

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О. М. Кобяков, І. Є. Бражник

**ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ.**  
**Теорія сигналів**

Конспект лекцій



Суми  
Сумський державний університет  
2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ.**  
**Теорія сигналів**

Конспект лекцій  
для студентів спеціальності  
172 «Телекомунікації та радіотехніка»  
усіх форм навчання

Затверджено на засіданні  
кафедри електроніки і  
комп'ютерної техніки  
як конспект лекцій  
із дисципліни  
«Теорія сигналів та  
розрахунку електричних кіл».  
Протокол № 4 від 11.10. 2016 р.

Суми  
Сумський державний університет  
2017

Теорія електричних кіл та сигналів. Теорія сигналів :  
конспект лекцій / укладачі: О. М. Кобяков, І. Є. Бражник. –  
Суми : Сумський державний університет, 2017. – 125 с.

Кафедра електроніки і комп'ютерної техніки

# Зміст

С.

<b>Розділ 1</b> Спектральний аналіз детермінованих сигналів. Модуляція.....	4
Лекція 1 Спектри періодичних сигналів.....	4
Лекція 2 Спектри неперіодичних сигналів.....	20
Лекція 3 Енергетичний спектр. Модуляція.....	35
Лекція 4 Кутова модуляція сигналів .....	45
<b>Розділ 2</b> Спектральний аналіз проходження детермінованих сигналів через лінійні кола.....	55
Лекція 5 Спектральний метод розрахунку реакції лінійного кола на детерміновані сигнали.....	55
Лекція 6 Зв'язок частотних і часових характеристик лінійних кіл і детермінованих сигналів.....	65
<b>Розділ 3</b> Кореляційний аналіз детермінованих сигналів.....	76
Лекція 7 Автокореляція і взаємна кореляція сигналів.....	76
<b>Розділ 4</b> Випадкові сигнали і перетворення їх характеристик у лінійних колах.....	85
Лекція 8 Випадкові величини і випадкові процеси .....	85
Лекція 9 Стаціонарні випадкові величини в часовому і спектральному вимірах.....	94
Лекція 10 Вузькосмугові детерміновані і випадкові сигнали .....	103
Лекція 11 Перетворення характеристик випадкового процесу у лінійному колі.....	114
Список літератури.....	124

Розділ 1  
**Спектральний аналіз детермінованих сигналів.**  
**Модуляція**

*Лекція 1*

**Спектри періодичних сигналів**

1 *Поняття сигналу.*

2 *Спектральний спосіб описування періодичних сигналів.  
Ряд Фур'є.*

3 *Спектри періодичної послідовності відеоімпульсів.*

4 *Спектри періодичної послідовності радіоімпульсів.*

5 *Зв'язок між формою сигналу та його спектром.*

**1 Поняття сигналу**

*Сигналом* (від лат. *signum* – знак) називають процес зміни у часі фізичного стану якогось об'єкта, призначеного для передавання, відображення, реєстрації повідомлень (інформації). Будь-який сигнал можна спостерігати емпірично (за допомогою осцилографа, приймача, засобів відображення інформації, вимірювального приладу тощо). Але емпіричне спостереження дозволяє аналізувати лише часткові, одиничні явища сигналів і унеможлиблює розкриття фундаментальних властивостей, наприклад, для передбачення їх поведінки в нових, змінених умовах. Тому застосовують описи сигналів через їх *математичні моделі*.

Математична модель сигналу – це функція часу.

Наприклад:

– неперервний сигнал (гармонічне коливання)

$$s(t) = U_m \cos \omega_0 t, \quad t \in (-\infty, \infty);$$

– неперервний сигнал (гаусовий імпульс)

$$s(t) = U_m e^{-a^2 t^2}, \quad t \in (-\infty, \infty);$$

– фінітний сигнал (той, що існує на обмеженому часовому інтервалі) – трикутний відеоімпульс

$$s(t) = \begin{cases} \frac{U_m}{T}(T-t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases}$$

– періодичний сигнал

$$s_r(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r(t-iT), \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де  $r(t)$  – фінітний на інтервалі  $T$  (період послідовності) сигнал і т. п.

Модель сигналу дозволяє абстрагуватися від конкретної природи його носія, одна і та сама модель може адекватно описувати струм, напругу, напруженість поля, потужність тощо. До того ж модель описує засадничі, основні властивості сигналів, оминаючи їх другорядні властивості.

Класичні способи описування сигналів – це часовий і спектральний. У першому способі сигнал подається як функція часу (математична модель). Другий спосіб полягає в описуванні сигналу через суму ортогональних складових, що утворюють ортонормовану систему гармонік, тобто у розкладенні сигналу в ряд Фур'є.

## **2 Спектральний спосіб описування періодичних сигналів.**

### ***Ряд Фур'є***

Будь-яка періодична функція  $u(x)$  з періодом  $2\pi$ , що задовольняє у межах періоду умови Диріхле, може бути подана рядом Фур'є, який ще називають тригонометричним, або гармонічним:

$$v(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.1)$$

де

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(x) \cos nxdx, n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(x) \sin nxdx, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}. \quad (1.2)$$

Нехай періодичний сигнал описується функцією часу  $s(t)$  з довільним періодом  $T = 2\pi / \Omega$ . Увівши нову змінну  $t = \frac{x}{\Omega}$ , перейдемо до функції  $s\left(\frac{x}{\Omega}\right) = \nu(x)$  з періодом  $\Omega T = 2\pi$ , яку можна розкласти в ряд Фур'є за формулами (1.1) і (1.2). Для функції  $s(t)$ :  $x = \Omega t$ ,  $dx = \Omega dt = \frac{2\pi}{T} dt$ ,  $\nu(x) = s(t)$ . Тоді функція  $s(t)$  набере вигляду

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (1.3)$$

де

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\Omega t dt, n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\Omega t dt, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

або в іншій формі

$$s(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t - \psi_n), \quad (1.5)$$

де

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \psi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}. \quad (1.6)$$

Відтак періодичний сигнал можна подати у вигляді накладення постійної складової і нескінченного числа синусоїдних (гармонічних) коливань із частотами  $\Omega_1 = \Omega$ ,  $\Omega_2 = 2\Omega$ ,  $\Omega_3 = 3\Omega, \dots$  амплітудами  $c_1, c_2, c_3, \dots$  і початковими фазами  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  (рис. 1.1).

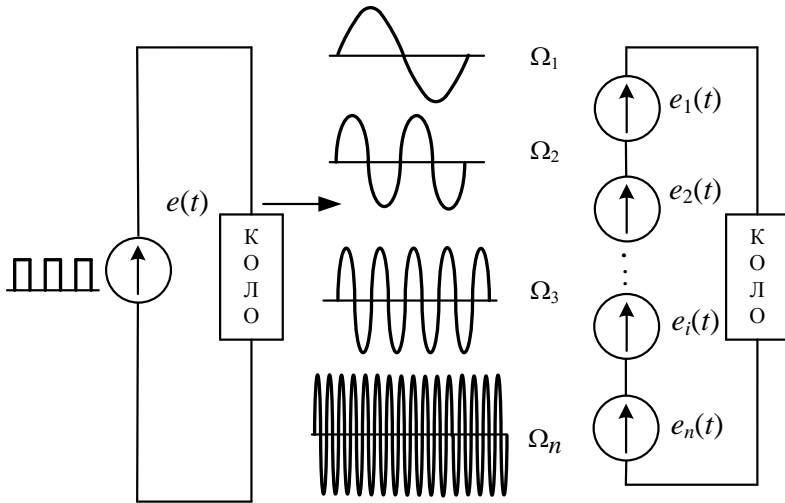


Рисунок 1.1

Гармонічні коливання з частотами  $\Omega, 2\Omega, 3\Omega$  називають першою (основною), другою, третьою і т. д. гармоніками відповідно. Постійна складова дорівнює середньому значенню коливання за період.



Повний спектральний опис сигналу охоплює:

– послідовність величин  $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots\}$  – спектр частот;

–  $\left\{ \frac{c_0}{2}, c_1, c_2, c_3, \dots \right\}$  – спектр амплітуд;

–  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$  – спектр фаз.

Більш практичне застосування одержали *амплітудно-частотний спектр* (АЧС) – сукупність спектральних ліній, перпендикулярних до осі частот, відкладених у точках  $\Omega_n = n\Omega$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), так що ординати їх дорівнюють значенням  $\frac{c_0}{2}, c_1, c_2, c_3, \dots$ , і *фазочастотний спектр* (ФЧС) з ординатами  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  (рис. 1.2).

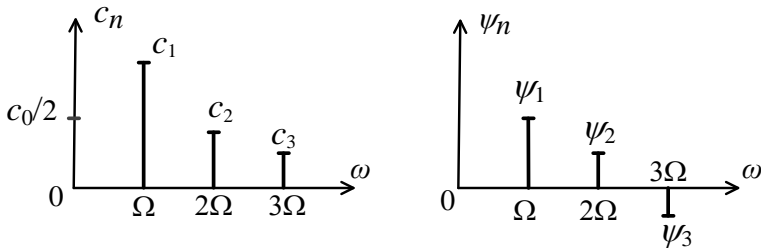


Рисунок 1.2

При комплексній формі запису ряду Фур'є

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n^* e^{jn\Omega t} \quad (1.7)$$

комплексні амплітуди гармонік визначаються

$$c_n^* = c_n e^{-j\psi_n} = \frac{2}{T} \sum_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\Omega t} dt. \quad (1.8)$$

У випадку комплексної форми ряду Фур'є шкала частот одержує додатково від'ємну піввісь і АЧС стає симетричним відносно осі ординат, а ФЧС – відносно початку відліку координат (рис. 1.3).

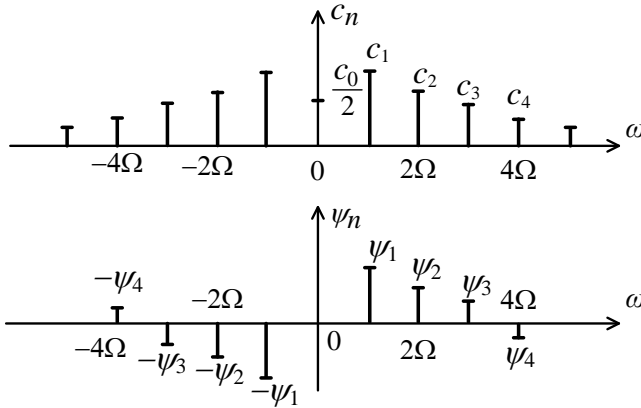


Рисунок 1.3

Часовий і спектральний способи описування сигналів рівнозначні і взаємозамінні; це різні форми подання реально існуючих процесів. Позаяк час і частота є дуальними величинами, то дуальними є і відповідні форми описів сигналів.

### 3 Спектри періодичної послідовності відеоімпульсів

Нехай маємо сигнал у вигляді періодичної послідовності відеоімпульсів прямокутної форми (рис. 1.4). На цьому рисунку  $U_m$  – амплітуда сигналу,  $T = 2\pi/\Omega$  – період слідування,  $\tau_u$  – тривалість імпульсу.

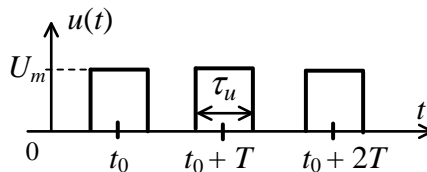


Рисунок 1.4

Функція  $u(t)$  у межах періоду може бути описана виразом

$$u(t) = \begin{cases} U_m, & \left(t_0 - \frac{\tau_u}{2}\right) < t < \left(t_0 + \frac{\tau_u}{2}\right), \\ 0, & \left(t_0 + \frac{\tau_u}{2}\right) < t < \left(t_0 - \frac{\tau_u}{2} + T\right). \end{cases} \quad (1.9)$$

Визначимо ряд Фур'є, що описує цей сигнал. Комплексні коефіцієнти, або амплітуди гармонік цього ряду розраховуються за формулою (1.8):

$$\begin{aligned} U_{m_n}^* &= c_n^* = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\Omega t} dt = \\ &= \frac{2U_m}{T} \int_{t_0 - \tau_u/2}^{t_0 + \tau_u/2} e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2U_m}{q} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} e^{-jn\Omega t_0}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

де  $q = \frac{T}{\tau_u}$  – шпаруватість імпульсів.

Із (1.10) випливає, що  $c_n^* = \frac{2U_m}{q} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q}$  – модуль

комплексного коефіцієнта,  $\psi_n = n\Omega t_0$  – його аргумент, і тоді відповідно до ряду Фур'є (1.7) одержуємо розкладення сигналу (1.9) в ряд Фур'є:

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{2U_m}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} e^{jn\Omega(t-t_0)}. \quad (1.11)$$

Дійсна форма цього ряду

$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \cos n\Omega(t-t_0) \quad (1.12)$$

відповідає виразу (1.5).

У (1.12) перший член  $\frac{U_m}{q} = \frac{c_0}{2} = U_0$  – постійна складова,  $U_{m_n} = |c_n| = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right|$  – амплітуда  $n$ -ї гармоніки сигналу  $u(t)$ .

Проаналізуємо одержані формули (1.11) і (1.12) ряду Фур'є для сигналу  $u(t)$ .

1 Постійна складова  $U_0$  і амплітуди  $U_{m_n}$  гармонік пропорційні амплітуді імпульсів  $U_m$  і зменшуються зі зростанням їх шпаруватості  $q$ , що спричинено зменшенням середньої за період енергії імпульсу.

2 Амплітуди  $U_{m_n}$  не залежать від затримки імпульсу у часі  $t_0$ , а залежать від шпаруватості. Натомість початкові фази  $\psi_n$  гармонік залежать лише від зсуву імпульсів  $t_0$ , а не від амплітуди і тривалості імпульсів. Відтак зсув сигналу у часі  $t_0$  визначає його ФЧС і не впливає на його АЧС.

3 Розподіл амплітуд гармонік підлягає закону аркового синуса  $S_a = \frac{\sin x}{x}$ . Така функція має аркову структуру і визначає знак «+» або «-» перед амплітудами, що відповідає зміні від арки до арки фази гармонік на  $\pm\pi$  (рис. 1.5).

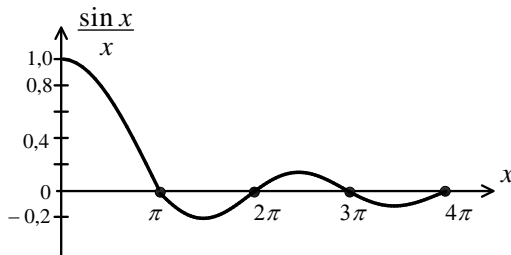


Рисунок 1.5

Через це вираз (1.12) можна записати по-іншому:

$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right| \cos[n\Omega t - \psi_n \mp (k-1)\pi], \quad (1.13)$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots$  – номер арки (інтервал значень змінної  $x = \frac{n\pi}{q}$ , за яких функція  $S_a(x)$  набуває певних за знаком («+» або «-») значень).

4 Спектральні лінії АЧС і ФЧС віддалені від сусідніх на величину частоти слідування імпульсів  $\Omega = 2\pi/T$ . Розподіл спектральних ліній за висотою визначається *обвідною спектра*, характер якої залежить від форми сигналу.

*Амплітудно-частотний спектр*

Обвідна АЧС періодичної послідовності відеоімпульсів

$$U_{m_n} = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right| = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin(n\Omega \frac{\tau_u}{2})}{n\Omega \frac{\tau_u}{2}} \right|$$

перетинає вісь частот, коли аргумент кратний  $\pi$ , тобто  $n$  кратний  $q$  (на частотах, кратних шпаруватості). Тому гармоніки з частотами  $qn\Omega = n \frac{2\pi}{\tau_u}$  у спектрі відсутні.

На рисунку 1.6 показаний нормований АЧС  $\frac{U_{m_n}}{U_0} = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$  сигналу  $u(t)$  (1.9) при  $q = 4$ . Під першими арками зосереджена основна частина енергії сигналу, і тому *ефективна ширина спектра дорівнює  $\Delta\omega = (1-2,5)q\Omega$* .

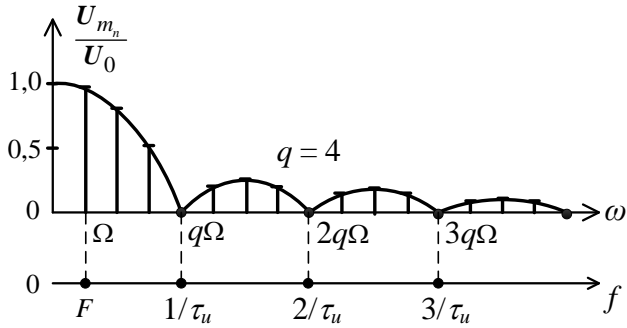


Рисунок 1.6

На рисунку 1.7 досліджується, як впливає на АЧС зміна  $\tau_u$  і частоти слідування  $\Omega = 2\pi F$ .

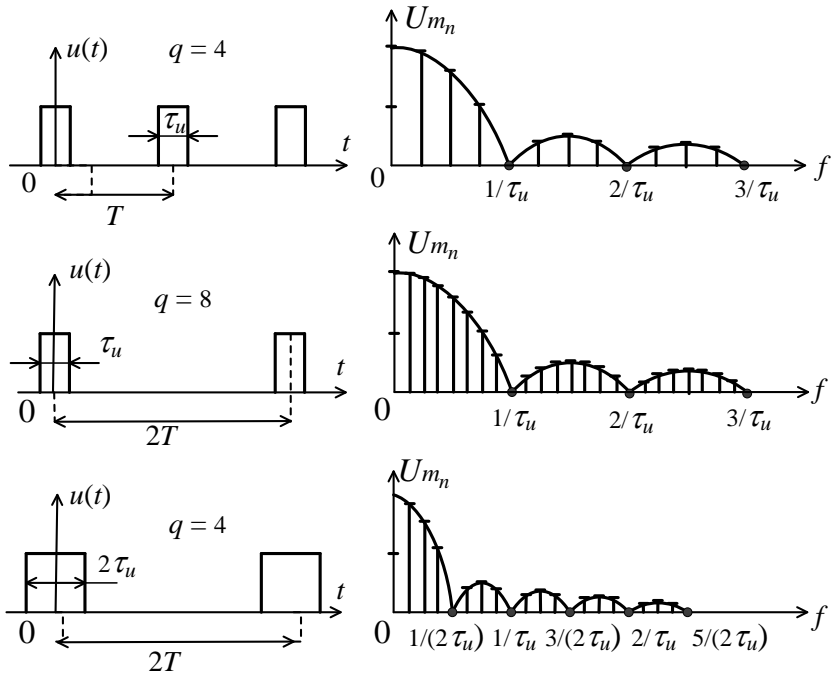


Рисунок 1.7

Зі зменшенням частоти слідування  $\Omega$  при  $\tau_u = const$  відбувається «згущення» спектра: відстані між лініями зменшуються. Ширина спектра не змінюється, а основна частина енергії розподіляється на більшому числі гармонік. При збільшенні  $\tau_u$  при  $\Omega = const$  ширина арок і ширина спектра зменшуються (відносно стиснення спектра).

Основна частина енергії розподіляється на меншому числі гармонік і зосереджується в області щоразу нижчих частот. Відтак, що коротші імпульси і більша їх шпаруватість, то ширший і густіший їх спектр, і навпаки.

#### *Фазочастотний спектр*

Із виразів (1.12) і (1.13) випливає, що початкові фази гармонік визначаються так:

$$\begin{aligned} \psi_{\Sigma_n} &= \psi_n \pm \begin{cases} 0, & S_a(x) > 0 \\ \pi, & S_a(x) < 0 \end{cases} = \\ &= \psi_n \pm (k-1)\pi = n\Omega t_0 \pm (k-1)\pi. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Графічною ілюстрацією формули (1.14) є фазочастотні спектри, зображені на рисунку 1.8.

Відтак обвідною ФЧС є пряма з кутом нахилу  $\alpha$ , що залежить від зсуву імпульсів  $t_0$ .

Урахування зміни фази гармонік на  $\pi$  від арки до арки здійснюється відповідним зміщенням цієї прямої паралельно на  $\pi$  вгору або вниз. Кожна арка, як відомо, має ширину  $q\Omega$ . Тому величина зсуву фази на арку становить кут

$$\psi_\alpha = q\Omega \operatorname{tg} \alpha = q\Omega t_0 = 2\pi \frac{t_0}{\tau_u}, \quad (1.15)$$

де  $\alpha = \arctg t_0$  – кут нахилу обвідної ФЧС.

Що більший зсув імпульсів у часі, то більший нахил обвідної її ФЧС. При  $t_0 = 0$  кут  $\alpha = 0$  (рис. 1.8).

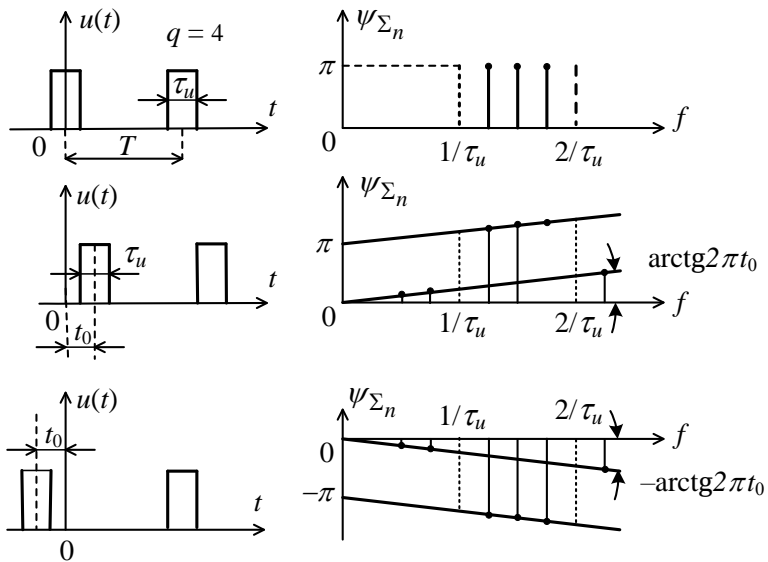


Рисунок 1.8

#### 4 Спектри періодичної послідовності радіоімпульсів

Нехай маємо сигнал  $u(t)$  (рис. 1.9) – періодичну послідовність прямокутних радіоімпульсів, де  $\Omega$  – частота слідування імпульсів;  $\omega_H$  – несуча частота.

