то при $y\in X_1$, ввиду бесконечной дифференцируемости $\Phi(\lambda\mid y)$, по теореме о неявной функции все $\lambda_n(y)$ невырожденны, т.е. $\kappa'_n=1$ при всех n. Это противоречит предположению.

Точно так же, применяя теорему о неявной функции к $\partial^{l-1}\Phi(\pi\mid y)/\partial\lambda^{l-1}=0$ при $y\in Z$, существует однозначная дифференцируемая функция $\lambda(y)$, которая совпадает с какой-то l-кратно вырожденной при $y\in Z$ функцией $\lambda_n(y)$. Можно утверждать большее, так как $\Phi(\lambda\mid y)$ – бесконечно дифференцируемая функция, то таковой же является и $\lambda(y)$. Поэтому, представив $\Phi(\lambda\mid y)$ в виде $\Phi(\lambda\mid y)=(\lambda-\lambda(y))^l\Phi'(\lambda\mid y)$, где $\Phi'(\lambda(y)\mid y)\neq 0$, $y\in Z$, имеем

$$\left.\partial_y^k\Phi(\lambda\mid y)\right|_{\lambda=\lambda(y)}=0;\qquad k=0,1,\ldots,l-1;\tag{П17}$$

$$\left.\partial_y^l\Phi(\lambda\mid y)\right|_{\lambda=\lambda(y)}\neq 0;\qquad l>1.\tag{П18}$$

Здесь ∂_y – дифференциал по y в M.

Таким образом, в открытом подмножестве Z уравнения (П17) при условии (П18) должны иметь совместные решения. При $k=0,1$ (П17) представляет собой систему из $(3d^2+1)$ уравнений относительно $(3d^2+1)$ вещественных независимых параметров и поэтому, вообще говоря, они не могут иметь решений при y, принадлежащих множеству точек общего положения. Если это справедливо, то мы и прейдем к искомому противоречию, доказывающему сформулированное утверждение. Нам потребуется следующая

Лемма. Если матрица M удовлетворяет уравнениям

$$ME(\lambda\mid y)=0,\tag{П19}$$

$$\mathrm{Sp}\big(M\,\partial_y E(\lambda\mid y)\big)=0,\tag{П20}$$

то M=0.

Доказательство. Из всех возможных вариаций в (П20) нам достаточно рассмотреть лишь такие, которые удовлетворяют условиям неизменяемости двух матриц: а) $A_V A_V^+ - \lambda D$; б) $A_V - A_V^+$. При выполнении этих условий справедливо $\partial_y R_1 = \partial_y R_2 = 0$ и, следовательно $\partial_y S = 0$. Поэтому из (П14) вытекает

$$\partial_y E = V^{1/2}\tilde{E}\left(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V\right)V^{-1/2}, \quad \tilde{E} = \exp(-R_2\tau)S - S\exp(R_1\tau). \quad (П21)$$

Из (П20) следует $\mathrm{Sp}\left(M\tilde{E}\left(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V\right)\right) = 0$.

С помощью уравнения Ляпунова $A_V K_V + K_V A_V^+ = -D_V$ найдем уравнение для $\partial_y K_V$

$$A_V \cdot \partial_y K_V + \partial_y K_V \cdot A_V = -\frac{1}{\lambda}\left[\partial_y A_V \cdot \left(A_V^+ + \lambda K_V\right) + \left(A_V^+ + \lambda K_V\right) \cdot \partial_y A_V\right].$$

Используя стандартную форму решения [12] уравнения Ляпунова, получаем

$$\mathrm{Sp}\left(M\tilde{E}\partial_y K_V\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty d\tau\, \mathrm{Sp}\left\{\left[(A_V^+ + \lambda\, K_V)e^{A_V^+\tau}M\tilde{E}e^{A_V\tau} + e^{A_V^+\tau}M\tilde{E}e^{A_V\tau}(A_V + K_V)\right] \cdot \partial_y A_V\right\}.$$

После преобразований найдем

$$\mathrm{Sp}\left[M\tilde{E}\partial_y K_V\left(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V\right)\right] = \mathrm{Sp}\left(\left\{2M\tilde{E} - \lambda[K_V, N]_+\right\}\partial_y A_V\right),$$

где символом $[.,.]_+$ обозначен антикоммутатор фигурирующих матриц и

$$N = \int_0^\infty d\tau\;\; e^{A_V^+\tau} \cdot M\tilde{E} \cdot e^{A_V\tau}.$$

Ввиду произвольности дифференциала $\partial_y A_V$ с учетом того, что $\partial_y(A_V^+ - A_V) = 0$, получим следующую систему тождеств:

$$M\tilde{E} = \frac{\lambda}{2} \cdot [K_V, N]_+, \qquad A_V^+ N + N A_V = M\tilde{E}.$$