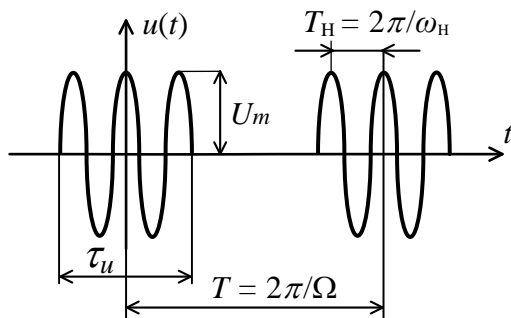


Рисунок 1.9



Його аналітичний вираз

$$u(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_H t, & -\frac{\tau_u}{2} < t < \frac{\tau_u}{2}, \\ 0, & \frac{\tau_u}{2} < t < \left(T - \frac{\tau_u}{2}\right). \end{cases} \quad (1.16)$$

Застосувавши до сигналу  $u(t)$  процедуру визначення ряду Фур'є з попереднього питання, одержимо відповідно до форми цього ряду (1.5):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_H - n\Omega) \frac{\tau_u}{2}}{(\omega_H - n\Omega) \frac{\tau_u}{2}} \cos n\Omega t = \\ &= \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\omega_H - n\Omega) \frac{\tau_u}{2}}{(\omega_H - n\Omega) \frac{\tau_u}{2}} \right| \cos[n\Omega t \pm \pi(k-1)]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Із (1.17) випливає, що обвідна АЧС послідовності прямокутних радіоімпульсів визначається, як і для послідовності відеоімпульсів, функцією  $S_a = \frac{\sin x}{x}$ . Різниця лише в тому, що ця функція зміщена по осі частот на величину  $\omega_H$  і її максимум при  $\omega = \omega_H$  удвічі менший, ніж у випадку відеоімпульсів (рис. 1.10).

Відтак спектр послідовності прямокутних радіоімпульсів збігається зі спектром послідовності прямокутних відеоімпульсів, зміщеним управо по осі частот на величину  $\omega_H$ . Ефективна ширина спектра радіоімпульсів удвічі більша, ніж в однакових за тривалістю відеоімпульсів.

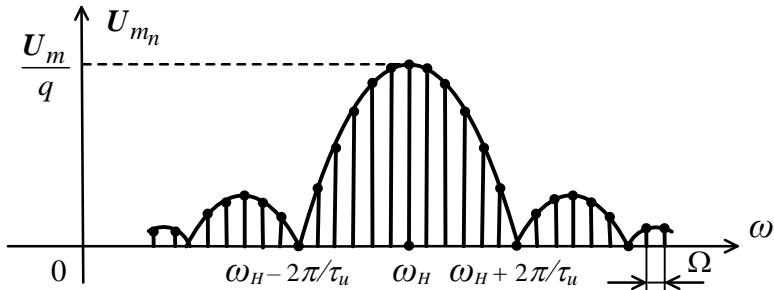


Рисунок 1.10

### 5 Зв'язок між формою сигналу та його спектром

Форма сигналу вповні визначається лише сукупністю АЧС і ФЧС. Проте, маючи лише АЧС, можна судити про форму сигналу, і навпаки.

Нехай  $u(t)$  – функція часу, сигнал, і  $k$ -та похідна  $u(t)$  містить дельта-функції (рис. 1.11 – третя похідна). Тоді для коефіцієнтів ряду Фур'є розкладення функції  $u(t)$  справедливі нерівності

$$a_n \leq \frac{M}{n^k}, \quad b_n \leq \frac{M}{n^k}, \quad (1.18)$$

де  $M$  – стала, що залежить від форми сигналу.

Із рисунка 1.11 бачимо, що ряд Фур'є трикутних імпульсів збігається швидше (амплітуди гармонік спадають швидше при зростанні їх номера), ніж у випадку прямокутних імпульсів.

Відтак швидкість зменшення амплітуд гармонік у спектрі залежить від структури сигналу: коефіцієнти спадають тим швидше, чим «гладшою» є форма сигналу.

Якщо сигнал має стрибкоподібні переходи (його функція має скінченні розриви) і в його першій похідній з'являються дельта-імпульси, то амплітуда гармонік спадає повільно, за законом  $\frac{1}{n}$ .

Якщо сигнал неперервний, але в його першій похідній є скінченні розриви, а в другій – дельта-імпульси, то амплітуда гармонік спадає швидше, пропорційно  $\frac{1}{n^2}$  і т. д.

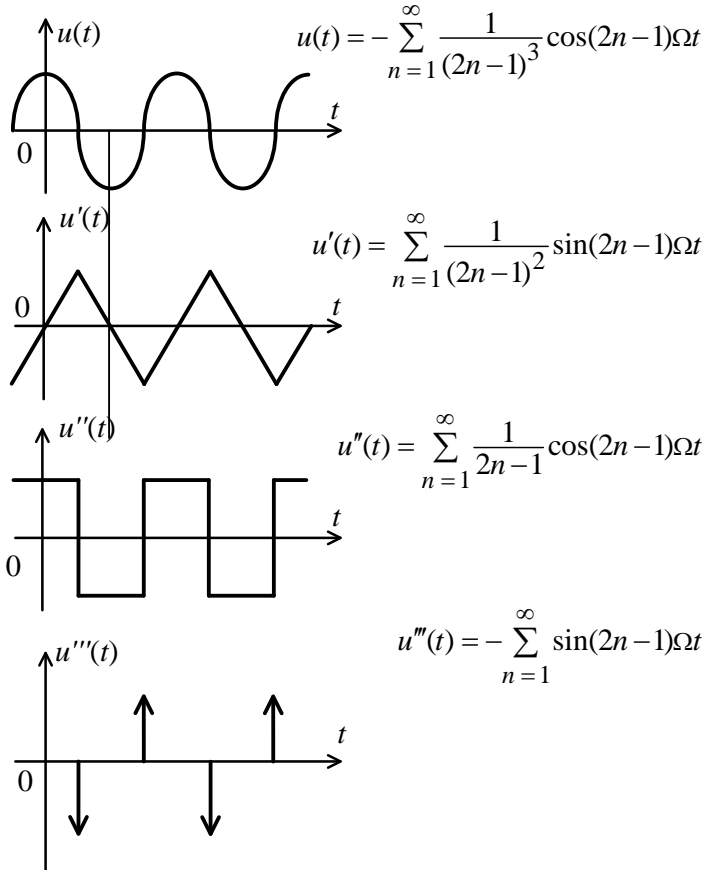


Рисунок 1.11

Отже, що швидше спадають коефіцієнти Фур'є, то «гладша» форма сигналу та менша ширина його спектра. «Найгладшим» є моногармонічне колювання.

Для імпульсних сигналів справедлива рівність

$$\Delta\omega\tau_u = const, \quad (1.19)$$

де  $\Delta\omega$  – ширина спектра сигналу;

$\tau_u$  – тривалість сигналу.

Тривалість сигналу і його протяжність у частоті зв'язані *співвідношенням неозначеності*: що ширший спектр, то менша тривалість, і навпаки.

«Найгладші» сигнали з найбільш плавною зміною у часі мають

$$\Delta\omega\tau_u = \min.$$

Такими сигналами є дзвоноподібні (гаусові) імпульси (перше питання цієї лекції). Саме в них необхідність зменшення тривалості не призводить до великого розширення спектра.

## Лекція 2

### Спектри неперіодичних сигналів

1 Спектральне подання неперіодичних сигналів.

2 Спектр прямокутного відеоімпульсу.

3 Спектри деяких неперіодичних сигналів.

4 Спектри серії імпульсів.

#### 1 Спектральне подання неперіодичних сигналів

Дуже важливими на практиці є неперіодичні сигнали – наприклад, поодинокі імпульси, серії імпульсів. Вони не можуть бути подані у вигляді ряду Фур'є. Щоб застосувати до них спектральний метод опису, необхідно вважати ці сигнали періодичними функціями з періодом  $T \rightarrow \infty$ . Тоді подання неперіодичних сигналів за Фур'є може розглядатися як границя ряду Фур'є при  $T \rightarrow \infty$ .

Скористаємося найзручнішою комплексною формою запису ряду Фур'є:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n^* e^{jn\Omega t}, \quad (2.1)$$

де коефіцієнти (комплексні амплітуди) розраховуються як

$$c_n^* = c_n e^{-j\psi_n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\Omega t} dt. \quad (2.2)$$

Підставимо (2.2) в (2.1), позначивши інтервал між частотами сусідніх гармонік  $\Omega = 2\pi/T = \Delta\omega$ , одержимо

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{jn\Omega t} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\Omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{jn\Omega t} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\Omega t} dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При збільшенні періоду  $T$  амплітуда гармонік  $c_n$  зменшується, інтервал  $\Delta\omega$  зменшується і лінійчастий спектр дедалі «згущується». У граничному переході при  $T \rightarrow \infty$   $\Delta\omega = \Omega \rightarrow d\omega \rightarrow 0$ ,  $n\Omega \rightarrow \omega$ , і спектр із дискретного стає суцільним. При цьому сума в правій частині (2.3) переходить в інтеграл

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.4)$$

Останній вираз являє собою суму нескінченно великого числа гармонічних функцій із нескінченно малими амплітудами і частотами  $\omega$ , які проходять увесь спектр від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Відтак неперіодичні сигнали характеризуються неперервним, суцільним спектром частот, тоді як періодичні – дискретним, або лінійчастим спектром.

Формулу (2.4) можна подати у такому вигляді:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.5)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.6)$$

Формула (2.5) – пряме перетворення Фур'є, а (2.6) – обернене перетворення Фур'є, і вони часто позначаються як

$$S(j\omega) = F[s(t)], \quad (2.7)$$

$$s(t) = F^{-1}[S(j\omega)]. \quad (2.8)$$

Пряме перетворення Фур'є дозволяє перейти з часової області подання функції на комплексну частотну площину, а обернене перетворення, навпаки, – з комплексної частотної площини на часову.

*Основні властивості перетворення Фур'є*

1 Лінійність  $F[as_1(t) + bs_2(t)] = aS_1(j\omega) + bS_2(j\omega)$ .

2 Теорема інтегрування  $F\left[\int_{-\infty}^t s(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega} S(j\omega)$ .

3 Теорема диференціювання  $F\left[\frac{d}{dt} s(t)\right] = j\omega S(j\omega)$ .

4 Теорема подібності (масштабу)  $F[s(at)] = \frac{1}{a} S(j\frac{\omega}{a})$ .

Щоб стиснути сигнал у часі, зберігаючи форму, необхідно розширити його спектр при пропорційному зменшенні амплітуд гармонік.

5 Теорема про зсув (запізнення)

$$F[s(t \pm t_0)] = S(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}.$$

6 Теорема про згортку

$$F[s_1(t) \cdot s_2(t)] = S_1(j\omega) * S_2(j\omega),$$

$$F[s_1(t) * s_2(t)] = S_1(j\omega) \cdot S_2(j\omega),$$

де  $S_1(j\omega) * S_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi) S_2(\omega - \xi) d\xi$  – згортка

спектрів;

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \xi) s_2(\xi) d\xi$$
 – згортка сигналів.

7 Теорема Релея

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S(\omega)]^2 d\omega,$$

де  $S(j\omega) = S(\omega) e^{-j\psi(\omega)} = P(\omega) - jQ(\omega)$  – спектральна щільність сигналу.

Проводячи аналогію між рядом Фур'є (2.2) та інтегралом Фур'є (2.5), можна прийти до відношення

$$S(j\omega) \leftrightarrow T \frac{c_n^*}{2} = \frac{1}{F} \frac{c_n^*}{2} = \frac{\pi}{\Omega} c_n^*, \quad (2.9)$$

$$\text{де } \Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}.$$

Через те спектральна щільність  $S(j\omega)$  має фізичний зміст щільності амплітуд і розмірність амплітуди, поділеної на герц. Вона характеризує гармоніку частоти  $\omega$  за амплітудою і фазою.

Із (2.9) випливає, що обвідна суцільного спектра  $S(\omega)$  неперіодичної функції та обвідна лінійчастого спектра періодичної функції  $c_n(\omega)$  збігаються за формою і відрізняються лише масштабом  $S(\omega) = \frac{\pi}{\Omega} c_n$ .

Пряме та обернене перетворення Фур'є мають симетричну природу, і це зумовлено дуальністю частоти і часу:

$$2\pi js^*(j\omega) = \int_{-j\infty}^{j\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.10)$$

$$s(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} 2\pi js^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.11)$$

Інакше кажучи, якщо спектром функції  $s(t)$  є функція  $S(\omega)$ , то спектром функції  $S(t)$  –  $2\pi s(\omega)$ .

## 2 Спектр прямокутного відеоімпульсу

Нехай маємо сигнал  $u(t)$  – поодинокий прямокутний відеоімпульс (рис. 2.1):

$$u(t) = \begin{cases} U_m, & (t_0 - \tau_u/2) < t < (t_0 + \tau_u/2), \\ 0, & (t_0 + \tau_u/2) < t < (t_0 - \tau_u/2). \end{cases} \quad (2.12)$$



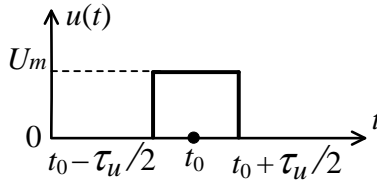


Рисунок 2.1

Спектральна щільність сигналу (2.12):

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{t_0 - \frac{\tau_u}{2}}^{t_0 + \frac{\tau_u}{2}} = \\
 &= U_m \tau_u \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau_u}{2}}{\frac{\omega \tau_u}{2}} \right| e^{-j[\omega t_0 \pm \pi(k-1)]},
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots$  – номер арки.

АЧС сигналу

$$S(\omega) = U_m \tau_u \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau_u}{2}}{\frac{\omega \tau_u}{2}} \right|. \tag{2.14}$$

ФЧС сигналу

$$\psi(\omega) = \omega t_0 \pm \begin{cases} 0, & S_a(x) > 0 \\ \pi, & S_a(x) < 0 \end{cases} = \omega t_0 \pm \pi(k-1). \tag{2.15}$$

АЧС сигналу  $u(t)$  (рис. 2.2 а) істотно залежить від тривалості імпульсу  $\tau_u$ , але не зв'язаний з  $t_0$ . ФЧС (рис. 2.2 б), навпаки, визначається часом запізнення  $t_0$ .

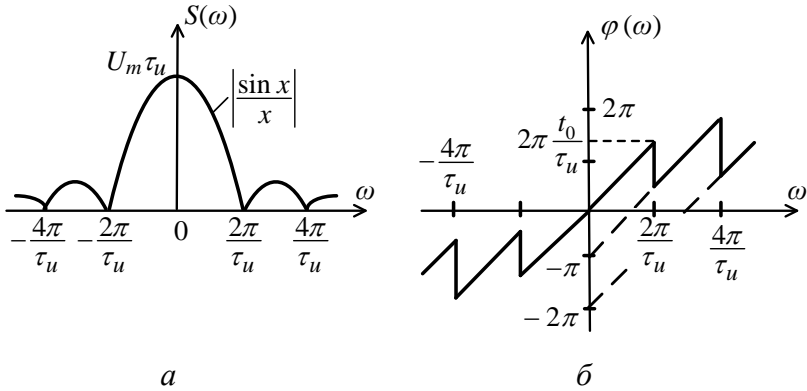


Рисунок 2.2

### 3 Спектри деяких неперіодичних сигналів

Радіоімпульс. Нехай маємо поодинокий прямокутний радіоімпульс (рис. 2.3):

$$u(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_H t, & \left(t_0 - \frac{\tau_u}{2}\right) < t < \left(t_0 + \frac{\tau_u}{2}\right), \\ 0, & \left(t_0 + \frac{\tau_u}{2}\right) < t < \left(t_0 - \frac{\tau_u}{2}\right). \end{cases} \quad (2.16)$$

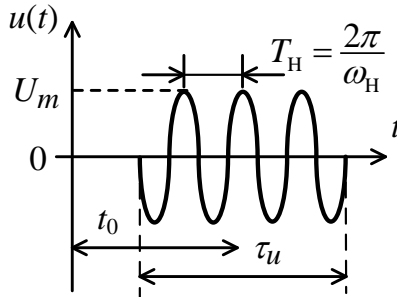


Рисунок 2.3

Спектральна щільність сигналу за (2.16) така:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m \tau_u}{2} \left( \frac{\sin(\omega - \omega_H) \frac{\tau_u}{2}}{(\omega - \omega_H) \frac{\tau_u}{2}} e^{-j(\omega - \omega_H)t_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_H) \frac{\tau_u}{2}}{(\omega + \omega_H) \frac{\tau_u}{2}} e^{-j(\omega + \omega_H)t_0} \right). \quad (2.17)$$

Розпишемо функцію (2.17) окремо для АЧС та ФЧС, а також для додатних і для від'ємних частот:

– для  $\omega > 0$

$$S(\omega) \approx \frac{U_m \tau_u}{2} \left| \frac{\sin(\omega - \omega_H) \frac{\tau_u}{2}}{(\omega - \omega_H) \frac{\tau_u}{2}} \right|, \quad (2.18)$$

$$\psi(\omega) \approx (\omega - \omega_H)t_0 \pm \pi(k-1);$$

– для  $\omega < 0$

$$S(\omega) \approx \frac{U_m \tau_u}{2} \left| \frac{\sin(\omega + \omega_H) \frac{\tau_u}{2}}{(\omega + \omega_H) \frac{\tau_u}{2}} \right|, \quad (2.19)$$

$$\psi(\omega) \approx (\omega + \omega_H)t_0 \pm \pi(k-1).$$

АЧС і ФЧС, побудовані за виразами (2.18) і (2.19), наведені на рисунку 2.4. Спектри прямокутного радіоімпульсу практично відрізняються від спектрів прямокутного відеоімпульсу лише зміщенням по осі частот на величину  $\omega_H$  і зменшенням удвічі модуля спектральної щільності.

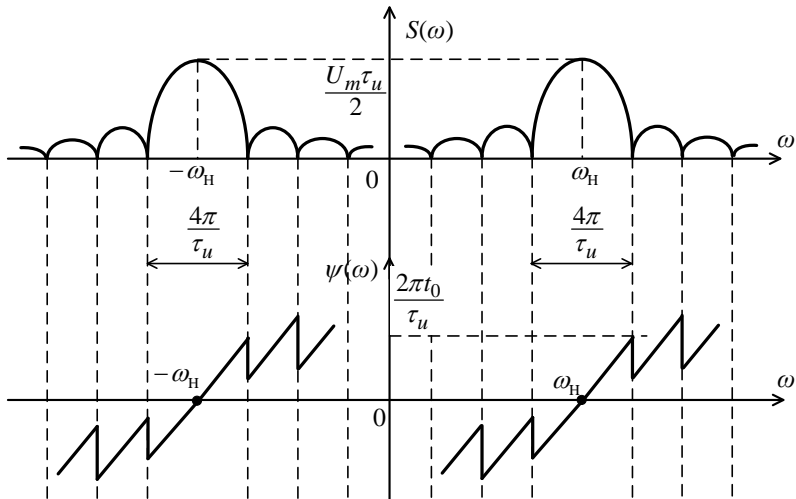


Рисунок 2.4

Гаусовий імпульс. Цей сигнал (рис. 2.5) називають ще дзвоноподібним

$$u(t) = U_m e^{-(at)^2}, \quad (2.20)$$

де  $a$  – стала, що визначає тривалість імпульсу.

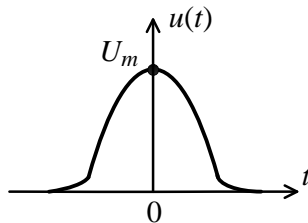


Рисунок 2.5

Спектральна щільність

$$S(j\omega) = U_m \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^2} = S(\omega). \quad (2.21)$$

Внаслідок парності функції (2.20) спектр її є дійсним і також має дзвоноподібну, гаусову форму (рис. 2.6).

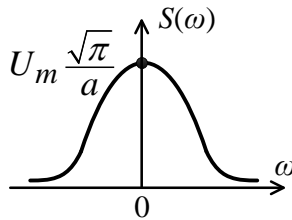


Рисунок 2.6

Для гаусового імпульсу, як уже згадувалося,  $\Delta\omega\tau_u = \min$ , а саме  $\Delta f\tau_u = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\tau_u = 0,22$ . Найменша ширина спектра зумовлює найбільшу завадостійкість сигналу.

*Експоненційний імпульс.* Часова діаграма сигналу (рис. 2.7) побудована за його аналітичним виразом:

$$u(t) = \begin{cases} U_m e^{-at}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

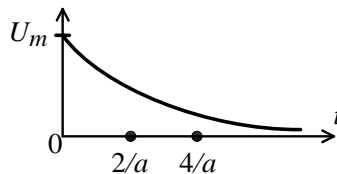


Рисунок 2.7

Спектральна щільність

$$S(j\omega) = \frac{U_m}{a + j\omega}. \quad (2.23)$$

Амплітудно-частотний спектр (рис. 2.8 а):

$$S(\omega) = \frac{U_m}{\sqrt{(a^2 + \omega^2)}}.$$

Фазочастотний спектр (рис. 2.8 б):

$$\psi(\omega) = \text{arctg} \frac{\omega}{a}.$$

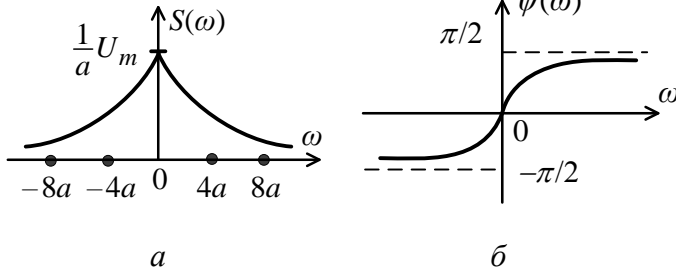


Рисунок 2.8

*Трикутний відеоімпульс.* Трикутний відеоімпульс поданий на рисунку 2.9, його спектральна щільність – на рисунку 2.10.

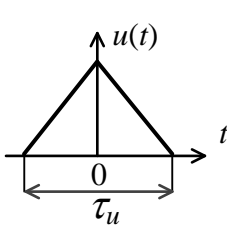


Рисунок 2.9

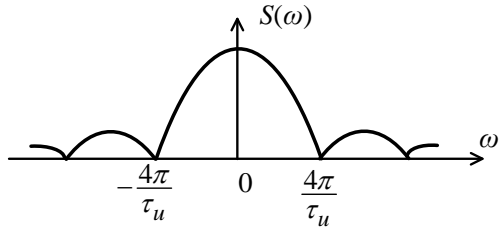


Рисунок 2.10

*Експоненційний радіоімпульс.* Експоненційний радіоімпульс поданий на рисунку 2.11, а його спектральна щільність – на рисунку 2.12.

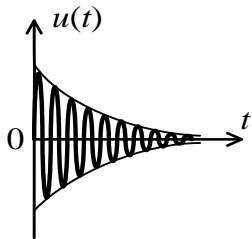


Рисунок 2.11

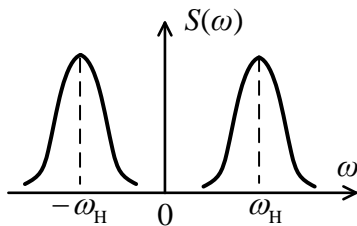


Рисунок 2.12

### Дельта-функція

Спектральна щільність дельта-функції (рис. 2.13):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1. \quad (2.24)$$

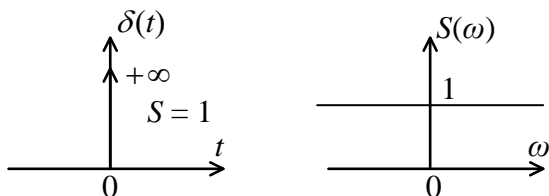


Рисунок 2.13

Із частотно-часової дуальності перетворення Фур'є випливає: якщо спектром дельта-функції є  $S(j\omega) = S(\omega) = 1$ , то спектром функції  $s(t) = 1$  буде функція  $2\pi\delta(\omega)$  (рис. 2.14) із нескінченно малою шириною спектра. З цього випливає, що і спектральні функції гармонічного сигналу  $\cos \omega_0 t$  являють собою  $\delta$ -функції (рис. 2.15).

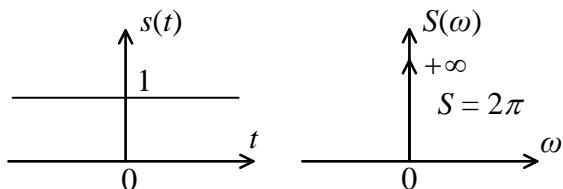


Рисунок 2.14

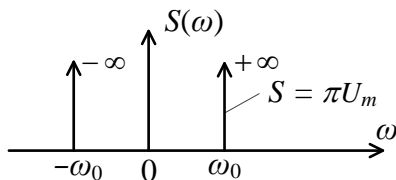


Рисунок 2.15

*Функція Хевісайда*

Спектральна щільність функції вмикання  $\sigma(t)$

$$S_{\sigma}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \quad (2.25)$$

Графічний образ цієї функції показаний на рисунку 2.16.

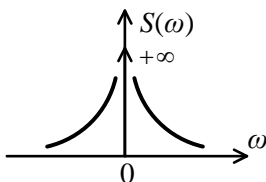


Рисунок 2.16

У формулі (2.25) перший член правої частини  $1/j\omega$  – це спектральна щільність миттєвого перепаду функції  $\sigma(t)$  в момент  $t = 0$  (бічні смуги спектра  $S_{\sigma}(j\omega)$ ). Другий член  $\pi\delta(\omega)$  – спектральна щільність постійної складової функції вмикання.

#### **4 Спектри серії імпульсів**

Нехай маємо сигнал у вигляді серії з імпульсів (рис. 2.17). Згідно з теоремою лінійності і теоремою про зсув для перетворення Фур'є спектральна щільність сигналу

$$S_c(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega) \dots S_n(j\omega) =$$



$$\begin{aligned}
 &= S_1(j\omega) [1 + e^{-j\omega T} + \dots + e^{-j(n-1)\omega T}] = \\
 &= S_1(j\omega) \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} e^{-j(n-1)\omega \frac{T}{2}}. \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

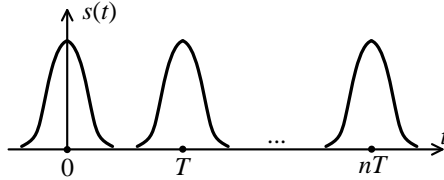


Рисунок 2.17

Модуль спектральної щільності серії імпульсів

$$S_c = S_1(j\omega) \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|, \quad (2.27)$$

де  $S_1(j\omega)$  – спектральна щільність одного (першого) імпульсу в серії.

Пронормуємо вираз (2.27) через його значення при  $\omega = 0$   $S_c(0)$ :

$$S_{cH}(\omega) = \frac{S_c(\omega)}{S_c(0)} = \frac{S_1(\omega)}{S_1(0)} \cdot \frac{1}{n} \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right| = S_H(\omega) \cdot B(\omega), \quad (2.28)$$

де  $S_H(\omega) = S_1(\omega)/S_1(0)$  – модуль нормованої АЧС імпульсу в серії;

$$B(\omega) = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin(n\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right| \text{ – функція частоти, що не}$$

залежить від форми імпульсів і визначається їх числом  $n$  у серії з періодом їх слідування  $T$ .

Побудуємо функцію  $B(\omega)$  графічно для випадків  $n = 4$  і  $n = 5$  (рис. 2.18).

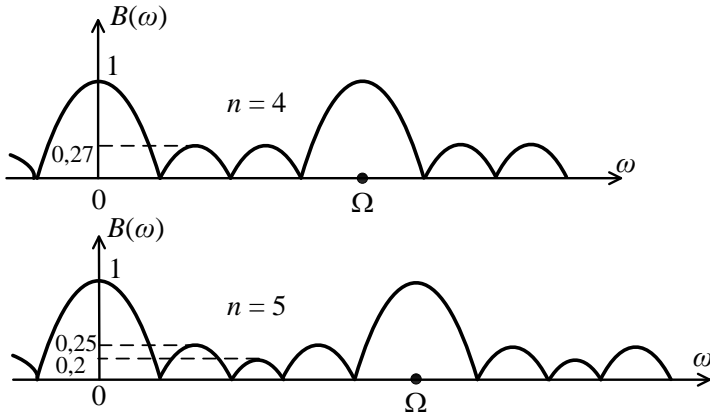


Рисунок 2.18

Як свідчать ці графіки, в інтервалі частот від 0 до  $\omega = 2\pi/T = \Omega$  чисельник дробу, а відтак, і функція  $B(\omega)$  набуває нульового значення  $n - 1$  разів. Періодичність чисельника функції  $B(\omega)$  в  $n$  разів вища, ніж знаменника. Графіки функції  $B(\omega)$  мають пелюсткову структуру (рис. 2.18) і містять великі і малі пелюстки. Висота великих пелюсток  $B_{\max} = 1$ . Висота малих пелюсток визначається локальними максимумами  $B_{\text{лм}}$  функції  $B(\omega)$ . Значення  $B_{\text{лм}}$  розраховуються у ході розрахунку функції  $B(\omega)$ , вони також табульовані [1].

Так, при  $n = 3$   $B_{\text{лм}} = 0,33$ , при  $n = 4$   $B_{\text{лм}} = \{0,27; 0,27\}$ , при  $n = 5$   $B_{\text{лм}} = \{0,25; 0,2; 0,25\}$ , при  $n = 6$   $B_{\text{лм}} = \{0,235; 0,173; 0,173; 0,235\}$ , при  $n = 7$   $B_{\text{лм}} = \{0,23; 0,16; 0,143; 0,16; 0,23\}$ . Великі пелюстки удвічі ширші від малих.

Вираз (2.28) справедливий для серії імпульсів довільної форми. За його допомогою, знаючи АЧС імпульсу

в серії і вид функції  $B(\omega)$ , можна побудувати спектр усієї серії імпульсів простим перемножуванням ординат графіків функцій  $S_H(\omega)$  і  $B(\omega)$ .

Спектри серії імпульсів для різних  $n$  показані на рисунку 2.19.

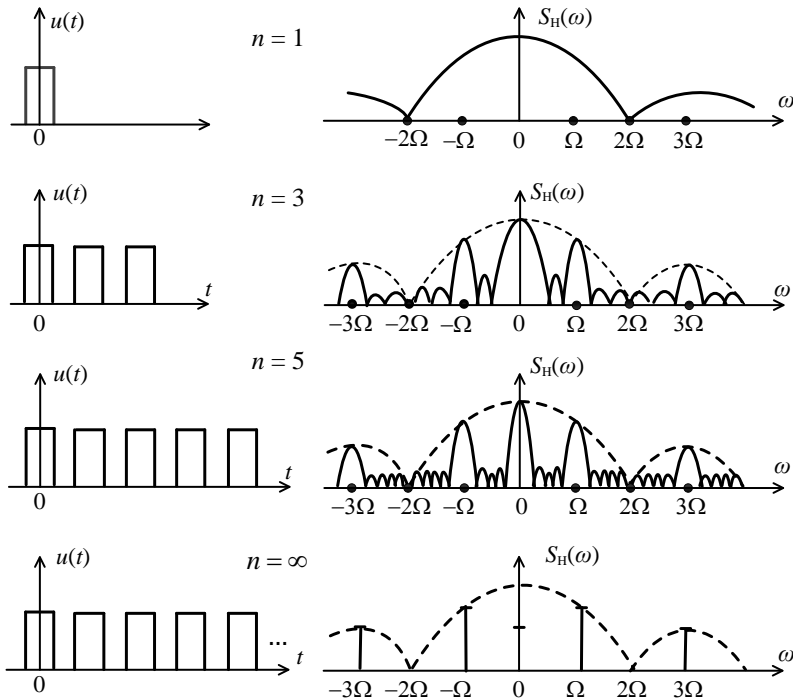


Рисунок 2.19

Зі збільшенням  $n$  (числа імпульсів у серії) великі пелюстки звужуються, висота малих пелюсток зменшується, а їх число зростає; спектр поступово вироджується із суцільного в лінійчастий і при  $n \rightarrow \infty$  перетворюється на дискретний.

### Лекція 3

## Енергетичний спектр. Модуляція

1 Енергетичний спектр сигналів.

2 Поняття модуляції сигналів.

3 Амплітудна модуляція.

### 1 Енергетичний спектр сигналів

Із теорії сигналів відомий вираз для *скалярного добутку сигналів* [4]:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt. \quad (3.1)$$

Відомо також, що скалярний добуток сигналів пропорційний їх *взаємній енергії* [4]:

$$E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt. \quad (3.2)$$

Якщо сигнали тотожні  $u(t) \equiv v(t)$ , то скалярний добуток їх переходить в енергію сигналу:

$$E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt. \quad (3.3)$$

Нехай сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$  задані своїми спектральними щільностями:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \\ v(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Підставивши рівність (3.4) в (3.1), одержимо

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \int_{-\infty}^{\infty} S_v(j\omega)e^{j\omega t} d\omega dt.$$

Змінивши порядок інтегрування, маємо

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_v(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt.$$

Внутрішній інтеграл в останній рівності  $S_u(-j\omega) = S_u^*(j\omega)$  – комплексно-спряжений спектр сигналу  $u(t)$ .

Відтак остаточно маємо

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(j\omega) S_u^*(j\omega) d\omega. \quad (3.5)$$

Вираз (3.5) – це узагальнена формула Релея: скалярний добуток двох сигналів дорівнює скалярному добутку їх спектральних щільностей.

Із (3.5) випливає, що

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega) S_v^*(j\omega) d\omega. \quad (3.6)$$

Введемо дійсну функцію

$$W_{uv}(\omega) = \text{Re}[S_u(j\omega) S_v^*(j\omega)], \quad (3.7)$$

і тоді формула (3.6) набере вигляду

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega) d\omega, \quad (3.8)$$

де функція  $W_{uv}(\omega)$  – взаємний енергетичний спектр сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$ .

Рівність (3.8) виявляє «тонку структуру» зв'язку двох сигналів: максимальна взаємна енергія сигналів зосереджується на тих частотах, де спектри сигналів перекриваються. Це використовується у так званій ортогоналізації за допомогою ортогоналізаційного фільтра (рис. 3.1, 3.2).

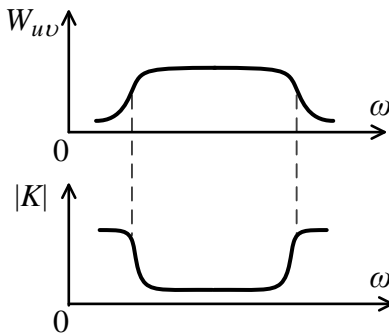


Рисунок 3.1

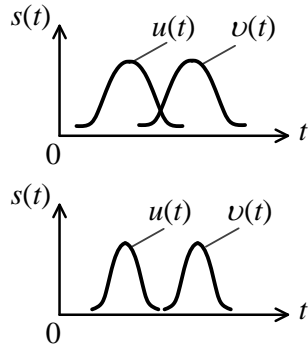


Рисунок 3.2

Ортогоналізаційний фільтр – це режекторний (загороджувальний) фільтр, що подавляє гармоніки тих частот, на яких взаємний енергетичний спектр сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$  є максимальним. У часовій області це приводить до того, що сигнали не будуть перекриватися, тобто їх скалярний добуток на вході фільтра був ненульовим, а на виході дорівнює нулю (рис. 3.2). Роблять висновок, що сигнали ортогоналізуються.

У разі коли  $u(t) \equiv v(t)$ , вираз (3.7) набере вигляду

$$W_u(\omega) = S_u(\omega)S_u^*(\omega) = |S_u(\omega)|^2. \quad (3.9)$$

Останній вираз – це спектральна щільність енергії сигналу, або його *енергетичний спектр*.

Із рівності (3.5) при  $u(t) \equiv v(t)$  випливає

$$E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega)d\omega. \quad (3.10)$$

Вираз (3.10) – це проста формула Релея: енергія будь-якого сигналу може бути подана як результат додавання внесків від різних інтервалів частотної осі.

Енергетичний підхід до аналізу спектрів сигналів має такі наслідки.

1 Він дозволяє знайти *ефективну ширину спектра* – діапазон частот, у межах якого розподілена основна частина енергії сигналу (зазвичай близько 90 %) [6]. Наприклад, у разі поодинокого прямокутного відеоімпульсу близько 90 % повної енергії сигналу зосереджено у першій пелюстці спектра (у смузі частот від 0 до  $\omega = 2\pi/\tau_u$ ).

2 Він зумовлює втрату інформації, що міститься в ФЧС, оскільки енергетичний спектр як дійсна функція частоти (3.9) не залежить від фази. За такого підходу всі сигнали, однакові за формою, але відмінні за своїм положенням на часовій осі, є ідентичними.

## 2 Поняття модуляції сигналів

Передавання інформації в телекомунікаційних системах часто здійснюється через несучі високочастотні коливання. Втім, сама інформація в них відсутня. Вона вкладається в ці коливання через *модуляцію*.

Модуляція – це зміна параметрів несучого коливання за законом передаваного повідомлення.

Модуляція не впливає на здатність ВЧ-коливань поширюватися в середовищі (каналі зв'язку).

Взагалі модульований сигнал можна подати у вигляді

$$a(t) = A_m(t) \cos[\omega_H t + \psi(t)] = A_m(t) \cos \theta(t), \quad (3.11)$$

де амплітуда  $A_m(t)$  або фаза  $\psi(t)$  змінюються за законом передаваного повідомлення.

Якщо  $A_m = \text{const}$  і  $\psi = \text{const}$ , то коливання (3.11) є немодульованим, тобто не несе жодної інформації.

Якщо в сигналі (3.11) змінюється амплітуда  $A_m(t)$ , то модуляція називається *амплітудною*. Якщо в сигналі (3.11) змінюється кут  $\theta(t)$ , то модуляція називається *кутовою*.

Кутова модуляція поділяється на частотну модуляцію (ЧМ) і фазову модуляцію (ФМ). Функції  $A_m(t)$ ,  $\psi(t)$  і  $\theta(t)$  є повільно змінними функціями часу. Відтак параметри модульованого сигналу змінюються повільно: впродовж періоду несучої частоти модульоване коливання можна вважати синусоїдними. В цілому ж модульовані коливання є квазігармонічними, тобто неперіодичними, і на них не поширюється апарат Фур'є.

### 3 Амплітудна модуляція

При амплітудній модуляції (АМ) амплітуда несучого коливання є функцією часу типу

$$A_m(t) = A_{m_0} [1 + F(t)], \quad (3.12)$$

де  $A_{m_0}$  – середнє значення амплітуди;

$F(t)$  – модуляційна функція, що змінюється за законом модуляційного сигналу.

Найпростіша АМ реалізується за схемою, наведеною на рисунку 3.3.

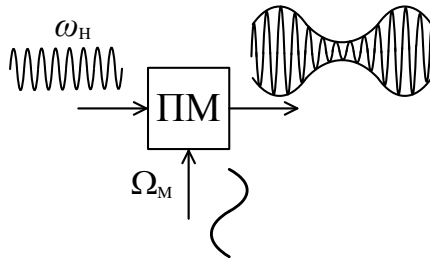


Рисунок 3.3

На цій схемі ПМ – підсилювач із регульованим коефіцієнтом підсилення (який установлюється у колі зміщення підсилювального приладу або у колі навантаження). На вхід ПМ надходять коливання несучої частоти  $\omega_H$  постійної амплітуди. На виході ці коливання будуть мати змінну амплітуду, що змінюється у часі з частотою  $\Omega_M$  за законом



модуляційного сигналу. Останній, надходячи на інший, керувальний вхід ПМ, певним чином (залежно від конкретної схеми модулятора) змінює коефіцієнт підсилення ПМ, через що і здійснюється модуляція сигналу на виході.

Різновидом АМ є радіоімпульси прямокутної форми. Для цього сигналу модуляційною функцією є прямокутні відеоімпульси.

Аналогічно АМ-сигнал визначається виразом

$$a(t) = A_{m_0} [1 + F(t)] \cos(\omega_H t + \psi_H). \quad (3.13)$$

Модуляційна функція при гармонічній (однотональній) модуляції

$$F(t) = m \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (3.14)$$

При цьому АМ-сигнал набирає вигляду

$$a(t) = A_{m_0} [1 + m \cos(\Omega t + \varphi_0)] \cos(\omega_H t + \psi_H), \quad (3.15)$$

де  $m$  – коефіцієнт модуляції;

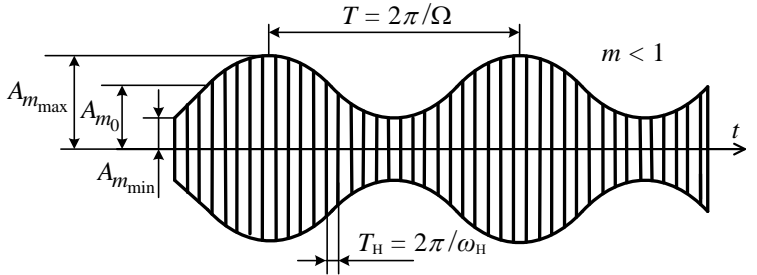
$\Omega$  – частота модуляції.

Коефіцієнт (глибина) модуляції  $m$  пропорційний інтенсивності передаваного сигналу.

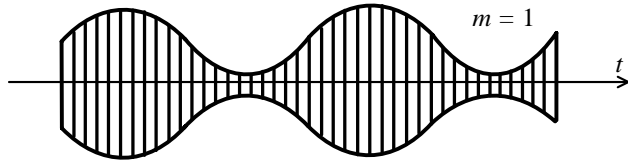
При  $0 \leq m \leq 1$  амплітуда АМ-коливання не набуває від'ємних значень, і модуляція є *неспотвореною* (рис. 3.4 а). При  $m \approx 1$  маємо *глибоку* модуляцію (рис. 3.4 б), коли  $A_m(t) \approx 0$ . І нарешті, при  $m > 1$  значення  $A_m(t)$  на деяких інтервалах стають від'ємними (рис. 3.4 в), і це називається *перемодуляцією*, в цьому режимі відбувається *спотворення обвідної* коливання. Тому для запобігання перемодуляції потрібно, щоб коефіцієнт модуляції  $m$  не перевищував 1, тобто  $m \leq 1$ .

При неспотвореній модуляції (рис. 3.4 а):

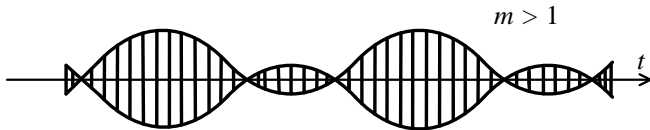
$$A_{m_{\min}} = A_{m_0} (1 - m), \quad A_{m_{\max}} = A_{m_0} (1 + m).$$



a



б



в

Рисунок 3.4

Тоді

$$m = \frac{A_{m_0} - A_{m_{\min}}}{A_{m_0}} = \frac{A_{m_{\max}} - A_{m_0}}{A_{m_0}} = \frac{\Delta A_m}{A_{m_0}}. \quad (3.16)$$

Розглянемо спектр АМ-сигналу при однотональній (гармонічній) модуляції. Такий сигнал є складним, і може бути описаний таким геометричним рядом:

$$\begin{aligned} a(t) = A_{m_0} [1 + m \cos(\Omega t + \varphi_0)] \cos(\omega_H t + \psi_H) = A_{m_0} \cos(\omega_H t + \psi_H) + \\ + \frac{mA_{m_0}}{2} \cos[(\omega_H + \Omega)t + (\psi_H + \varphi_0)] + \\ + \frac{mA_{m_0}}{2} \cos[(\omega_H - \Omega)t + (\psi_H - \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Перший доданок правої частини (3.17) являє собою несуче ВЧ-коливання з частотою  $\omega_H$ . Другий і третій доданки відповідають новим гармонікам, що виникають у процесі амплітудної модуляції (рис. 3.5).

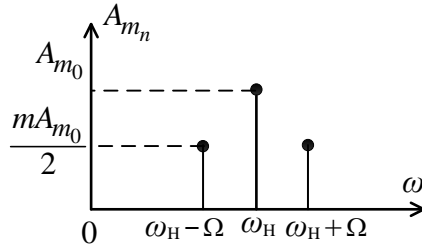


Рисунок 3.5

Ці гармоніки називаються *бічними гармоніками*, їх частоти відповідають  $\omega_H - \Omega$  і  $\omega_H + \Omega$ . Амплітуди бічних гармонік однакові і залежать від коефіцієнта модуляції  $m$ , а їх фази симетричні відносно фази несучого коливання. Що менше  $m$ , то менші амплітуди бічних гармонік, і для граничного значення  $m = 0$  вони взагалі відсутні.