Из этих тождеств следует, что матрица N удовлетворяет условиям

$$\left(A_V^+ - \frac{\lambda}{2}K_V\right)N + N\left(A_V - \frac{\lambda}{2}K_V\right) = 0. \quad (П22)$$

Учтем теперь то обстоятельство, что вместо основной задачи нахождения производящей функции можно рассматривать изоморфную ей задачу, получающуюся с помощью неособенного преобразования W (см. Замечание 6). С помощью указанного преобразования всегда можно добиться, чтобы диссипативная матрица A_V удовлетворяла условию $\mathrm{Re}\,(A_V f, f) < 0$ для произвольного ненулевого вектора f. Тогда матрицы $(A_V - \lambda K_2 / 2)$ и $(-A_V^+ + \lambda K_2 / 2)$ не имеют общих собственных чисел, так как собственные числа матрицы $(A_V - \lambda K_2 / 2)$ имеют отрицательную действительную часть. Поэтому из (П22) следует, что

$$N = \int_0^\infty d\tau \ e^{A_V^+\tau} \cdot M\tilde{E} \cdot e^{A_V\tau} = 0 .$$

В результате интегрирования получим

$$M\tilde{E} = 0 . \qquad (П23)$$

Из этого равенства и условия (П19) следует

$$M\left(SR_1 \exp(R_1\tau) + \exp(-R_2\tau)R_2S\right) = 0 ,$$

а повторное использование (П23) и уравнения (П13) приводит к $M\exp(R_1\tau) = 0$. Поэтому M=0. Лемма доказана.

Воспользовавшись Леммой покажем теперь, что равенства (П17) и (П18) не могут одновременно выполняться на подмножестве Z. Поскольку $\operatorname{rank} E(\lambda_n \mid y) = d - l + 1$, то

$$\det E(i_1,\ldots,i_k, j_1,\ldots,j_k) = 0 , \qquad k = 0,1,\ldots,l-2 , \qquad (П24)$$

где $E(i_1,\ldots,i_k, j_1,\ldots,j_k)$ – матрица, получающаяся из $E(\lambda_n \mid y)$ вычеркиванием строк с номерами $(i_1,\ldots,i_k)$ и столбцов с номерами $(j_1,\ldots,j_k)$. Вместе с тем существуют такие наборы номеров $(i_1,\ldots,i_{l-1})$ и $(j_1,\ldots,j_{l-1})$, для которых

$$L\left(i_1,\ldots,i_{l-1}; j_1,\ldots,j_{l-1}\right) = (-1)^\Sigma \det E\left(i_1,\ldots,i_{l-1}; j_1,\ldots,j_{l-1}\right) \neq 0 ,$$

где $\Sigma = i_1 + \ldots + i_{l-1} + j_1 + \ldots + j_{l-1}$.

Из определения $\Phi(\lambda \mid y)$ и равенства

$$L\left(i_1,\ldots,i_k; j_1,\ldots,j_k\right) = 0 , \qquad k = 1,\ldots,l-2 ,$$

получим

$$\partial_y^{l-1}\Phi(\lambda_n \mid y) = \sum_{i_1,\ldots,i_{l-1}, j_1,\ldots,j_{l-1}} L\left(i_1,\ldots,i_{l-1}; j_1,\ldots,j_{l-1}\right) \times \qquad (П25)$$

$$\times \left(\partial_y E\right)_{i_1 j_1} \cdot \left(\partial_y E\right)_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot \left(\partial_y E\right)_{i_{l-1} j_{l-1}} = 0 ,$$

суммирование в этом выражении проводится независимо по всем указанным индексам, полагая при этом $L = 0$, если в наборах $(i_1,\ldots,i_{l-1})$ и $(j_1,\ldots,j_{l-1})$ встретятся повторяющиеся индексы.

Введем теперь последовательность матриц

$$L^{(1)}_{j_1 i_1} = \sum_{\substack{i_2,\ldots,i_{l-1} \\ j_2,\ldots,j_{l-1}}} L\left(i_{l-1},\ldots,i_2,i_1; j_{l-1},\ldots,j_2,j_1\right) \cdot \left(\partial_y E\right)_{i_{l-1} j_{l-1}} \cdot \ldots \cdot \left(\partial_y E\right)_{i_2 j_2} \qquad (П26)$$

и, кроме того, при $k = 2,3,\ldots,l-1$, а также для любых возможных наборов $(i_1,\ldots,i_k)$ и $(j_1,\ldots,j_k)$ матрицы

$$L^{(k)}_{j_k i_k}\left(i_1,\ldots,i_{k-1}; j_1,\ldots,j_{k-1}\right) \equiv \qquad (П27)$$

$$\equiv \sum_{\substack{i_{k+1},\ldots,i_{l-1} \\ j_{k+1},\ldots,j_{l-1}}} L\left(i_{l-1},\ldots,i_1; j_{l-1},\ldots,j_1\right) \cdot \left(\partial_y E\right)_{i_{l-1} j_{l-1}} \cdot \ldots \cdot \left(\partial_y E\right)_{i_{k+1} j_{k+1}} .$$