У разі коли модуляційний сигнал є не однотональною функцією, а більш складною:

$$F(t) = \sum_{k=1}^n m_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k), \quad (3.18)$$

то модульований сигнал може бути описаний рядом

$$\begin{aligned} a(t) &= A_{m_0} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n m_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k) \right] \cos(\omega_H t + \psi_H) = \\ &= A_{m_0} \cos(\omega_H t + \psi_H) + \frac{A_{m_0}}{2} \sum_{k=1}^n m_k \cos[(\omega_H + \Omega_k)t + \\ &+ (\psi_H + \varphi_k)] + \frac{A_{m_0}}{2} \sum_{k=1}^n m_k \cos[(\omega_H - \Omega_k)t + (\psi_H - \varphi_k)]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Із формули (3.19) бачимо, що кожна гармонічна складова модуляційного сигналу дає спектру пару бічних частот. Унаслідок цього постає спектр, що складається з двох симетричних відносно несучої  $\omega_H$  бічних смуг – нижньої і верхньої (рис. 3.6).

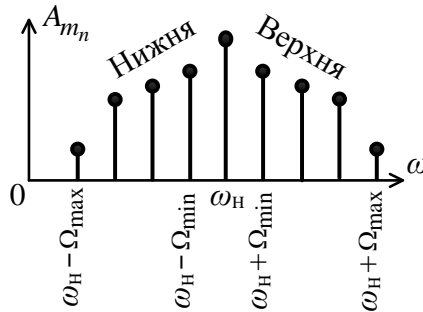


Рисунок 3.6

Спектр верхньої бічної смуги АМ-сигналу подібний до спектра модуляційного сигналу  $F(t)$ , але він зміщений по осі частот на величину  $\omega_H$ .

При амплітудній модуляції відбувається лише перенесення спектра модуляційного сигналу (передаване повідомлення) по осі частот.

Якщо  $\Omega_{\max}$  – гранична частота повідомлення  $F(t)$ , то ширина спектра АМ-сигналу становить

$$\Delta\omega = 2\Omega_{\max}. \quad (3.20)$$

Для уникнення взаємних завад двох радіо-передавальних пристроїв необхідно, що їх несучі частоти  $\omega_{H_1}$  і  $\omega_{H_2}$  були рознесені на величину, не меншу за  $\Delta\omega = \omega_{H_1} - \omega_{H_2} = 2\Omega_{\max}$ .

До недоліків модуляції розглянутого виду належать:

– досить широкий діапазон частот, а відтак низька завадозахищеність;

– низька економічність АМ-радіопередавача, оскільки модуляція несучого коливання за амплітудою вимагає додаткових затрат потужності джерела живлення. Низький ККД АМ зумовлений тим, що передавач споживає однакову потужність і в режимі «паузи» (при  $A_{m_{\min}}$ ), і при генеруванні максимальної амплітуди ( $A_{m_{\max}}$ ).

## Лекція 4

### Кутова модуляція сигналів

- 1 Види кутової модуляції та їх взаємозв'язок.
- 2 Спектри сигналів із кутовою модуляцією.
- 3 Порівняльний аналіз спектрів при частотній модуляції і фазовій модуляції.

#### 1 Види кутової модуляції та їх взаємозв'язок

Кутова модуляція за обсягом поняття об'єднує фазову модуляцію (ФМ) і частотну модуляцію (ЧМ). Ці види модуляції є більш досконалішими і перспективними, ніж АМ, внаслідок високої завадостійкості, малих спотворень, економічності передавачів. Розглянемо ці види модуляції.

*Фазова модуляція.* Модуляційний сигнал  $F(t)$  діє на початкову фазу несучого коливання.

Початкова фаза ФМ-сигналу виражається так:

$$\psi(t) = F(t) + \psi_{H_0}, \quad (4.1)$$

де  $\psi_{H_0}$  – незмінна частина початкової фази;

$F(t)$  – модуляційний сигнал.

Графічно процес ФМ показаний на рисунку 4.1, на якому 1 – це модуляційний НЧ-сигнал, 2 – немодульоване гармонічне коливання, 3 – фазомодульований сигнал.

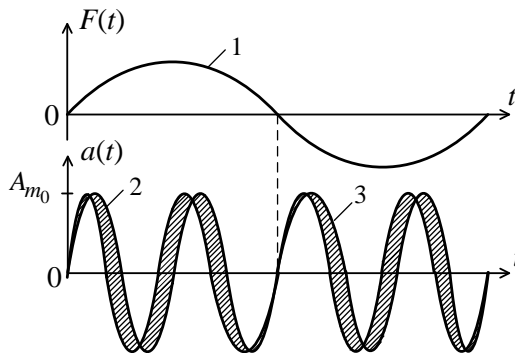


Рисунок 4.1

Аналітично ФМ-сигнал описується:

$$a(t) = A_{m_0} \cos[\omega_H t + F(t) + \psi_{H_0}] = A_{m_0} \cos \theta(t). \quad (4.2)$$

Амплітуда ФМ-сигналу незмінна, а фазовий кут змінюється у часі. При гармонічній (однотональній) фазовій модуляції модуляційний сигнал

$$F(t) = \Delta\psi \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

а початкова фаза ФМ-сигналу

$$\psi(t) = \psi_{H_0} + \Delta\psi \cos(\Omega t + \varphi_0) = \psi_{H_0} + m_{\psi} \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (4.3)$$

де  $m_{\psi} = \Delta\psi$  – індекс фазової модуляції (девіація фази).

Тоді ФМ-сигнал набирає остаточного вигляду

$$a(t) = A_{m_0} \cos[\omega_H t + m_{\psi} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \psi_{H_0}]. \quad (4.4)$$

*Частотна модуляція.* Модуляційний сигнал  $F(t)$  діє на частоту несучого коливання:

$$\omega(t) = \omega_H + F(t), \quad (4.5)$$

де  $\omega(t)$  – миттєва циклічна частота несучого коливання (рис. 4.2).

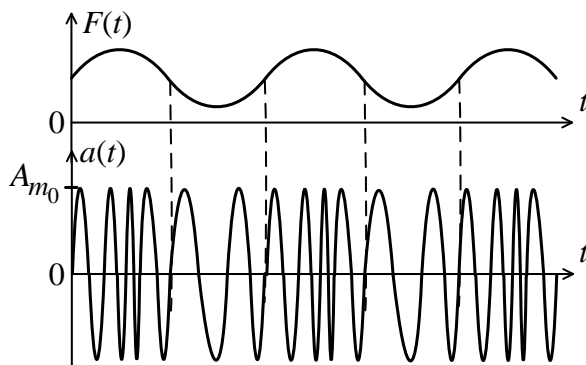


Рисунок 4.2

Оскільки

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (4.6)$$

тоді якщо  $\theta(t) = \omega_H t + \psi_H$ , то  $\omega(t) = \omega_H = \text{const}$ .

З іншого боку, повна фаза сигналу

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \psi_{H_0}. \quad (4.7)$$

Тоді, підставивши (4.7) і (4.5) в (4.2), одержимо аналітичний вираз для ЧМ-сигналу:

$$\begin{aligned} a(t) &= A_{m_0} \cos \theta(t) = A_{m_0} \cos \left[ \int_0^t \omega(t) dt + \psi_{H_0} \right] = \\ &= A_{m_0} \cos \left[ \omega_H t + \int_0^t F(t) dt + \psi_{H_0} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

При однотональній (гармонічній) модуляції (рис. 4.2):

$$F(t) = \Delta\omega_0 \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

де  $\Delta\omega_0$  – девіація частоти, і тоді миттєва частота

$$\omega(t) = \Delta\omega_0 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Відтак для ЧМ-сигналу одержуємо

$$\begin{aligned} a(t) &= A_{m_0} \cos \left\{ \int_0^t [\omega_H + \Delta\omega_0 \cos(\Omega t + \varphi_0)] dt + \psi_{H_0} \right\} = \\ &= A_{m_0} \cos \left[ \omega_H t + \frac{\Delta\omega_0}{\Omega} \sin(\Omega t + \varphi_0) + \psi_{H_0} \right] = \\ &= A_{m_0} \cos[\omega_H t + m_\omega \sin(\Omega t + \varphi_0) + \psi_{H_0}], \end{aligned} \quad (4.9)$$

де  $m_\omega = \Delta\omega_0/\Omega$  – індекс частотної модуляції.

Порівняння виразів (4.4) і (4.9) засвідчує єдність явища кутової модуляції: і при ФМ, і при ЧМ фаза коливання змінюється, але співвідношення між фазовим кутом і модуляційним сигналом є різним.



Для ФМ фазовий кут пропорційний модуляційному сигналу  $\psi(t) = \psi_{H_0} + F(t)$ , а циклічна частота є *пропорційною похідній модуляційній функції* (сигналу)

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\omega_H t + F(t) + \psi_{H_0}] = \omega_H + \frac{dF(t)}{dt}. \quad (4.10)$$

Для ЧМ миттєва частота *пропорційна самій модуляційній функції*

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\omega_H t + \int_0^t F(t)dt + \psi_{H_0}] = \omega_H + F(t), \quad (4.11)$$

а початкова фаза *пропорційна інтегралу від модуляційної функції*

$$\psi(t) = \int_0^t F(t)dt + \psi_{H_0}. \quad (4.12)$$

Таким чином, якщо коливання модулюється за фазою сигналом, який попередньо проходить через інтегратор, то одержують коливання, модульоване за частотою початковим сигналом (до інтегратора).

Тому ЧМ-коливання можна формувати за допомогою фазової модуляції.

Незмінність амплітуди сигналу при кутовій модуляції обох різновидів забезпечує такі переваги останньої:

1) підвищення економічності передавальних пристроїв за рахунок повнішого використання потужності живлення (збільшення ККД);

2) більша завадостійкість ФМ- і ЧМ-сигналів порівняно з АМ-сигналами.

## **2 Спектри сигналів із кутовою модуляцією**

Розглянемо найпростіший випадок кутової модуляції за гармонічним законом. І для ЧМ, і для ФМ вирази (4.2) і (4.9) у цьому випадку можна звести до вигляду

$$a(t) = A_{m_0} \cos[\omega_H t + m \sin(\Omega t + \varphi_0) + \psi_{H_0}], \quad (4.13)$$

де  $m = m_\omega$  при ЧМ;  $m = m_\psi$  при ФМ.

Сигнали з кутовою модуляцією можуть бути описані рядом із коефіцієнтами у вигляді функцій Бесселя першого роду  $n$ -го порядку  $J_n(x)$ , аргументами яких є індекс модуляції  $m$  ( $m_\psi$  або  $m_\omega$ ):

$$\begin{aligned} a(t) = & A_{m_0} \{ J_0(m) \cos(\omega_H t + \psi_{H_0}) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos[(\omega_H + n\Omega)t + n\varphi_0 + \psi_{H_0}] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(m) \cos[(\omega_H - n\Omega)t - n\varphi_0 + \psi_{H_0}] \}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Формулу (4.14) можна подати і в більш компактному вигляді [4]:

$$a(t) = A_{m_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos[(\omega_H + n\Omega)t + n\varphi_0 + \psi_{H_0}]. \quad (4.15)$$

Відтак спектр одотонального сигналу з кутовою модуляцією в загальному випадку містить нескінченне число складових, частоти яких дорівнюють  $\omega_H \pm n\Omega$ , амплітуди цих компонент пропорційні модулям значень  $J_n(m)$ .

Кілька слів про функції Бесселя. Вони задаються із розкладення ряду [6]:

$$e^{jm \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{jmx}.$$

Функції Бесселя 1-го роду  $n$ -го порядку від дійсного аргументу  $m$  є розв'язками диференціального рівняння Бесселя і табульовані в [4]. Приблизний вигляд графіків перших чотирьох функцій  $J_n(m)$  показаний на рисунку 4.3.

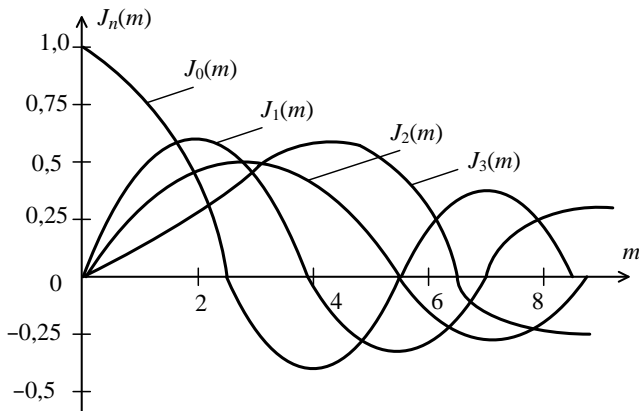


Рисунок 4.3

Із теорії функції Бесселя відомо, що

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m). \quad (4.16)$$

Тому початкові фази гармонік із частотами  $\omega_H + n\Omega$  і  $\omega_H - n\Omega$  збігаються, якщо  $n$  – парне, і відрізняються на  $180^\circ$ , якщо  $n$  – непарне.

Для детального аналізу і побудови спектральних діаграм сигналу з кутовою модуляцією (4.14) потрібно знати поведінку функції  $J_n(m)$  при різних  $m$  залежно від  $n$ .

Із таблиці функцій Бесселя [4] маємо:

$$m = 1:$$

$$J_0(1) = 0,765; J_1(1) = 0,44; J_2(1) = 0,115; J_3(1) = 0,02;$$

$$m = 2:$$

$$J_0(2) = 0,224; J_1(2) = 0,577; J_2(2) = 0,353; J_3(2) = 0,129;$$

$$m = 3:$$

$$J_0(3) = -0,26; J_1(3) = 0,339; J_2(3) = 0,486; J_3(3) = 0,309;$$

$$J_4(3) = 0,132 \text{ і т. д.}$$

Загальну і приблизну уяву про функції  $J_n(m)$  дають і графіки рис. 4.3.

Але повернімося до ряду (4.14), через який описується спектр однотонального ЧМ- або ФМ-сигналу. Очевидно, спектр містить нескінченну множину гармонік, які утворюють верхню і нижню бічні смуги з частотами  $\omega_H + n\Omega$  і  $\omega_H - n\Omega$ . Для порівняння: однотональний АМ сигнал має лише дві бічні гармоніки (рис. 3.5).

Спектр сигналу (4.14) з кутовою модуляцією для деяких значень індексу  $m$  показаний на рисунку 4.4.

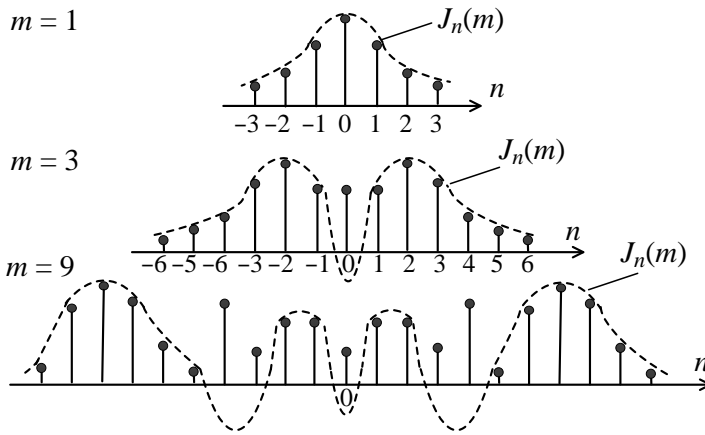


Рисунок 4.4

Із рисунка випливає, що зі збільшенням індексу  $m$  порядок гармонік із максимальною амплітудою збільшується, прямуючи до  $m(n \rightarrow m)$ . При цьому гармоніки вищого порядку набувають щоразу більшого відносного значення. Зі збільшенням  $m$  енергія модульованого сигналу зосереджується на гармоніках вищого порядку.

Прості кількісні зміни індексу  $m$ , пропорційного інтенсивності модуляційного сигналу, приводять до значних якісних змін спектра. Це пояснюється так.

Якщо при АМ енергія бічних гармонік виникає за рахунок зміни амплітуди коливань, то при кутовій модуляції

амплітуда незмінна і їх енергія може бути одержана за рахунок складової несучої частоти. Тому що більше  $m$ , то сильніше «акцентуються» віддалені бічні частоти і зменшуються амплітуди несучої і сусідніх із нею гармонік.

Теоретично спектр сигналу при кутовій модуляції є нескінченним, але у зв'язку з тим, що при фіксованому  $m$  значення функцій Бесселя швидко спадають при зростанні  $n$ , то гармоніками з порядковим номером  $n > m + 1 = n_{\max}$  у розкладі (4.14) можна знехтувати.

Відтак ширина спектра сигналу з кутовою модуляцією

$$\Delta\omega = 2n_{\max}\Omega = 2(m+1)\Omega. \quad (4.17)$$

При  $m \gg 1$

$$\Delta\omega = 2m\Omega. \quad (4.18)$$

Ширина спектра при кутовій модуляції визначається девіацією фази  $m_\psi = \Delta\psi$  (ФМ) або девіацією частоти  $\Delta\omega$  (ЧМ).

При кутовій модуляції з малими індексами ( $m \ll 1$ , вузькосмугова ЧМ) ширина спектра

$$\Delta\omega = 2n_{\max}\Omega = 2(m+1)\Omega \approx 2\Omega. \quad (4.19)$$

Таким чином, у спектрі ЧМ-сигналу при  $m \ll 1$  наявна лише пара бічних гармонік замість бічних смуг, і тому спектр ЧМ-сигналу практично ідентичний до спектра АМ-сигналу (рис. 4.5), а їх ширини рівні.

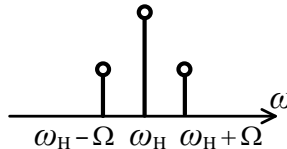


Рисунок 4.5

Різниця в спектрах ЧМ і АМ зростає при більших індексах  $m_\omega$ . Наприклад, у радіомовленні ЧМ (так зване ФМ-радіо) девіація частоти  $\Delta f_0 = 75 \text{ кГц}$ , частота модуляції  $F = 1 \text{ кГц}$ . Тоді індекс модуляції

$$m_\omega = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{\Delta f_0}{F} = \frac{75}{1} = 75.$$

Ширина спектра сигналу ЧМ

$$\Delta f_{\text{ЧМ}} = 2mF = 2 \cdot 75 \cdot 1 = 150 \text{ кГц}.$$

У випадку ж АМ ширина спектра  $\Delta f_{\text{АМ}} = 2F = 2 \text{ кГц}$ . Відтак за всіх інших однакових умов спектр ЧМ у 75 разів ширший, ніж спектр АМ-сигналу. При цьому несучі частоти обох сигналів  $\omega_{\text{н}}$  однакові.

Передавання ширококугових ЧМ- і ФМ-сигналів здійснюється практично в діапазоні ультракоротких хвиль ( $f = 30\text{--}300 \text{ МГц}$ ,  $\lambda = 1\text{--}10 \text{ м}$ ).

### ***3 Порівняльний аналіз спектрів при частотній модуляції і фазовій модуляції***

Дослідимо подібність і відмінність спектрів ЧМ і ФМ (рис. 4.6).

1 При однакових частотах  $\omega_{\text{н}}$ ,  $\Omega$  та індексах модуляції  $m$  спектри ЧМ- і ФМ-сигналів нічим не відрізняються один від одного (рис. 4.6 а). Зміни  $\omega_{\text{н}}$  і  $m$  викликають однакові зміни в ФМ- і ЧМ-спектрах.

2 На відміну від ФМ спектр ЧМ-сигналу щодо своєї ширини не залежить від частоти модуляції  $\Omega$ . Наприклад, зменшення  $\Omega$  при ЧМ приводить до пропорційного збільшення індексу  $m_\omega$  при незмінній девіації  $\Delta\omega_0$ :  $m_\omega = \frac{\Delta\omega_0}{\Omega}$ , і тоді ширина спектра  $\Delta\omega = 2m_\omega \Omega = 2\Delta\omega_0 = \text{const}$ .

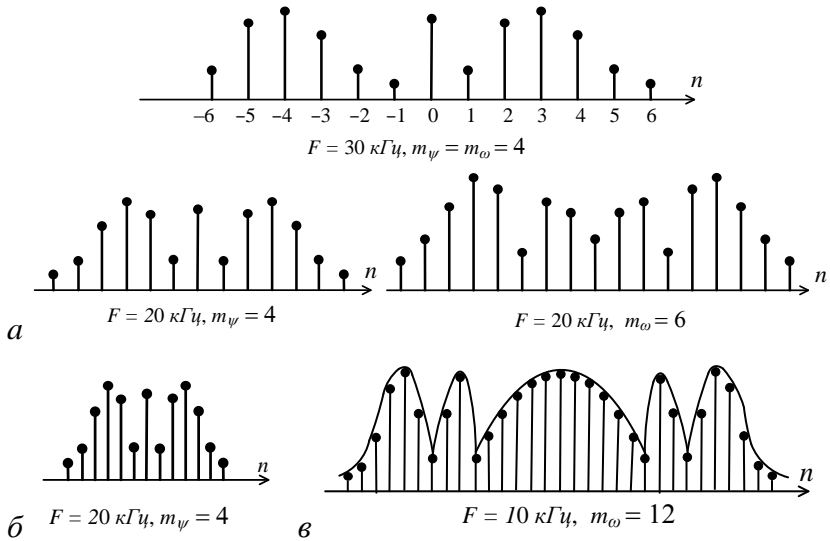


Рисунок 4.6

Із рисунка 4.6 в, на якому зображені спектри ЧМ, бачимо, що зменшення  $\Omega(F)$  приводить до зменшення відстані між спектральними лініями, але оскільки при цьому зростає  $m_\omega$ , то збільшується число гармонік, які урахуються, і тому ширина спектра практично не змінюється.

З Спектр ФМ-сигналу (рис. 4.6 б) щодо ширини залежить від частоти модуляції  $\Omega$ . Індекс фазової модуляції  $m_\psi = \Delta\psi$  від частоти  $\Omega$  не залежить. І тому при зменшенні, наприклад,  $\Omega$  – число гармонік, які ураховуються, залишається незмінним, а відтак ширина спектра зменшується. Оскільки  $\Delta\omega = 2m_\psi \Omega$ , то це зменшення ширини спектра є пропорційним зменшенню  $\Omega$ .

Таким чином, перевага ЧМ перед ФМ полягає у більшій сталості спектрів сигналів. Це і визначає більше широке використання частотної модуляції, порівняно з фазовою, в телекомунікаційних системах.

## Розділ 2

### **Спектральний аналіз проходження детермінованих сигналів через лінійні кола**

#### *Лекція 5*

#### ***Спектральний метод розрахунку реакції лінійного кола на детерміновані сигнали***

*1 Проходження сигналів через лінійні кола і метод його аналізу.*

*2 Розрахунок проходження сигналів із дискретним спектром.*

*3 Розрахунок проходження сигналів із суцільним спектром.*

*4 Поняття про неспотворене передавання сигналів лінійним колом.*

#### ***1 Проходження сигналів через лінійні кола і метод його аналізу***

При проходженні через радіотехнічні кола (РТК) і системи сигнали зазнають різноманітних змін: вихідний сигнал РТК відрізняється від сигналу вхідного. Під дією сигналів у РТК (системі) виникають перехідні процеси, що істотно впливають на характер реакції кола.

При розгляді перехідних процесів в електротехнічних колах нас цікавить усталення стаціонарного режиму при різних комутаціях. Натомість у РТК предметом аналізу є вплив перехідних процесів на *форму сигналу*. В ТКС це, зрештою, визначає вплив системи на інформацію, що міститься в сигналі. Спотворення – це такі зміни сигналу, що порушують інформацію в ньому. В РТК завдання дослідження перехідних процесів здебільшого формується як завдання дослідження *особливостей проходження сигналів через кола*. Перехідні процеси в електронному колі досліджували класичним методом і методом інтеграла згортки. Ці методи базувалися на *принципі суперпозиції* – фундаментальній zasadі, що діє в царині лінійних кіл і



систем. Вони не завжди зручні для аналізу РТК і сигналів, що діють у них. Більш доцільним при аналізі формування реакції лінійного кола на вхідні сигнали є *спектральний метод*, що ґрунтується на принципі суперпозиції так само, як і методи попередні.

Суть спектрального методу полягає в такому. Сигнал, який діє на коло, подається у вигляді сукупності гармонічних дій, що прикладені до входу кола задовго до моменту спостереження, тобто існуючих на інтервалі часу  $-\infty \leq t < \infty$ . При цьому сигнал, що постає на виході кола, відповідно до принципу суперпозиції визначається як сума гармонічних реакцій, що викликається кожною із гармонічних складових вхідного сигналу окремо. Відтак завдання, власне, зводиться до аналізу ustalених режимів у колі при синусоїдній дії. Значення гармонічних складових вихідного сигналу легко знаходяться, якщо відомі спектр вхідного сигналу і частотні характеристики (ЧХ) кола.

## **2 Розрахунок проходження сигналів із дискретним спектром**

Нехай на РТК діє вхідний сигнал у вигляді періодичної напруги, яку можна одержати рядом Фур'є з нескінченним числом гармонік. Відомою є комплексна функція кола  $K(j\omega)$  і її складові – характеристики (АЧХ і ФЧХ). Необхідно знайти вихідний сигнал – напругу на одному з елементів РТК. Вхідний сигнал дається у вигляді ряду Фур'є у комплексній формі:

$$s_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}mn}^* e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}mn} e^{-j\psi_{\text{вх}n}} e^{j\omega_n t}. \quad (5.1)$$

Комплексна амплітуда кожної з гармонік вихідного сигналу  $S_{\text{вих}mn}^*$  визначається як добуток комплексної амплітуди відповідної гармоніки вхідного сигналу  $S_{\text{вх}mn}^*$  на

відповідне значення комплексної функції кола  
 $K(j\omega_n) = K(\omega_n)e^{j\varphi(\omega_n)}$ ;

$$S_{\text{ВИХ}mn}^* = S_{\text{ВХ}mn}^* K(\omega_n) = S_{\text{ВИХ}mn}^* e^{-j\psi_{\text{ВИХ}n}}, \quad (5.2)$$

де  $S_{\text{ВИХ}mn} = S_{\text{ВХ}mn} K(\omega_n)$ ;

$$\psi_{\text{ВИХ}n} = \psi_{\text{ВХ}n} - \varphi(\omega_n).$$

Звідси на основі принципу суперпозиції знаходимо вираз вихідного сигналу:

$$s_{\text{ВИХ}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{\text{ВИХ}mn}^* e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}mn}^* K(j\omega_n) e^{j\omega_n t}. \quad (5.3)$$

Якщо вхідний сигнал (5.1) подати у вигляді дійсної форми ряду Фур'є

$$s_{\text{ВХ}}(t) = S_{\text{ВХ}}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{ВХ}mn} \cos(\omega_n t - \psi_{\text{ВХ}n}), \quad (5.4)$$

то сигнал на виході знайдемо в аналогічній формі:

$$\begin{aligned} s_{\text{ВИХ}}(t) &= S_{\text{ВИХ}0} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{ВИХ}mn} \cos(\omega_n t - \psi_{\text{ВИХ}n}) = \\ &= S_{\text{ВХ}0} K(0) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{ВХ}mn} K(\omega_n) \cos[\omega_n t - \psi_{\text{ВХ}n} + \varphi(\omega_n)]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таким чином, АЧС сигналу на вході може бути одержаний перемноженням АЧС вхідного сигналу на модуль комплексної функції кола, а його ФЧС – додаванням ФЧС вхідного сигналу до значення аргумента комплексної функції кола на відповідних частотах.

Порядок розрахунку такий:

- вхідний сигнал подають у вигляді ряду Фур'є;
- визначають комплексну функцію кола;

– розраховують комплексні амплітуди гармонічних складових вихідного сигналу за формулою (5.2) як добуток комплексних амплітуд вхідного сигналу на комплексну функцію кола.

### Приклад

На вхід інтегрального кола (рис. 5.1) надходить послідовність прямокутних відеоімпульсів напруги.

Знайти напругу на його виході, якщо  $\omega rC \gg 1$ .

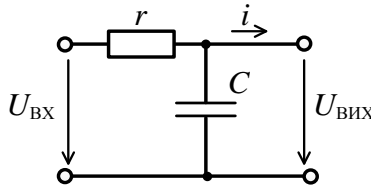


Рисунок 5.1

### Розв'язування

Вхідний сигнал подається у вигляді ряду Фур'є

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{2U_m}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} e^{jn\Omega(t-t_0)}.$$

Комплексний передавальний коефіцієнт кола за напругою

$$K_u(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega rC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (j\omega rC)^2}} e^{j \arctg \omega rC}.$$

Напругу на виході кола знаходимо за формулою (5.3):

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{\text{ВХ}mn}^* K(jn\Omega) e^{jn\Omega t} = \\ &= \frac{U_m}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\sqrt{1 + (n\Omega rC)^2}} e^{j[n\Omega(t-t_0) - \arctg n\Omega rC]}. \end{aligned}$$

При  $\omega rC \gg 1$

$$u_{\text{вих}}(t) \approx \frac{U_m}{q} + \frac{U_m}{n\Omega rC} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n^2} \sin n\Omega(t - t_0).$$

На рисунку 5.2 а наведені АЧС вхідного сигналу і АЧХ кола, а на рисунку 5.2 б – АЧС вихідного сигналу при  $\omega rC \gg 1$ .

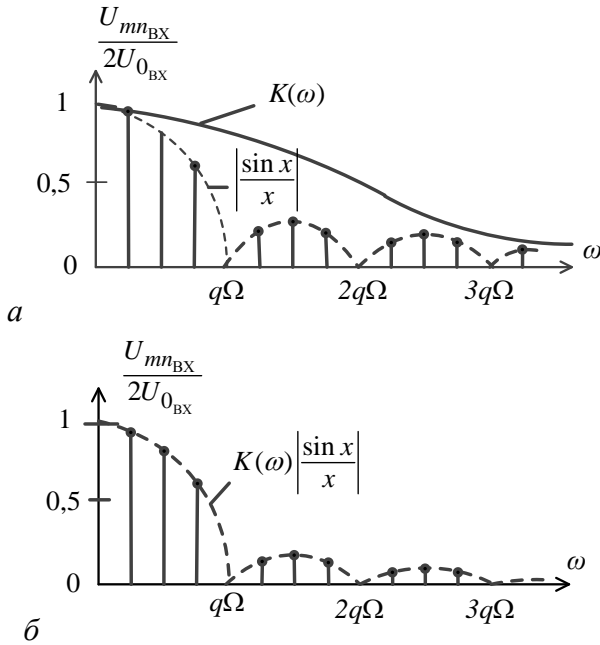


Рисунок 5.2

### 3 Розрахунок проходження сигналів із суцільним спектром

При розрахунку проходження неперіодичних сигналів спектральним методом застосовується пряме і зворотне перетворення Фур'є (див. (2.5) і (2.6)). Подання неперіодичної функції у вигляді інтеграла Фур'є передбачає підсумовування нескінченного числа незагасальних і нескінченно

близьких за частотою синусоїдних коливань із нескінченно малими амплітудами. Це дозволяє застосувати принцип суперпозиції для знаходження вихідних реакцій РТК на будь-які вхідні сигнали.

Нехай на лінійне коло з комплексною передавальною функцією  $K(j\omega)$  надходить сигнал  $s_{\text{вх}}(t)$ . Інтеграл Фур'є дозволяє подати цей сигнал сумою (накладенням) нескінченного числа гармонік із комплексними амплітудами  $\frac{1}{\pi} S_{\text{вх}}(j\omega) d\omega$ .

Комплексні амплітуди відповідних гармонік вихідного сигналу дорівнюють

$$\frac{1}{\pi} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} S_{\text{вих}}(j\omega) d\omega, \quad (5.6)$$

а спектральна щільність вихідного сигналу

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) \quad (5.7)$$

дорівнює добутку спектральної щільності вхідного сигналу на комплексну функцію кола.

Значення вихідного сигналу як функції часу знаходимо за допомогою зворотного перетворення Фур'є – як суму нескінченного числа його гармонік

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вих}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким чином, за відомими комплексною функцією кола і спектральною щільністю вхідного сигналу за допомогою зворотного перетворення Фур'є можна розрахувати реакцію кола на будь-яку задану дію.

Для розрахунку реакції кола:

- знаходять спектральну щільність  $S_{\text{ВХ}}(j\omega)$ ;
- визначають комплексну передавальну функцію кола;
- розраховують спектральну щільність  $S_{\text{ВІХ}}(j\omega)$  як добуток  $S_{\text{ВХ}}(j\omega)$  на КФ кола;

– сигнал на виході знаходять за принципом суперпозиції як суму реакцій кола на кожен дію окремо.

**Приклад.** На  $rC$ -коло (рис. 5.3) діє поодинокій прямокутний відеоімпульс скінченної тривалості  $\tau_u$  з амплітудою  $U_m$ . Знайти напругу на виході.

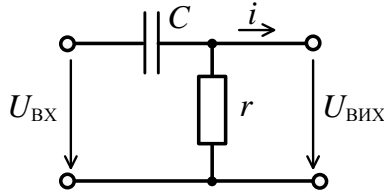


Рисунок 5.3

1 Спектральна щільність вхідного сигналу

$$S_{\text{ВХ}}(j\omega) = U_m \tau_u \left| \frac{\sin(\omega \tau_u / 2)}{\omega \tau_u / 2} \right|.$$

2 Комплексний передавальний коефіцієнт за напругою

$$K(j\omega) = \frac{r}{r + \frac{1}{j\omega C}}.$$

3 Спектральна щільність вихідного сигналу

$$\begin{aligned} S_{\text{ВІХ}}(j\omega) &= S_{\text{ВХ}}(j\omega) K(j\omega) = \\ &= U_m \tau_u \frac{\sin(\omega \tau_u / 2)}{\omega \tau_u / 2} \cdot \frac{\omega}{\omega - j \frac{1}{rC}} = 2U_m \frac{\sin(\omega \tau_u / 2)}{\omega - j \frac{1}{rC}}. \end{aligned}$$

#### 4 Сигнал на виході кола

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вих}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{U_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega \tau_u/2)}{\omega - j \frac{1}{rC}} e^{j\omega t} d\omega =$$
$$= U_m \left[ e^{-\frac{1}{rC}(t + \frac{\tau_u}{2})} - e^{-\frac{1}{rC}(t - \frac{\tau_u}{2})} \right].$$

Форма імпульсу на виході кола рисунка 5.3 при різних сталих часу  $\tau = rC$  показана на рисунку 5.4.

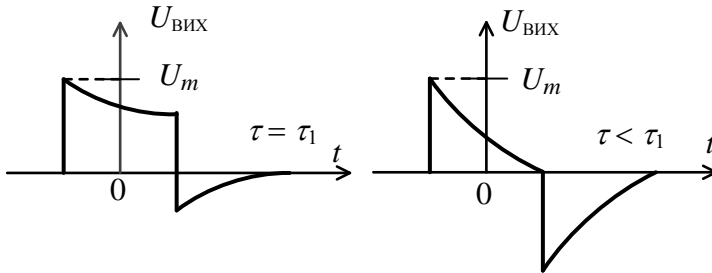


Рисунок 5.4

#### 4 Поняття про неспотворене передавання сигналів лінійним колом

Будь-які зміни сигналу супроводжуються зміною його спектра. При цьому можливі два принципово різні випадки.

1 У спектрі вихідного сигналу виникають нові гармоніки, відсутні на вході кола. Такі зміни називають *нелінійними*, оскільки поява гармонік із новими частотами можлива лише в нелінійних колах.

2 У спектрі вихідного сигналу нові частоти не виникають, а його зміни визначаються змінами амплітуд і початкових фаз наявних гармонік. Це т. зв. *лінійні* зміни сигналу, вони притаманні лінійним колам. У лінійних колах не можуть виникати нові частоти.

У реальних РТК завжди мають місце спотворення сигналів, але їх прагнуть зробити такими, що не перевищують допустимого рівня, тобто практично відсутніми.

Нехай інформація, що міститься в сигналі, репрезентується його *формою*. При неспотвореному передаванні можливі зміни амплітуди і фази, але зберігається форма сигналу (рис. 5.5). Для неспотвореного передавання

$$s_{\text{вих}}(t) = ks_{\text{вх}}(t - t_0), \quad (5.9)$$

де  $k$  – постійний множник, що ураховує зміну амплітуди;

$t_0$  – час запізнення, що визначає зсув сигналу в часі.

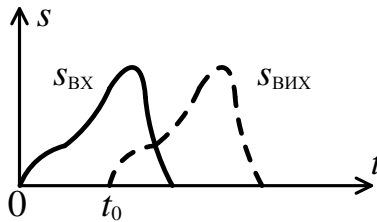


Рисунок 5.5

Перейшовши від часового до частотного способу описання з урахуванням теореми лінійності і теореми про зсув

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = K(j\omega)S_{\text{вх}}(j\omega) = KS_{\text{вх}}(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \quad (5.10)$$

де  $K(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$  – комплексна функція кола.

Із (5.10) випливає, що для неспотвореного передавання сигналу, що супроводжується лише зміною амплітуди і запізнення  $t_0$ , АЧХ кола

$$K(\omega) = K = \text{const}, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty, \quad (5.11)$$

а ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty. \quad (5.12)$$



Відтак із цією метою АЧХ кола повинна бути рівномірною, а ФЧХ – лінійною в усьому діапазоні частот (рис. 5.6). Коливання сигналу на виході кола прямо пропорційні до коливань на вході, причому всі гармоніки запізнюються на один і той самий час.

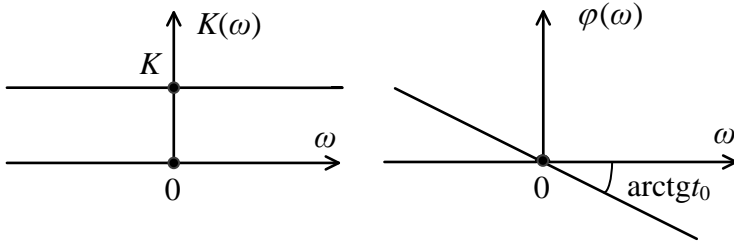


Рисунок 5.6

При скінченній смузі пропускання, коли спектр сигналу ширший за смугу пропускання РТК, уникнути спотворень неможливо.

Зміни форми сигналів, зумовлені відхиленням АЧХ кола від рівномірної, називають *частотними спотвореннями*. Натомість спотворення, спричинені нелінійністю ФЧХ кола, називають *фазовими*.

Відхилення АЧХ і ФЧХ реальних кіл від ідеальних форм (рис. 5.6) зумовлені наявністю у колі реактивних елементів, які зумовлюють частотну залежність параметрів кола. Затримка у часі при проходженні сигналів через лінійні кола пояснюються появою перехідних процесів, зв'язаних із накопиченням енергії в реактивних елементах.

## Лекція 6

### **Зв'язок частотних і часових характеристик лінійних кіл і детермінованих сигналів**

1 Проходження сигналів через ідеальне лінійне коло з обмеженою смугою пропускання.

2 Вплив частотних характеристик кола на спектр і форму вихідного сигналу.

3 Зв'язок між частотними і часовими характеристиками кола.

#### **1 Проходження сигналів через ідеальне лінійне коло з обмеженою смугою пропускання**

Розглянемо вплив обмеження смуги пропускання кола на проходження сигналів на прикладі ідеального фільтра нижніх частот. Таке коло має ідеальні характеристики (див. попередню лекцію (5.11) і (5.12)), але в обмеженому діапазоні частот (рис. 6.1):

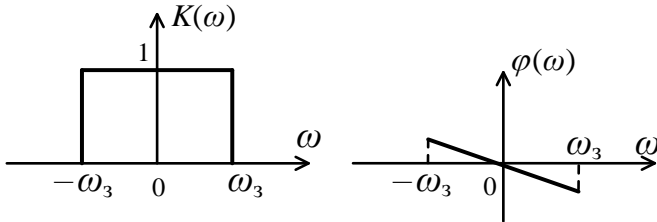


Рисунок 6.1

$$K(j\omega) = \begin{cases} e^{j\omega t_0}, & \text{при } -\omega_3 < \omega < \omega_3 \\ 0, & \text{при } \omega_3 < \omega < -\omega_3 \end{cases} \quad (6.1)$$

Через таке коло всі гармоніки спектра з частотами нижчими від частоти зрізу  $\omega_3$  проходять без зміни амплітуд та із зсувом фаз, пропорційних частоті. Гармоніки поза смугою  $(-\omega_3, \omega_3)$  не проходять на вихід кола (послаблюються), і це приводить до зміни спектра і форми вихідного сигналу.

Ступінь спотворення сигналу зі спектром, що за шириною перевищує смугу пропускання, визначається відділеною часткою спектра, яка залежить від ширини цієї смуги.

Проведемо аналіз проходження сигналів через ідеальне вузькосмугове лінійне коло на прикладі двох типових дій – дельта-функції та одиничної ступінчастої функції.

*Надходження дельта-функції.* Якщо на коло з АЧХ і ФЧХ (рис. 6.1) надходить у момент  $t = 0$  дельта-функція  $\delta(t)$ , спектральна щільність якої  $S_{\text{вх}}(j\omega) = 1$ , то вихідний спектр сигналу обмежується частотою зрізу  $\omega_3$ , а форма вихідного сигналу набере вигляду, який може бути аналітично виражений як

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_3}^{\omega_3} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{\omega_3}{\pi} \frac{\sin \omega_3(t-t_0)}{\omega_3(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

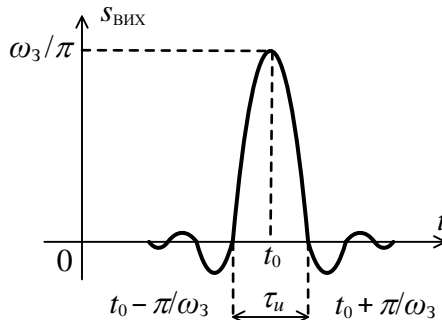


Рисунок 6.2

Ця функція (рис. 6.2) має максимум при  $t = t_0$ , що дорівнює  $s_{\text{вих}}(t) = \omega_3/\pi$ . Поза максимумом у точках при  $t = t_0 \pm \frac{k\pi}{\omega_3}$  вона має нульові значення. Вигляд функції відповідає кривій аркового синуса  $\frac{\sin x}{x}$ .

Основна частина сигналу визначається головною аркою спектра і має ширину  $\tau_u = \frac{2\pi}{\omega_3}$ , яка і є тривалістю сигналу вихідного кола. Характерно, що добуток

$$\omega_3 t_u = 2\pi = \text{const.} \quad (6.3)$$

Із графіка бачимо, що вихідний сигнал запізнюється на час  $t_0$ , який дорівнює тангенсу кута нахилу ФЧХ (рис. 6.1).

Відсікання високочастотної частини спектра у даному ідеальному ФНЧ приводить до того, що вихідний імпульс на відміну від вхідної дельта-функції має скінченну амплітуду  $\frac{\omega_c}{\pi}$ .

При збільшенні частоти зрізу, тобто при розширенні смуги пропускання ФНЧ, зменшується тривалість вихідного імпульсу  $\tau_u$ , а відтак спотворення сигналу даним колом зменшується. Якщо  $\omega_3 \rightarrow \infty$ , то тривалість  $\tau_u \rightarrow 0$ , а амплітуда  $\frac{\omega_3}{\pi} \rightarrow \infty$ , що гранично дає дельта-функцію, тобто вхідний сигнал кола без будь-яких спотворень відтворюється на виході.

#### *Надходження одиничної ступінчастої функції*

Вихідний сигнал ідеального ФНЧ, аналітично описаний в (6.2), – це реакція кола на дельта-функцію, і тому це, по суті, імпульсна характеристика  $h(t)$  кола. Реакція кола на одиничну ступінчасту функцію  $\sigma(t)$ , оскільки між нею і дельта-функцією існує залежність

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt,$$

може бути визначений як інтеграл від імпульсної характеристики:

$$s_{\text{вих}}(t) = \frac{\omega_3}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_3(t-t_0)}{\omega_3(t-t_0)} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \omega_3(t-t_0), \quad (6.4)$$

де  $S_i(x)$  – інтегральний синус.

Реакція кола – перехідна характеристика

$$s_{\text{вих}}(t) = k(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

має вигляд зміщеного інтегрального синуса [1] (рис. 6.3).

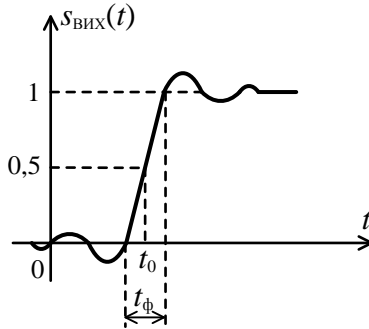


Рисунок 6.3

Крутизна фронту (швидкість наростання) функції при  $t = t_0$

$$\left. \frac{ds_{\text{вих}}}{dt} \right|_{t=t_0} = h(t_0) = \frac{\omega_3}{\pi}. \quad (6.5)$$

Водночас із рисунка 6.3 бачимо, що

$$\left. \frac{ds_{\text{вих}}}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{1}{t_\phi}, \quad (6.6)$$

де  $t_\phi$  – тривалість фронту. Прирівнюючи праві частини (6.5) і (6.6), одержуємо

$$t_\phi = \frac{\pi}{\omega_3}. \quad (6.7)$$

Звідси  $\omega_3 t_\phi = \pi = \text{const}$ . Що вужча смуга пропускання кола, то повільніше збільшується сигнал на виході. Цей сигнал (рис. 6.3) запізнюється на час  $t_0$ , що визначається нахилом ФЧХ кола, а відсікання високочастотної частини спектра (рис. 6.1) приводить до того, що вихідний сигнал на

відміну від вхідного має скінченну (ненульову) тривалість фронту  $t_\phi$ . При  $\omega_3 \rightarrow \infty$   $t_\phi \rightarrow 0$ , що гранично дає одиничну ступінчасту функцію, тобто вхідний сигнал кола без спотворень відтворюється на виході.