Из разложения минора $(k+1)$-го порядка матрицы E_4 по минорам k-го порядка следует тождество

$$\sum_{i_s} L(i_1,\dots,i_{k+1};j_1,\dots,j_{k+1})E_{i_s j_s} = 0\,, \qquad k = 1,2,\dots,l-2\,,$$

поскольку минор более высокого порядка равен нулю, $\mathrm{rank}E_4 = d-l+1$. В терминах матриц (П26), (П27) последнее тождество принимает вид

$$\begin{aligned} &L^{(1)}E(\lambda_n \mid y) = 0\,, \\ &L^{(2)}(i_1;j_1)\, E(\lambda_n \mid y) = 0\,, \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &L^{(l-1)}(i_1,\dots,i_{l-2};j_1,\dots,j_{l-2})\, E(\lambda_n \mid y) = 0\,. \end{aligned} \tag{П28}$$

Учтём, что из (П25) следует

$$\mathrm{Sp}\left(L^{(1)}\partial_y E\right) = 0\,. \tag{П29}$$

Теперь применим к системам (П28) и (П29) доказанную в этом Приложении Лемму. На основании её утверждения следует, что $L^{(1)} = 0$. Это равенство можно переписать в виде $\mathrm{Sp}L^{(2)}(i_1,j_1)\,\partial_y E(\lambda_n \mid y) = 0$. Далее, повторно применяя Лемму, получаем $L^{(2)}(i_1,j_1) = 0$. Продолжив этот рекуррентный процесс спуска, придем к равенству

$$L_{i_{l-1},j_{l-1}}(i_1,\dots,i_{l-2};j_1,\dots,j_{l-2}) = L(i_1,\dots,i_{l-1};j_1,\dots,j_{l-1}) = 0\,. \tag{П30}$$

Это равенство означает, что $\mathrm{rank}E(\lambda_n \mid y) \le d-l$.

Таким образом, мы пришли к требуемому противоречию, которое указывает, что условия (П17) и (П18) несовместны на открытом подмножестве Z. Итак, доказано совпадение величин κ_n и κ_n'.

SUMMARY

DENSITY OF SHARING PROBABILITY ENERGY FUNCTIONAL FROM PATHS OF THE STOCHASTIC ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS

Y.P.Virchenko*, A.S.Mazmanishvili

**Single Crystal Institute NASU*
Sumy State University,

In work the algorithm of calculation of Fredholm's determinant for the kernel $K(\tau,\tau')$, being the correlation function of multidimensional Ornstein-Uhlenbeck process is build. Karhunen-Loeve's method. The characteristic function of the random values of energy functional $J_T[z]$ from trajectories of process z(t), $J_T[z] = \int_0^T (z(\tau),Vz(\tau)\; d\tau$ is build. The asymptotic for probability density function p(ε) is found for ε→∞.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Christopeit R., Helmes K. Limited risk control of the Ornstein-Uhlenbeck process // Math. Operationsforsch. und Statist. – Ser. Optimiz. – 1980. – Vol. 11, – 4, – P. 605--616.

2. Саймон Б. Модель $P(\varphi)$ эвклидовой квантовой теории поля/ Б. Саймон. – М.: Наука, 1978. – 358 с.
3. Пугачёв В.Н. Стохастические динамические системы/ В.Н. Пугачёв, И.Н. Синицын. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. Lavenda B.H. The Physical Implications of Two Forms of Stochastic Calculi / B.H. Lavenda, M. Compiani // Lettere al Nuovo Cimento. – 1983. – Vol. 38, – 9. - P. 345-352.
5. Ito versus Stratonovich revisited/ Smyth J., Moss P., McClintak P.V.E., Clarckson D. // Physical Letters. – 1983. – Vol. 97. – 3. – P. 95-98.
6. Дуб Дж. Вероятностные процессы / Дж. Дуб. – М.: Издательство иностранной литературы, 1965. – 605 с.
7. Глазман И.М. Конечномерный линейный анализ/ И.М. Глазман, Ю.И.Любич. – М.: Наука, 1969. – 476 с.
8. Лоэв М. Теория вероятностей / М. Лоэв. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 719 с.
9. Slepian D. Fluctuation of random noise power/ D. Slepian // Bell Systems Technical Journal. – 1958. – P. 95-98.
10. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М. Лэкс. – М.: Мир, 1974. –299 с.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2009 г.