*Надходження прямокутного відеоімпульсу*

Нехай на вхід ідеального фільтра нижніх частот з АЧХ і ФЧХ (рис. 6.1) надходить поодинокий прямокутний відеоімпульс (рис. 6.4 а).

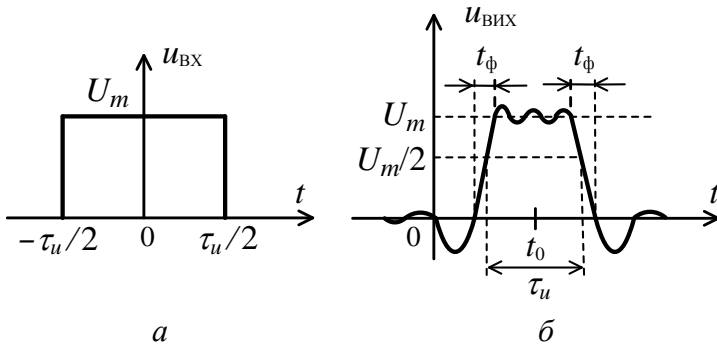


Рисунок 6.4

Необхідно знайти реакцію кола на такий вхідний сигнал. Фактично, це завдання зводиться до попереднього. Різниця полягає в тому, що прямокутний імпульс подається через накладення двох ступінчастих функцій, зміщених одна відносно іншої на час, що дорівнює тривалості імпульсу  $\tau_u$ :

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m \left[ \sigma \left( t + \frac{\tau_u}{2} \right) - \sigma \left( t - \frac{\tau_u}{2} \right) \right] = u_{\text{вх}_1}(t) - u_{\text{вх}_2}(t).$$

За принципом суперпозиції вихідний сигнал є сумою реакцій на обидва вхідні сигнали. При урахуванні формули (6.4) запишемо

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= u_{\text{вих}_1}(t) - u_{\text{вих}_2}(t) = \\ &= \frac{U_m}{\pi} \left[ S_i \omega_3 \left( t + \frac{\tau_u}{2} - t_0 \right) - S_i \omega_3 \left( t - \frac{\tau_u}{2} - t_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Вигляд вихідного сигналу показаний на рисунку 6.4 б.

Із формули (6.7) неважко оцінити зміну фронтів вихідного імпульсу при розширенні смуги пропускання ФНЧ.

Якщо ширина смуги дорівнює ширині головної арки спектра вхідного сигналу  $\omega_3 = \frac{2\pi}{\tau_u}$ , то тривалість фронтів складає  $t_\phi = \frac{\pi}{\omega_3} = \frac{\tau_u}{2}$ .

Якщо ж смуга пропускання відповідає ширині  $k$  арок спектра, тобто  $\omega_3 = k \frac{2\pi}{\tau_u}$ , то тривалість фронтів  $t_\phi = \frac{1}{2k} \tau_u$ .

Таким чином, взагалі при обмеженій смузі пропускання:

- добуток тривалості фронту на потрібну ширину смуги пропускання є сталим;
- добуток тривалості імпульсу на потрібну ширину смуги пропускання є сталим.

Відтак ширина смуги пропускання, потрібна для неспотвореного передавання імпульсу, обернено пропорційна його тривалості  $\tau_u$  і тривалості його фронту  $t_\phi$ . Це означає, що в ТКС передавання і приймання інформації імпульсами малої тривалості потребують збільшення смуги пропускання передавального каналу, хоча при цьому наростає вплив широкосмугових завад.

## ***2 Вплив частотних характеристик кола на спектр і форму вихідного сигналу***

При проходженні через коло сигналу виникають зміни його спектра і форми, які визначаються видом частотних характеристик. Спектр вихідного сигналу залежить від ЧХ кола тією самою мірою, що і від спектра вхідного сигналу. Знання спектра сигналу дозволяє зробити вибір потрібної смуги пропускання. Крім того, за відомими ЧХ кола і сигналу можна вибрати схеми і параметри коригуючих пристроїв, що здійснюють виправлення частотних характеристик системи і форми вихідного сигналу.

Розглянемо проходження ступінчастої функції  $s_{\text{вх}}(t) = U_m \sigma(t)$  через диференціувальне (ФВЧ) та інтегрувальне (ФНЧ) кола.

*Диференціувальне коло*

Дано просте  $rC$ -коло (рис. 6.5).

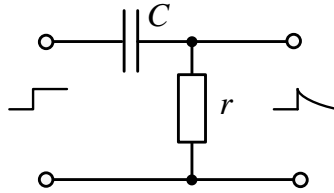


Рисунок 6.5

Вхідний сигнал – функція Хевісайда

$$s_{\text{вх}}(t) = U_m \sigma(t).$$

Спектральна щільність вхідного сигналу

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = U_m \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right].$$

Комплексна передавальна функція за напругою диференціувального кола

$$K_{\text{диф}}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{j\omega}{a + j\omega},$$

де  $\tau = rC$ ;  $a = 1/\tau$ .

Спектральна щільність вихідного сигналу

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega)K_{\text{диф}}(j\omega) = \frac{U_m}{a + j\omega} + \frac{U_m \pi \delta(\omega) j\omega}{a + j\omega} = \frac{U_m}{a + j\omega},$$

оскільки  $\delta(\omega)j\omega = 0$  при всіх значеннях  $\omega$ .

Здійснивши зворотне перетворення Фур'є спектральної щільності  $S_{\text{вих}}(j\omega)$ , знаходимо часовий вираз вихідного сигналу

$$s_{\text{вих}}(t) = U_m e^{-at} = U_m e^{-t/\tau}. \quad (6.8)$$



На часовій діаграмі вихідного сигналу (рис. 6.6) бачимо, що зі зменшенням сталої часу  $\tau = rC$  спотворення сигналу збільшуються і мають характер диференціювання («завал» вершини імпульсу на графіку).

Диференціювання відбувається при  $\omega_{\max} \ll a = 1/\tau$ , тобто

$$\omega_{\max} \tau \ll 1. \quad (6.9)$$

У цьому разі комплексна функція кола  $K_{\text{диф}}(j\omega) \approx j\omega\tau$ , а  $\omega_{\max}$  – максимальна частота, що ураховується в спектрі вхідного сигналу.

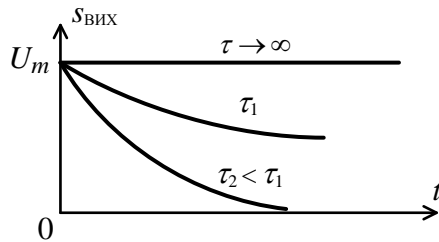


Рисунок 6.6

Таким чином, при проходженні сигналу через ФВЧ зміна фронту сигналу не відбувається, а змінюється лише вершина. У спектрі вихідного сигналу спостерігається зменшення спектральної щільності низькочастотних складових.

*Інтегрувальне коло.* Дано просте  $rC$ -коло (рис. 6.7). Вхідний сигнал, як і попередньо – функція Хевісайда.

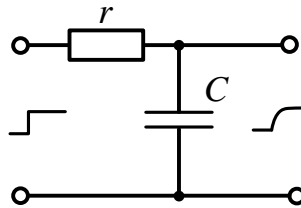


Рисунок 6.7

Комплексна передавальна функція кола

$$K_{\text{ІНТ}}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{a}{a + j\omega}.$$

Спектральна щільність вихідного сигналу

$$S_{\text{ВІХ}}(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(j\omega)K_{\text{ІНТ}}(j\omega) = \frac{a}{j\omega} \cdot \frac{U_m}{a + j\omega} = \frac{a}{j\omega} S_{\text{ВІХДИФ}}(j\omega),$$

де  $S_{\text{ВІХДИФ}}(j\omega)$  – спектральна щільність на виході диференціувального кола.

На підставі теореми інтегрування знаходимо

$$\begin{aligned} s_{\text{ВІХ}}(t) &= a \int_0^t s_{\text{ВІХДИФ}}(t) dt = aU_m \int_0^t e^{-at} dt = \\ &= U_m(1 - e^{-at}) = U_m(1 - e^{-t/\tau}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Із часової діаграми вихідного сигналу інтегрувального кола (рис. 6.8) бачимо, що спотворення наростають зі збільшенням сталої часу кола  $\tau = rC$  і мають характер інтегрування. Інтегрування відбувається при  $\omega_{\text{max}} \gg a$ , тобто коли

$$\omega_{\text{max}}\tau \gg 1. \quad (6.11)$$

У цьому випадку  $K_{\text{ІНТ}}(j\omega) \approx \frac{a}{j\omega}$ .

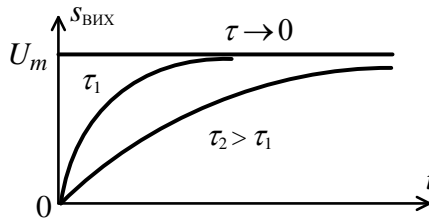


Рисунок 6.8

Таким чином, при проходженні сигналу через ФНЧ відбуваються зміни його фронту, натомість його вершина змінюється неістотно. У спектрі вихідного сигналу відбувається зменшення спектральної щільності високочастотних складових.

### Висновки

1 Для неспотвореного передавання фронту імпульсу необхідно забезпечити у колі умови неспотвореного передавання на високих частотах (рис. 6.9 а).

2 Для неспотвореного передавання вершини імпульсу необхідно забезпечити у колі умови неспотвореного передавання на низьких частотах (рис. 6.9 б).

3 Для більшості реальних кіл можливе лише часткове виконання цих умов, і тоді мають місце завали АЧХ і на НЧ (зміни вершини імпульсу), і на ВЧ (розтягнення фронтів імпульсу) (рис. 6.9 в).

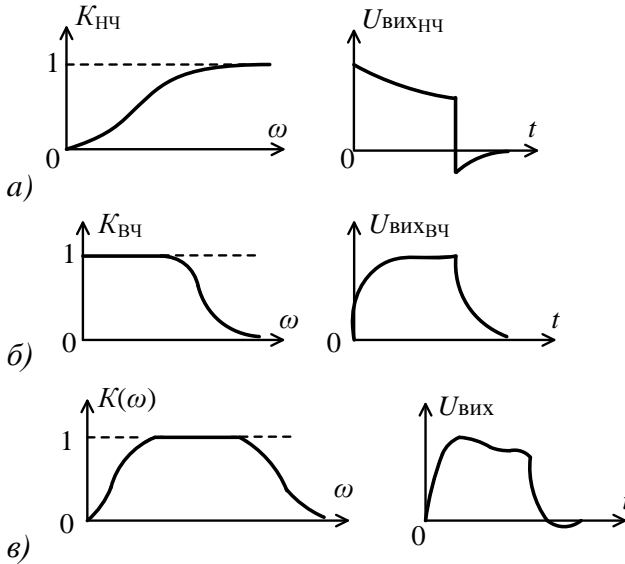


Рисунок 6.9

### 3 Зв'язок між частотними і часовими характеристиками кола

Реакцію кола на довільну дію можна розрахувати як за допомогою його частотних, так і часових характеристик. У першому випадку застосовують інтеграл Фур'є, у другому – інтеграл згортки.

Частотні і часові характеристики визначаються схемою і параметрами елементів кола і перебувають між собою у безпосередньому зв'язку.

Як відомо, імпульсна характеристика  $h(t)$  – це реакція кола на дію дельта-функції. Якщо  $K(j\omega)$  – комплексна функція кола, то ці названі характеристики зв'язані одна з одною парою перетворень Фур'є.

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = F[h(t)], \quad (6.11)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[K(j\omega)]. \quad (6.12)$$

Із цієї пари перетворень випливає, що частотні і часові характеристики лінійного кола взаємозв'язані: зміна частотної характеристики завжди приводить до зміни часової характеристики, і навпаки. Покажемо це на прикладі. Нехай частотна характеристика кола стиснена за частотою. Це означає зміну масштабу частоти:  $K(j\omega) \rightarrow K(ja\omega)$ . Підставивши нову комплексну функцію до (6.12), одержимо

$$h_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(ja\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Замінімо  $a\omega$  на  $\Omega$ :

$$h_1(t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\Omega)e^{j\Omega \frac{t}{a}} d\Omega = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega \frac{t}{a}} d\omega. \quad (6.13)$$

Порівнюючи (6.13) з (6.12), одержуємо

$$h_1(t) = \frac{1}{a} h\left(\frac{t}{a}\right), \quad (6.14)$$

тобто *стисненню* частотних характеристик уздовж осі частот  $a\omega$  відповідає *пропорційне розтягнення* часової характеристики вздовж осі часу  $t/a$ , і навпаки. Це цілком узгоджується з висновком про зв'язок між реакцією кола і шириною його смуги пропускання: що вужча смуга пропускання, то повільніше відбуваються процеси у колі.

## Розділ 3

### Кореляційний аналіз детермінованих сигналів

#### Лекція 7

#### *Автокореляція і взаємна кореляція сигналів*

*1 Вступні зауваження.*

*2 Автокореляційна функція сигналу та її властивості.*

*3 Зв'язок між енергетичним спектром сигналу і його автокореляційною функцією.*

*4 Взаємна кореляційна функція та її зв'язок із взаємною спектральною щільністю.*

#### **1 Вступні зауваження**

На перших етапах розвитку ТКС питання вибору найкращого в якому-небудь відношенні сигналу не було критичним: передавані повідомлення були простими, а реалізація складних сигналів (їх формування та оброблення) була технічно складною. В сучасних ТКС вибір застосовуваних сигналів зумовлений насамперед не технічними зручностями їх формування та оброблення, а можливістю на базі цих сигналів оптимально, з максимальною ефективністю, розв'язувати завдання, передбачені при проектуванні системи.

Наприклад, в імпульсному радарі інформація про об'єкт вимірювання дальності закладена величиною  $\tau$  – затримкою сигналу, прийнятого (ехо-сигналу) відносно зондувального сигналу. Форма зондувального сигналу  $u(t)$  і прийнятого сигналу  $u(t - \tau)$  однакова за будь-яких затримок  $\tau$ . Структурна схема пристрою оброблення радіолокаційних сигналів, призначеного для вимірювання дальності до цілі

$$R = \frac{c\tau}{2} = k\tau,$$

показана на рисунку 7.1. На схемі  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  – елементи затримки зондувального сигналу  $u(t)$ .

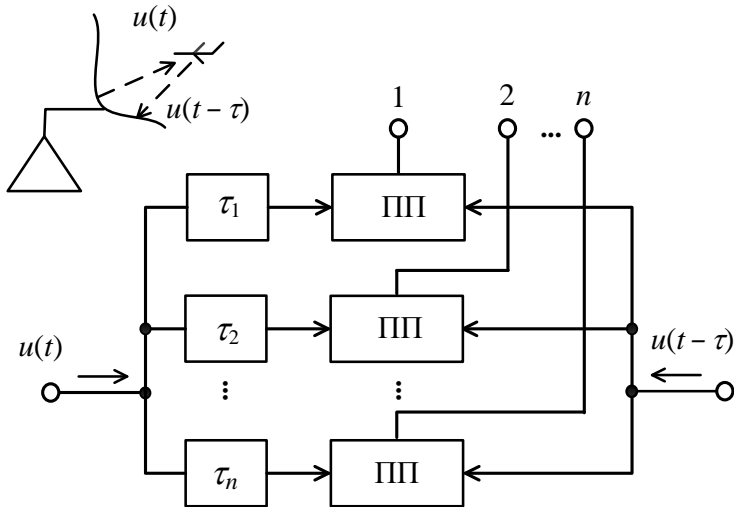


Рисунок 7.1

Затримані сигнали разом із прийнятим сигналом  $u(t - \tau)$  надходять на відповідні пристрої порівняння (ПП).

Сигнал на виході ПП з'являється лише за умови, що обидва входні коливання є «копіями» один одного. Знаючи номер того каналу (1, 2, ..., n), у якому відбувається зазначена подія, можна визначити затримку, а відтак і дальність до цілі. Такий вимірювач працюватиме тим точніше, чим більшою мірою відрізняються між собою сигнал і його «копія», зміщена у часі. І дійсно, якщо ця відмінність є невеликою, то можна, наприклад, очікувати неоднозначність відліку, коли сигнали з'являтимуться одночасно на виході кількох суміжних пристроїв порівняння.

Постає завдання кількісно визначити *ступінь відмінності* сигналу  $u(t)$  і його зміщеної копії  $u(t - \tau)$ . Це завдання вирішує *кореляційний аналіз сигналів*. Саме він дозволяє оцінити швидкість зміни і тривалість сигналу, не розкладаючи його на гармоніки в спектр, тобто не виходячи із часової області.

## 2 Автокореляційна функція сигналу та її властивості

Для кількісного визначення ступеня відмінності сигналу  $u(t)$  від сигналу  $u(t - \tau)$  вводять автокореляційну функцію (АКФ), що дорівнює скалярному добутку цих двох сигналів:

$$K_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t - \tau)dt. \quad (7.1)$$

### Властивості АКФ

1 При  $\tau = 0$  АКФ дорівнює енергії сигналу:

$$K_u(0) = E_u. \quad (7.2)$$

2 АКФ є парною функцією:

$$K_u(\tau) = K_u(-\tau). \quad (7.3)$$

3 При будь-якому значенні часового зсуву  $\tau$  модуль АКФ не перевищує енергії сигналу:

$$|K_u(\tau)| \leq K_u(0) = E_u. \quad (7.4)$$

Доведенням цього відношення є нерівність Коші – Буняковського

$$(u, u_\tau) \leq \|u\| \cdot \|u_\tau\| = E_u.$$

Із властивостей АКФ випливає, що ця функція репрезентується симетричною кривою з центральним максимумом, завжди додатним. При цьому залежно від виду сигналу  $u(t)$  АКФ може мати як монотонно спадний, так і коливальний характер.

### Приклади АКФ

1 АКФ відеоімпульс (рис. 7.2):

$$K_u(\tau) = \begin{cases} U_m^2 \tau_u \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_u}\right), & |\tau| < \tau_u, \\ 0, & |\tau| \geq \tau_u. \end{cases} \quad (7.5)$$

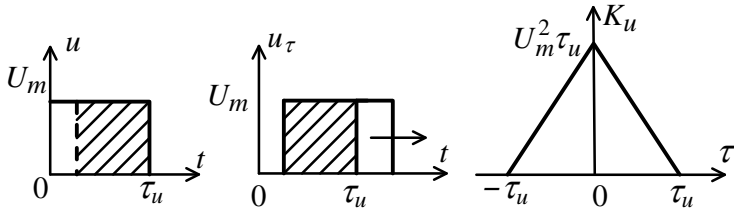


Рисунок 7.2

2 АКФ радіоімпульсу (рис. 7.3):

$$K_u(\tau) = \begin{cases} \frac{U_m^2}{2} (\tau_u - |\tau|) \cdot \left[ \cos \omega \tau + \frac{\sin 2\omega(\tau_u - |\tau|)}{2\omega(\tau_u - |\tau|)} \right], & |\tau| < \tau_u, \\ 0, & |\tau| \geq \tau_u. \end{cases} \quad (7.6)$$

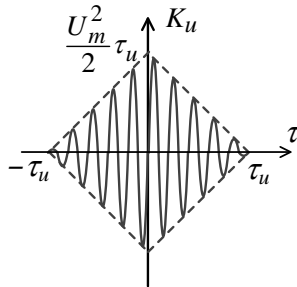


Рисунок 7.3

3 АКФ серії з трьох відеоімпульсів (рис. 7.4):

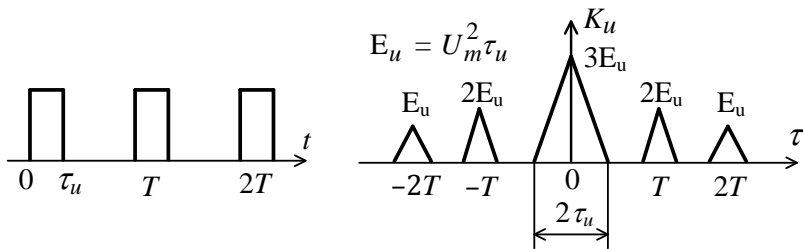


Рисунок 7.4



А як визначати АКФ необмежено протяжного у часі сигналу? Адже інтеграл у (7.1) не буде збігатися. Для уникнення незбіжності інтеграла застосовується модифікований вираз для АКФ, де вона визначається як *середнє значення скалярного добутку* сигналу і його копії:

$$\tilde{K}_u(\tau) = \lim_{\tau_u \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_u} \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} u(t)u(t-\tau)dt. \quad (7.7)$$

Фізичний зміст  $\tilde{K}_u(\tau)$  – це середня взаємна потужність сигналу  $u(t)$  і його копії  $u(t-\tau)$ . Наприклад, для сигналу  $u(t) = U_m \cos \omega t$ ,  $-\infty < t < \infty$ , АКФ має вигляд

$$\tilde{K}_u(\tau) = \frac{U_m^2}{2} \cos \omega \tau. \quad (7.8)$$

Ця АКФ сама є періодичною косинусоїдою, при  $\tau = 0$  її значення  $U_m^2/2$  являє собою середню (ефективну) потужність, що виділяється сигналом на активному навантаженні  $1 \text{ Ом}$ .

### **3 Зв'язок між енергетичним спектром сигналу і його автокореляційною функцією**

Існує тісний зв'язок між автокореляційною функцією і енергетичним спектром сигналу. За формулою (7.1) АКФ – це скалярний добуток  $\tilde{K}_u(\tau) = (u, u_\tau)$ . У той самий час за узагальненою формулою Релея цей скалярний добуток

$$(u, u_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega) S_{u_\tau}^*(j\omega) d\omega.$$

Оскільки спектральна щільність зміщеного у часі сигналу

$$S_{u_\tau} = S_u e^{-j\omega\tau},$$

то комплексно-спряжена його щільність  $S_{u_\tau}^* = S_u^* e^{j\omega\tau}$ .

І тоді АКФ сигналу  $u(t)$  набирає вигляду

$$K_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_u|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.9)$$

У формулі (7.9) квадрат модуля спектральної щільності  $|S_u|^2$  – це енергетичний спектр сигналу. З (7.9) випливає, що енергетичний спектр і АКФ сигналу зв'язані перетворенням Фур'є

$$K_u(\tau) \leftrightarrow |S_u(\omega)|^2 = W_u(\omega),$$

і тоді парне співвідношення до (7.9) таке:

$$|S_u(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.10)$$

Вирази (7.9) і (7.10) є засадничо важливими з двох причин:

1) вони дають можливість оцінювати кореляційні властивості сигналів, виходячи з розподілу їх енергії за спектром. *Принцип неозначеності*  $\Delta\omega\tau_u = const$  свідчить про те, що чим у ширшій смузі частот розподілені спектральні компоненти сигналу, тим *вужчою* є основна пелюстка АКФ і тим досконалішим є сигнал із точки зору можливості точного вимірювання моменту його виникнення;

2) формули (7.9) і (7.10) свідчать про спосіб експериментального визначення енергетичного спектра: часто зручніше спочатку одержати АКФ, а потім, застосовуючи пряме перетворення Фур'є, знайти енергетичний спектр сигналу.

#### **4 Взаємна кореляційна функція та її зв'язок зі взаємною спектральною щільністю**

Взаємна кореляційна функція (ВКФ) уніфікованим способом описує як різницю у формі сигналів, так і їх взаємне положення на осі часу.

За аналогією з (7.1) для АКФ, ВКФ визначається для двох дійсних сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$ :

$$K_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t - \tau) dt. \quad (7.11)$$

Мету застосування ВКФ можна пояснити на прикладі. Нехай сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$  у початковому стані ортогональні, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) = 0.$$

При проходженні цих сигналів через певний пристрій сигнал  $v(t)$  буде зсунутий відносно сигналу  $u(t)$  на деякий проміжок часу  $\tau$ . Тоді ВКФ  $K_{uv}(\tau)$  служить мірою стійкості ортогонального стану відносно зсуву сигналів у часі.

#### Властивості ВКФ

1  $K_{uv}(\tau) = K_{uv}(-\tau)$ . Одне і те саме положення сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$  досягається як при запізненні  $v(t)$  відносно  $u(t)$ , так і його випередженні на один і той самий час  $\tau$ .

2 ВКФ не є парною функцією аргумента  $\tau$ :

$$K_{uv}(\tau) \neq K_{uv}(-\tau).$$

3  $|K_{uv}(\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ . ВКФ обмежена, і це впливає із нерівності Коші – Буняковського  $|(u, v_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ : зсув сигналу у часі не впливає на величину його норми.

Норма сигналу

$$\|u\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (u(t))^2 dt}.$$

4 При  $\tau = 0$  ВКФ зовсім необов'язково досягає максимуму.

**Приклад.** Маємо сигнали  $u(t)$  – прямокутний відеоімпульс,  $v(t)$  – трикутний відеоімпульс (рис. 7.5).

У межах  $0 < t < T$

$$u(t) = U_m,$$

$$v(t) = \frac{U_m t}{T}.$$

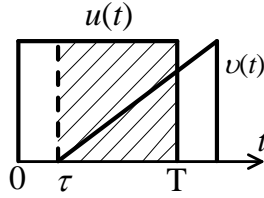


Рисунок 7.5

Уведемо відносний час  $\eta = \frac{\tau}{T}$ .

Тоді при  $\tau > 0$

$$K_{uv}(\tau) = U_m^2 T \left[ \frac{1}{2} - \eta + \frac{\eta^2}{2} \right],$$

при  $\tau < 0$

$$K_{uv}(\tau) = \frac{U_m^2 T}{2} (1 - \eta^2).$$

Побудова ВКФ засвідчує, що вона несиметрична (рис. 7.6).

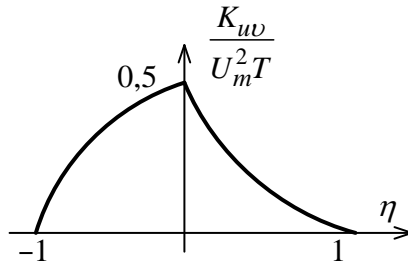


Рисунок 7.6

Виразимо ВКФ через спектральні характеристики сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$ .

На підставі узагальненої формули Релея

$$K_{uv}(\tau) = (u, v_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega) S_{v_\tau}^*(j\omega) d\omega.$$

Оскільки спектр зміщеного у часі сигналу

$$S_{v\tau}(j\omega) = S_v(j\omega)e^{-j\omega\tau},$$

то

$$K_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega) S_v^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.12)$$

У формулі (7.12)

$$W_{uv}(\omega) = S_u(j\omega) S_v^*(j\omega) - \quad (7.13)$$

це взаємна спектральна щільність сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$ .

Відтак ВКФ і взаємний енергетичний спектр двох сигналів зв'язані парою перетворень Фур'є:

$$\left. \begin{aligned} W_{uv}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{uv}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ K_{uv}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \right\}. \quad (7.14)$$

## Розділ 4

### Випадкові сигнали і перетворення їх характеристик у лінійних колах

#### Лекція 8

#### **Випадкові величини і випадкові процеси**

1 *Імовірність як предмет теорії ймовірності.*

2 *Випадкові величини та їх характеристики.*

3 *Випадкові процеси та їх характеристики.*

#### **1 Імовірність як предмет теорії ймовірності**

Досі ми розглядали детерміновані сигнали, тобто такі, що їхня математична модель дозволяє передбачити їх миттєві значення у будь-який момент часу. Втім, строго кажучи, детермінованих сигналів у природі не існує. В реальному сигналі наявна випадкова, заводова складова – внутрішнього чи зовнішнього походження. Між детермінованим і випадковим сигналами неподоланної різниці немає. Аналіз випадкових сигналів базується на математичному апараті теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів.

Випадковий сигнал характеризується тим, що миттєві значення не можуть бути заздалегідь передбачені і розраховані. Ці миттєві значення є *випадковими величинами* (ВВ). ВВ аналізуються в теорії ймовірностей. Попри зазначену непередбаченість ряд властивостей випадкового сигналу дуже точно описується в імовірнісному сенсі. Наприклад, напруга на затискачах елемента ЕК, що «шумить», складається з деякого середнього рівня і швидкозмінних випадкових відхилень, які називають *флуктуаціями*. В останніх найчастіше спостерігаються відносно невеликі відхилення від середнього рівня; що більший модуль цих відхилень, то рідше вони спостерігаються. Вже в цьому одному виявляється певна статистична закономірність. Маючи дані про імовірності флуктуацій різноманітної величини, можна створити математичну модель випадкового коливання, цілком науково сприйнятну. Імовірнісні закони

постають тоді, коли фізична система, що породжує випадковий сигнал, являє собою поєднання дуже великої кількості менших підсистем, що здійснюють певні індивідуальні рухи, в тією чи іншою мірою незалежні один від одного (рис. 8.1).

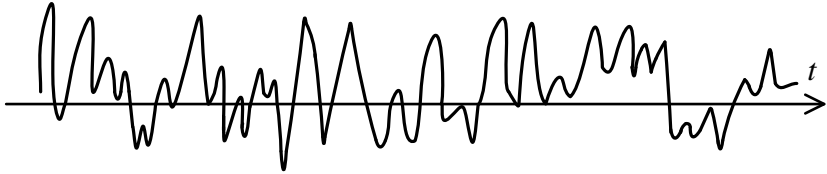


Рисунок 8.1

В основі теорії ймовірностей лежить поняття повної множини «елементарних наслідків», або випадкових подій  $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ ,  $A_i$  – це наслідки певного випадкового експерименту. Кожній події  $A_i \in \Omega$  ставиться у відповідність дійсне число  $P(A_i)$  – *ймовірність* цієї події.

*Аксиоми теорії ймовірностей*

$$1 \quad 0 \leq P(A_1) \leq 1.$$

$$2 \quad \sum_{A_i \in \Omega} P(A_i) = 1.$$

3 Якщо  $A$  – певна складна подія, то його ймовірність дорівнює сумі всіх елементарних ймовірностей:

$$P(A) = \sum_{A_i \in \Omega} P(A_i).$$

Ймовірність є абстрактною величиною. Емпірично вона оцінюється *частотою* сприятливих наслідків. Якщо проведено  $N$  незалежних випробувань, причому в  $n$  із них спостерігалася подія  $A$ , то вибіркове оцінювання ймовірності  $P(A)$ , або частота

$$P^*(A) = n/N, \quad (8.1)$$

а  $P(A) \approx P^*(A)$ , тобто  $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} P^*(A)$ .

## 2 Випадкові величини та їх характеристики

Нехай  $X$  – випадкова величина (ВВ), тобто які завгодно дійсні числа  $x$ , що набувають випадкових значень з інтервалу  $-\infty < x < \infty$ .

Тоді *функція розподілу* ВВ  $X$  – це не випадкова функція  $F(x)$  дійсного аргументу  $x$ :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Якщо  $X$  набуває будь-яких значень, то  $F(x)$  є гладкою неспадною функцією, значення якої лежать в інтервалі  $0 \leq F(x) \leq 1$ . При цьому  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(\infty) = 1$ .

Похідна функції розподілу називається *щільністю розподілу імовірності*  $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ .

Очевидно, величина  $p(x)dx$  є імовірністю попадання ВВ  $X$  до інтервалу  $(x, x + dx)$ :

$$p(x)dx = P(x < X \leq x + dx).$$

Для неперервної ВВ  $X$  щільність імовірності  $p(x)$  є гладкою функцією. Якщо ж  $X$  – дискретна ВВ, що набуває фіксованих значень  $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$  з ймовірностями  $\{P_1, P_2, \dots, P_m, \dots\}$  відповідно, то

$$p(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i).$$

Щільність імовірності повинна відповідати вимогам:

- 1) невід'ємності  $p(x) \geq 0$ ;
- 2) нормування  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ ;
- 3) якщо  $\varphi(x)$  – задана функція від  $x$  (наслідку випадкового випробування), то її середнє значення

$$\overline{\varphi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)p(x)dx. \quad (8.2)$$

Із (8.2) випливає, що найбільший внесок у середнє значення дають ті значення  $x$ , для яких водночас є великими як функція  $\varphi(x)$ , так і щільність імовірності  $p(x)$ .



### Числові характеристики

#### 1 Математичне сподівання (МС)

$$m_x = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (8.3)$$

узагальнює в імовірнісному сенсі поняття середнього арифметичного.

#### 2 Середній квадрат ВВ

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx. \quad (8.4)$$

#### 3 Дисперсія

$$D_x = \overline{(x - m_x)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x)dx. \quad (8.5)$$

При цьому  $D_x = \overline{x^2} - x_x^2$ .

#### 4 Середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (8.6)$$

Це кількісне оцінювання ступеня розсіювання результатів окремих випадкових випробувань відносно вибіркового середнього.

### Рівномірний розподіл ВВ

Нехай певна ВВ  $X$  може набувати значень з інтервалу  $x_1 \leq x \leq x_2$ , причому імовірності попадання до будь-яких внутрішніх підінтервалів однакової ширини  $\Delta x$  однакові.

Щільність імовірності (рис. 8.2):

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{1}{x_2 - x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

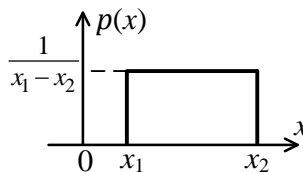


Рисунок 8.2

Функція розподілу (рис. 8.3):

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 1, & x > x_2. \end{cases}$$

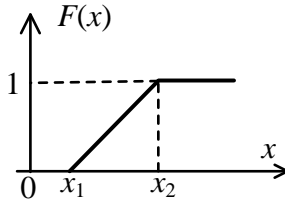


Рисунок 8.3

*Математичне сподівання*

$$m_x = \bar{x} = \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Відтак МС збігається з центром інтервалу  $(x_1, x_2)$ .

*Дисперсія*

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{(x_2-x_1)^2}{12}.$$

Рівномірний розподіл ВВ часто застосовується в теорії похибок.

*Гаусовий (нормальний) розподіл*

Цей розподіл є найважливішим у теорії випадкових сигналів (процесів). Щільність імовірності визначається двома числовими параметрами  $m$  і  $\sigma$ :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (8.7)$$

Графік  $p(x)$  (рис. 8.4) являє собою дзвоноподібну криву з єдиним максимумом у точці  $x = m$ .

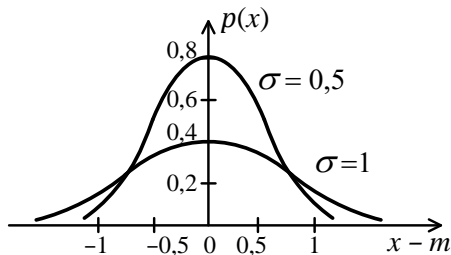


Рисунок 8.4

У формулі (8.7)  $m$  – МС,  $\sigma^2$  – це дисперсія.

Положення піка гаусової кривої на осі  $x$  визначає  $m$ , а величину цього піка і ширину «дзвона» визначає  $\sigma$ , тобто величину розсіювання  $x$ , вздовж якої розподілена з позитивною імовірністю гаусова ВВ.

Функція розподілу гаусової ВВ

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi.$$

Здійснивши заміну змінної  $t = \frac{\xi-m}{\sigma}$ , одержимо

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-m/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (8.8)$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – інтеграл імовірності.

Графік функції розподілу має вигляд монотонної кривої, що змінюється від 0 до 1 (рис. 8.5).

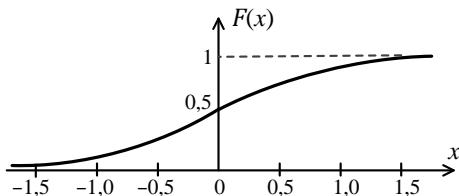


Рисунок 8.5

### 3 Випадкові процеси та їх характеристики

Теорія випадкових величин досліджує імовірнісні явища «у статиці», розглядаючи їх як певні зафіксовані результати експериментів. Для опису сигналів, які є *ВВ*, що змінюються у часі, методи класичної теорії ймовірностей виявляються недостатніми. Подібні задачі належать до царини *теорії випадкових процесів*.

*Випадковий процес* (ВП)  $X(t)$  – це функція, яка характеризується тим, що в будь-який момент часу  $t$  значення, яких вона набуває, є випадковими величинами. Поняття *випадковий процес* і *випадковий сигнал* у наших лекціях є синонімами.

Коли ми вимірюємо (спостерігаємо) на певному проміжку часу миттєві значення випадкового сигналу, то одержуємо лише *єдину реалізацію* ВП. Теоретично ВП виражається через нескінченну сукупність таких реалізацій, що утворюють *статистичний ансамбль*.

Наприклад, таким ансамблем може бути набір сигналів  $\{x'(t), x''(t), \dots, x^{(K)}(t), \dots\}$ , що одночасно спостерігаються на виходах зовсім однакових генераторів шуму (рис. 8.6).

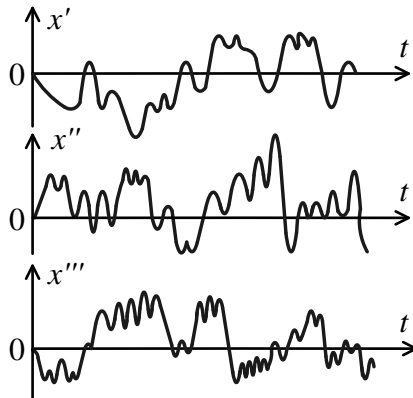


Рисунок 8.6

### Щільність імовірності ВП

Нехай  $X(t)$  – ВП, заданий ансамблем реалізацій  $x'(t)$ ,  $x''(t)$ ,  $x'''(t)$ , а  $t_1$  – деякий довільний момент часу. Фіксуючи величини  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , що одержуються в окремих реалізаціях, ми маємо *одновимірний перетин* цього ВП і спостерігаємо ВВ  $X(t_1)$  (рис. 8.7).

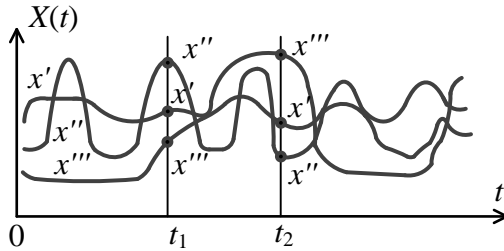


Рисунок 8.7

Щільність імовірності цієї ВВ  $p(x, t_1)$  називається одновимірною щільністю імовірності ВП  $X(t)$  у момент часу  $t_1$ . Втім, одновимірної щільності імовірності не досить для того, щоб робити висновок про характер розвитку реалізації ВП у часі.

Якщо взяти два перетини ВП у момент  $t_1$  і  $t_2$  ( $t_1 \neq t_2$ ), то маємо справу з ВВ  $\{X(t_1), X(t_2)\}$ , що репрезентується двовимірною щільністю імовірності  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$ . Ця щільність повніше описує ВП  $X(t)$ .

Природним узагальненням є  $n$ -вимірний перетин ВП ( $n > 2$ ), що приводить до  $n$ -вимірної щільності імовірності  $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Однак одержання і дослідження цих щільностей пов'язані із серйозними математичними труднощами.

*Числові характеристики ВП.* На практиці зручніше оперувати з такими математичними функціями ВП.

*Математичне сподівання*

$$m(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx \quad (8.9)$$

це середнє значення ВП  $X(t)$  у поточний момент часу  $t$ , усереднення здійснюється за усім ансамблем реалізацій процесу.

*Дисперсія*

$$D_x(t) = \sigma^2(t) = \overline{[x(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 \rho(x, t) dx \quad (8.10)$$

дозволяє оцінювати ступінь розсіювання миттєвих значень, яких набирають окремі реалізації у фіксованому перетині.

*Автокореляційна функція* (АКФ). Це двовимірний центральний момент

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= \overline{[x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)] \rho(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

АКФ характеризує міру статистичного зв'язку тих ВВ, що спостерігаються при  $t = t_1$  і  $t = t_2$ . Порівнюючи формули (8.10) і (8.11), можна помітити, що при суміщенні перетинів ( $t_1 = t_2$ ) АКФ чисельно дорівнює дисперсії

$$K(t_1, t_2)|_{t_1 = t_2 = t} = \sigma^2(t). \quad (8.12)$$

## Лекція 9

### **Стаціонарні випадкові величини в часовому і спектральному вимірах**

1 *Поняття стаціонарних випадкових процесів та їх різновиди.*

2 *Спектрально-кореляційний аналіз стаціонарних випадкових процесів.*

#### **1 Поняття стаціонарних випадкових процесів та їх різновиди**

Стаціонарні випадкові процеси (СВП) – це ВП, статистичні характеристики яких незмінні у часі.

Кажуть, що ВП є *стаціонарними у вузькому сенсі*, якщо будь-яка його  $n$ -вимірна щільність імовірності інваріантна щодо часового зсуву  $\tau$ :

$$p(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = p(x_1, \dots, x_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau). \quad (9.1)$$

Кажуть, що ВП є *стаціонарним у широкому сенсі*, якщо його МС  $m_x$  і дисперсія  $D_x$  не залежать від часу, а АКФ визначається лише різницею  $\tau = |t_2 - t_1|$ , тобто

$$K(t_1, t_2) = K(\tau).$$

Із стаціонарності у вузькому сенсі випливає стаціонарність у широкому сенсі, але не навпаки.

Автокореляційна функція СВП має такі властивості.

1 Парність  $K(\tau) = K(-\tau)$ .

2 Абсолютне значення АКФ при будь-яких  $\tau$  обмежене

$$|K(\tau)| \leq K(0) = \sigma^2. \quad (9.2)$$

Часто для зручності вводять нормовану АКФ

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma^2}, \quad (9.3)$$

яку називають *коефіцієнтом кореляції СВП*.

Із (9.3) випливає, що  $R(0) = 1$ .

**Приклад 1** Дано ВП  $u(t)$ , утворений реалізаціями  $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , де  $U_0$  і  $\omega_0$  – сталі, а  $\varphi$  – ВВ з рівномірним розподілом в інтервалі  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Щільність імовірності фази  $p_\varphi = \frac{1}{2\pi}$ .

Дослідити цей процес на стаціонарність.

◀МС цього ВП

$$\bar{u} = \overline{U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{U_0}{2\pi} \int_0^\pi \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0.$$

Його дисперсія

$$\sigma^2 = \overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{U_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{U_0^2}{2}.$$

АКФ

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= \overline{U_0^2 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)} = \\ &= \frac{U_0^2}{2} [\overline{\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)} + \overline{\cos \omega_0(t_2 - t_1)}] = \\ &= \frac{U_0^2}{2} \cos \omega_0(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Отже, цей ВП є стаціонарним у широкому сенсі. ▶

**Приклад 2** Дано ВП  $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , причому  $\omega_0$  і  $\varphi_0$  – задані числа,  $U_0$  – випадкова величина, яка має довільний закон розподілу. Дослідити процес на стаціонарність.

◀МС  $\bar{u} = \bar{U}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  не залежить від часу в окремому випадку, коли  $\bar{U}_0 = 0$ . Відтак у загальному випадку цей ВП не є стаціонарним. ▶

*Властивість ергодичності.* СВП називають *ергодичним*, якщо при знаходженні будь-яких статистичних характеристик усереднення за статистичним ансамблем можна замінити усередненням за часом. Операція усереднення здійснюється над єдиною реалізацією  $x(t)$ , протяжність якої  $T \rightarrow \infty$  (рис. 9.1).



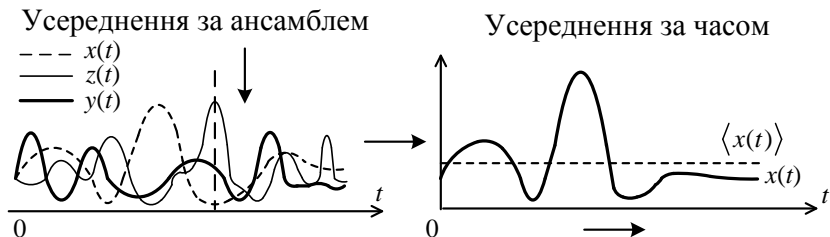


Рисунок 9.1

МС ергодичного СВП

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (9.4)$$

Знак  $\langle a \rangle$  тут означає усереднення у часі.

МС дорівнює постійній складовій вибраної реалізації.

Дисперсія ергодичного СВП

$$\begin{aligned} D_x = \sigma^2 &= \langle (x(t) - m)^2 \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m)^2 dt = \langle x^2(t) \rangle - m^2. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Позаяк  $\langle x^2(t) \rangle$  є середньою потужністю реалізації, а величина  $m^2$  – потужністю постійної складової, то дисперсія дорівнює потужності флуктуаційної складової ергодичного процесу.

АКФ ергодичного процесу

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \langle (x(t) - m)(x(t + \tau) - m) \rangle = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - m^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt - m^2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Для того щоб ВП був ергодичним, він повинен бути насамперед стаціонарним у широкому сенсі. Достатньою умовою ергодичності є прямування до нуля АКФ при обмеженому зростанні часового зсуву  $\tau$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0. \quad (9.7)$$

Цю вимогу можна дещо послабити. ВП ергодичний, якщо виконується умова Слуцького

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(\tau) d\tau = 0. \quad (9.8)$$

Формула (9.8) є справедливою щодо гармонічного процесу з випадковою початковою фазою.

*Стационарні гаусові ВП.* Ці математичні моделі випадкових сигналів широко використовуються в ТКС для опису статистичних явищ, зумовлених великим числом незалежних складових (доданків), тобто в умовах застосованості *центральної граничної теореми* (закону великих чисел). Згідно із цією теоремою, за деяких обмежень, що фізично можуть бути реалізованими, розподіл суми незалежних випадкових величин, дисперсії яких скінченні, а щільності ймовірностей довільні, зі зростанням числа доданків прямує до нормального (гаусового) закону.

Двовимірна щільність імовірностей гаусового стаціонарного ВП:

$$p(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2(\tau)}} \times \exp\left\{-\frac{(x_1-m)^2 - 2R(\tau)(x_1-m)(x_2-m) + (x_2-m)^2}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]}\right\}. \quad (9.9)$$

Чудова властивість гаусового СВП, що зумовлює виключно широке використання в теорії сигналів: будь-яка його багатовимірна щільність імовірності визначається лише двома характеристиками: МС і АКФ.

## **2 Спектрально-кореляційний аналіз стаціонарних випадкових процесів**

Між кореляційними і спектральними властивостями випадкових сигналів існує глибокий щільний зв'язок.

Нехай маємо  $X(t)$  – СВП, що має нульове МС.

Окрема реалізація ВП є детермінованою функцією, яку можна описати спектральним розкладанням

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.10)$$

Щоб описати весь ансамбль реалізацій, який утворює процес  $X(t)$ , необхідно припустити, що спектральні щільності  $S(j\omega)$  є випадковими функціями частоти. Відтак ВП у часовій області зв'язаний з іншим ВП у частотній області.

Але які властивості повинні мати випадкові функції  $S(j\omega)$ , для того щоб процес  $X(t)$  був стаціонарним, а розкладання (9.10) було спектральним поданням цього процесу?

Для відповіді на поставлене питання насамперед проведемо усереднення миттєвих значень за ансамблем:

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega = 0.$$

Ця рівність є справедливою для будь-якого  $t$ , якщо

$$\overline{S(j\omega)} = 0, \quad (9.11)$$

тобто випадкова спектральна щільність повинна мати нульове МС на всіх частотах.

Далі, за яких умов АКФ  $K(\tau)$  залежатиме лише від зсуву  $\tau$  між перетинами? Сигнал  $x(t)$  є дійсним, та разом із виразом (9.10) справедливою є також рівність

$$x(t) = x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.12)$$

Знайдемо вираз для АКФ СВП, застосовуючи спектральні розкладання випадкового сигналу (9.10) і (9.12):

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \overline{x^*(t)x(t+\tau)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S(j\omega)S^*(j\omega')} e^{j\omega\tau} e^{j(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S(j\omega)S^*(j\omega')} e^{j(\omega-\omega')t} d\omega'. \quad (9.13).$$

У формулі (9.13) множник  $\overline{S(j\omega)S^*(j\omega')}$  має зміст АКФ випадкової спектральної щільності. Для того щоб величина  $K(\tau)$  не залежала від часу  $t$ , необхідно, як це впливає з (9.13), виконання умови пропорційності множника  $\overline{S(j\omega)S^*(j\omega')}$  до зміщеної дельта-функції  $\delta(\omega - \omega')$ :

$$\overline{S(j\omega)S^*(j\omega')} \sim \delta(\omega - \omega'). \quad (9.14)$$

Із (9.14) випливає, що випадкова спектральна щільність  $S(j\omega)$  стаціонарного ВП повинна бути *дельта-корельованою*. Це означає, що спектри, які відповідають двом незбіжним частотам, некорельовані між собою, і водночас середній квадрат (дисперсія) випадкової спектральної щільності є необмежено великим.

*Енергетичний спектр СВП.* Уведемо до (9.14) пропорційний множник, що залежить від частоти:

$$S(j\omega)S^*(j\omega') = 2\pi W(j\omega)\delta(\omega - \omega'). \quad (9.15)$$

Підставивши (9.15) в (9.13), одержуємо важливий для теорії випадкових сигналів вираз – *теорему Вінера – Хінчина*:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (9.16)$$

За теоремою Вінера – Хінчина, АКФ і енергетичний спектр  $W(j\omega)$  СВП, що має нульове МС, зв'язані між собою перетворенням Фур'є.

Із (9.16) випливає і пряме перетворення Фур'є:

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9.17)$$

Якщо у формулу (9.16) підставити  $\tau = 0$ , то, позаяк  $K(0) = \sigma^2$ ,

$$D = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) d\omega. \quad (9.18)$$

Отже, дисперсія  $\sigma^2$ , що дорівнює середній потужності СВП, є сумою внесків від усіх частот.

Енергетичний спектр (спектральна щільність потужності) є дійсним і невід'ємним

$$W(j\omega) = W(\omega) \geq 0. \quad (9.19)$$

Величина  $W(\omega)$  пропорційна питомій середній потужності, що відповідає одиничному частотному інтервалу навколо вибраної частоти  $\omega$ . Якщо випадковий сигнал – це напруга, то його енергетичний спектр має розмірність  $V_2 \cdot c/\text{рад}$ . Енергетичний спектр не несе жодної інформації про фазові співвідношення між окремими спектральними компонентами, і тому за енергетичним спектром неможливо відновити будь-яку окремо взятую реалізацію ВП. Застосовується також поняття однобічного енергетичного спектра

$$F(\omega) = \begin{cases} W(\omega)/\pi & \text{при } \omega \geq 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

Тоді дисперсія (середня потужність) СВП

$$\sigma^2 = K(0) = \int_0^\infty F(\omega) d\omega. \quad (9.21)$$

*Інтервал кореляції.* Для стаціонарних ВП, що мають властивість ергодичності, як уже зазначалося (див. (9.7)), АКФ прямує до нуля при збільшенні часового зсуву  $\tau$ . Що швидше спадає функція  $K(\tau)$ , то меншим буде статистичний зв'язок між миттєвими значеннями випадкового сигналу в два незбіжні моменти часу. Числовою характеристикою для оцінювання «швидкості зміни» реалізацій ВП є інтервал  $\tau_k$ :

$$\tau_k = \frac{1}{K(0)} \int_0^\infty K(\tau) d\tau = \int_0^\infty R(\tau) d\tau. \quad (9.22)$$

Формула (9.22) безпосередньо впливає з рисунка 9.2. На рисунку площі, обмежені обома фігурами, рівновеликі. Інтервал кореляції передбачає можливість імовірнісного прогнозу поведінки будь-якої реалізації ВП на час

тривалістю  $\tau_k$ , якщо відома інформація про її поведінку у минулому. Але при цьому неможливо прогнозувати поведінку реалізації на час, що перевищує  $\tau_k$ . Адже миттєві значення ВП, так віддалені між собою у часі, практично некорельовані, тобто  $\overline{x(t)x(t+\tau)} = 0$ .

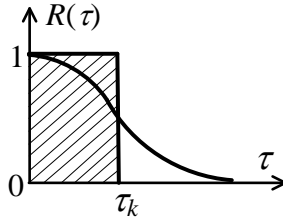


Рисунок 9.2

*Ефективна ширина спектра.* Нехай випадковий сигнал характеризується однобічним енергетичним спектром  $F(\omega)$ , причому  $F_{max}$  – екстремум цієї функції (рис. 9.3). На рисунку площі, обмежені обома фігурами, рівновеликі, тобто

$$F_{max}\Delta\omega_{\text{еф}} = \int_0^{\infty} F(\omega)d\omega,$$

звідки

$$\Delta\omega_{\text{еф}} = \frac{1}{F_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega. \quad (9.23)$$

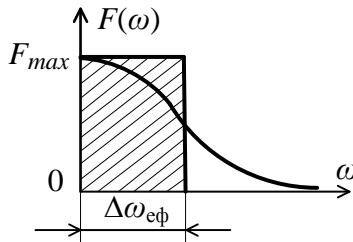


Рисунок 9.3

Порівнюючи (9.23) з (9.21), зробимо висновок, що дисперсія шумової напруги  $\sigma^2 = F_{max}\Delta\omega_{\text{еф}}$ .

**Приклад.**

Дано для шумового процесу  $F_{max} = 5 \cdot 10^{-9} B^2 c$ ,  $\Delta\omega_{\text{еф}} = 3 \cdot 10^5 1/c$ . Дисперсія шумової напруги (середня потужність)  $\sigma^2 = 1,5 \cdot 10^{-3} B^2$ , а напруга шуму  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 39 мВ$ .

Між інтервалом кореляції  $\tau_k$  та ефективною шириною спектра  $\Delta\omega_{\text{еф}}$  має місце відношення неозначеності

$$\Delta\omega_{\text{еф}}\tau_k = const,$$

тобто що ширший енергетичний спектр шуму, то хаотичніше (і швидше) змінюються у часі його реалізації.

*Білий шум.* Білий шум (БШ) – СВП, у якого енергетичний спектр на всіх частотах

$$W(\omega) = W_0 = const.$$

За теоремою Вінера – Хінчина (9.16), АКФ БШ

$$K(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0\delta(t), \quad (9.24)$$

з чого випливає, що середня потужність БШ необмежено велика, а сам БШ є дельта-корельованим СВП, тобто швидкість зміни миттєвих значень реалізацій БШ необмежено велика.

БШ – абстрактна математична модель, відсутня в природі. Втім, досить широкосмугові ВП можуть бути змодельовані білим шумом, якщо смуга пропускання кола, на яке діє випадковий сигнал, виявляється істотно вужчою від ефективної ширини спектра шуму (рис. 9.4),  $\Pi \ll \Delta\omega_{\text{еф}}$ .

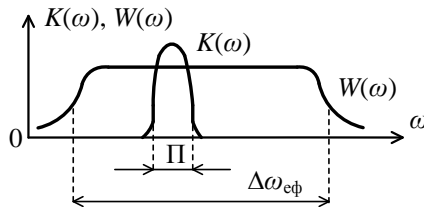


Рисунок 9.4

## Лекція 10

### **Вузькосмугові детерміновані і випадкові сигнали**

- 1 Детерміновані сигнали з обмеженим спектром. Поняття вузькосмугового сигналу.
- 2 Теорема Котельникова та деякі наслідки з неї.
- 3 Вузькосмугові випадкові процеси.

#### **1 Детерміновані сигнали з обмеженим спектром.**

##### **Поняття вузькосмугового сигналу**

Оскільки енергія реальних сигналів скінченна, то частка енергії, що вноситься спектральними компонентами при  $\omega \rightarrow \infty$ , дуже мала, хоча в ідеалі для повного відтворення сигналу за його спектром необхідно урахувати всі гармоніки в інтервалі  $0 \leq \omega \leq \infty$ . До того ж будь-який реальний пристрій, що працює із сигналами, має скінченну смугу частот (особливо частотні фільтри і резонансні кола). Тому доцільно дуже конспективно розглянути клас сигналів, спектральна щільність яких не дорівнює нулю лише в межах певного скінченного за довжиною інтервалу частот. Ці сигнали називають *сигналами з обмеженим спектром*. До таких сигналів відносять:

1 *Ідеальний низькочастотний сигнал*. Цей сигнал є ідеалізованим описом вихідної реакції ФНЧ, збуджуваного на вході коливанням із рівномірною за частотою спектральною щільністю, тобто дельта-імпульсом. Сигнал аналізується у лекції 6 (формула (6.2) і рис. 6.2).

2 *Ідеальний смуговий сигнал*. Його спектральна щільність постійна і дійсна.

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega, \\ \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega, & \\ 0, & \text{поза смугою.} \end{cases} \quad (10.1)$$

Часовий вираз сигналу – обернене перетворення Фур'є

$$s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{2S_0\Delta\omega}{\pi} \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \cos \omega_0 t. \quad (10.2)$$



Спектр і часова діаграма ідеального смугового сигналу показані на рисунку 10.1. У сигналі поряд із високочастотними коливаннями на частоті  $\omega_0$  спостерігається також зміна у часі миттєвого значення їх амплітуди (обвідна пропорційна до функції  $\sin \Delta\omega t / \Delta\omega t$ ). За умови  $\Delta\omega / \omega_0 \ll 1$  обвідна функція змінюється у часі значно повільніше, ніж ВЧ заповнення сигналу.

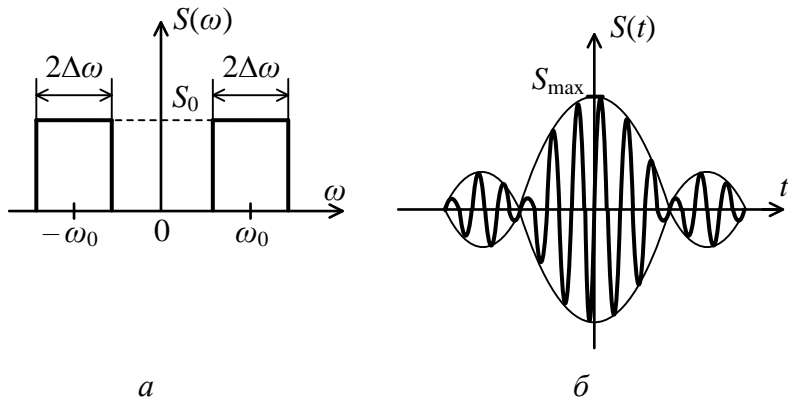


Рисунок 10.1

Оцінимо величини деяких параметрів сигналів з обмеженим спектром. Як впливає з формул: (6.2) для низькочастотного і (10.2) для смугового сигналів, амплітудні значення їх прямо пропорційні ширині їх смуги. Зменшення смуги частот сигналу приводить до того, що ці сигнали (або їх обвідні) змінюються у часі щоразу повільніше.

Якщо  $s(t)$  – сигнал, спектр якого відрізняється від нуля лише в інтервалі частот  $-\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$ , то енергія сигналу обмежується величиною [4]:

$$E_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega \leq \frac{\omega_B}{\pi} S_{\max}^2, \quad (10.3)$$

де  $S_{\max}$  – максимальне значення модуля спектральної щільності.

Амплітуда сигналу (обвідної) обмежується величиною [4]:

$$S_{max} \leq \frac{\omega_B}{\pi} S_{max}. \quad (10.4)$$

Похідна сигналу  $s(t)$  обмежується величиною [4]:

$$\left| \frac{ds}{dt} \right|_{max} \leq \frac{\omega_B^2}{\pi} S_{max}. \quad (10.5)$$

Із (10.5) очевидно, що чим вужчим є спектр, тим повільніше у часі змінюється сигнал.

*Ортогональні сигнали з обмеженим спектром.* Розглянемо два ідеальних НЧ-сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$ . Обидва сигнали мають однакові параметри  $S_0$  і  $\omega_B$ , причому сигнал  $v(t)$  запізнюється відносно  $u(t)$  на час  $t_0$ , тоді  $S_v(\omega) = S_u(\omega)e^{-j\omega t_0}$ . Скалярний добуток цих сигналів

$$(u, v) = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t_0}{\omega_B t_0}. \quad (10.6)$$

Цей добуток дорівнює нулю, тобто сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$  є ортогональними у разі, коли зсув між ними у часі

$$\omega_B t_0 = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.7)$$

Мінімально можливим є зсув при  $k = \pm 1$ , а відтак він становить

$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_B} = \pm \frac{1}{2f_B}. \quad (10.8)$$

Графіки сигналів показані на рисунку 10.2:

а – при  $t_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$ ; б – при  $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

У той момент часу, коли один із сигналів досягає максимуму, інший – проходить через нуль.

Функції  $u(t)$  і  $v(t)$  утворюють нескінченний *ортогональний базис*, спроможний служити координатною системою для розкладення в ряд довільного сигналу, спектр якого обмежений частотою  $\omega_B$ .

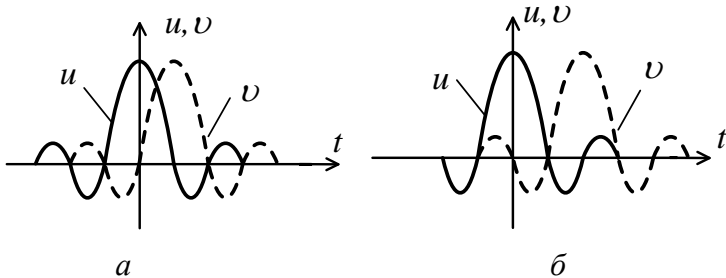


Рисунок 10.2

*Вузькосмугові сигнали.* Це різновид сигналів з обмеженим спектром, а саме такі сигнали, що постають на виході частотно-селективних кіл і пристроїв (наприклад, коливальних контурів). Сигнал є вузькосмуговим, коли його спектральна щільність є відмінною від нуля лише в межах частотних інтервалів шириною  $\Pi$ , що утворюють околиці точок  $\pm\omega_0$ . При цьому повинна виконуватися умова  $\Pi/\omega_0 \ll 1$ . Частоту  $\omega_0 \neq 0$  називають *опірною частотою* сигналу, і вона не завжди є центральною частотою спектра.

Вузькосмугові сигнали є квазігармонічними, їх амплітуда (обвідна) і частота взагалі повільно змінюються у часі. Прикладом вузькосмугового сигналу є сигнал, спектри і часова діаграма якого зображені на рисунку 10.3.

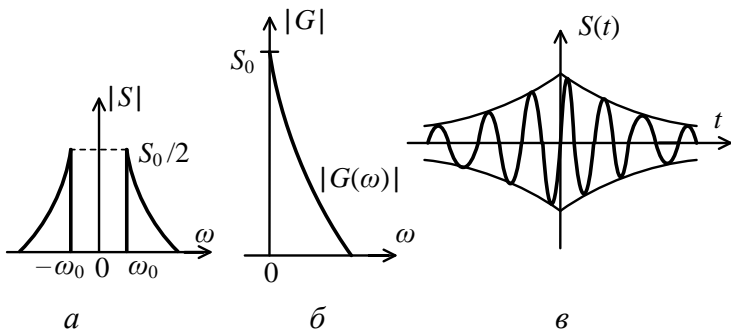


Рисунок 10.3

На рисунку 10.3 а показана спектральна щільність сигналу, несиметрична відносно частоти  $\omega_0$ :

$$S(\omega)|_{\omega > 0} = \begin{cases} \frac{S_0}{2} e^{-b(\omega - \omega_0)}, & \omega > \omega_0, \\ 0, & 0 < \omega < \omega_0. \end{cases}$$

На рисунку 10.3 б наведена спектральна щільність комплексної обвідної:

$$G(\omega) = \begin{cases} S_0 e^{-b\omega}, & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

На рисунку 10.3 в зображена часова діаграма сигналу; це симетричний радіоімпульс із несталою у часі частотою заповнення [4].

Відтак спектр вузькосмугового сигналу можна одержати із спектра його комплексної обвідної шляхом перенесення останнього на величину опорної частоти  $\omega_0$ .

### **2 Теорема Котельникова та деякі наслідки з неї**

Вище було зазначено, що будь-які два сигнали з обмеженим спектром ((6.2) або (10.2)), що належать до множини

$$r_k(t) = A \frac{\sin \omega_B(t - k\pi/\omega_B)}{\omega_B(t - k\pi/\omega_B)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10.9)$$

є ортогональними. Шляхом відповідного вибору амплітудного множника  $A$  можна досягти того, щоб норма кожного із сигналів стала одиничною. Внаслідок цього вибудовується *ортонормований базис* (система векторів у просторі сигналів, попарно ортогональних і одиничних за нормою [4]). Цей базис дозволяє розкласти довільний сигнал з обмеженим спектром в узагальнений ряд Фур'є. Якщо  $s(t)$  – довільний сигнал, спектральна щільність якого відмінна від нуля лише в інтервалі частот  $-\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$ , то його можна

розкласти в узагальнений ряд Фур'є за базисом Котельникова, тобто подати у вигляді

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t, \omega_B). \quad (10.10)$$

Суму (10.10) називають *рядом Котельникова*. В ній множина функцій

$$u_k(t, \omega_B) = \sqrt{\frac{\omega_B}{\pi}} \frac{\sin \omega_B(t - \frac{k\pi}{\omega_B})}{\omega_B(t - \frac{k\pi}{\omega_B})} \quad (10.11)$$

утворює так званий ортонормований базис Котельникова у лінійному просторі НЧ-сигналів із частотами, обмеженими зверху величиною  $\omega_B$ . Окрему функцію  $u_k(t, \omega_B)$  називають *k-ю відліковою функцією*. Коефіцієнтами цього ряду служать скалярні добутки сигналу, що розкладається, і *k*-ї відлікової функції

$$c_k = (s(t), u_k(t, \omega_B)). \quad (10.12)$$

Для розрахунку коефіцієнтів  $c_k$  застосовують узагальнену формулу Релея (3.5). Із порівняння формул (6.2) і (10.11) випливає, що *k*-та відлікова функція в межах інтервалу  $-\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$  має спектральну щільність  $\sqrt{\frac{\pi}{\omega_B}} e^{-j\omega k\pi/\omega_B}$ .

Тоді якщо  $S(\omega)$  – спектр досліджуваного сигналу  $s(t)$ , то

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_B}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{j\frac{k\pi\omega}{\omega_B}} d\omega \right\}. \quad (10.13)$$

У фігурних дужках виразу (10.13) маємо миттєве значення сигналу  $s(t_k) = s_k$  у *k*-й відліковій точці  $t_k = \frac{k\pi}{\omega_B} = \frac{k}{2f_B}$ .

Таким чином,  $c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_B}} s_k$ , і тоді остаточно для ряду Котельникова одержимо

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{\sin \omega_B(t - \frac{k\pi}{\omega_B})}{\omega_B(t - \frac{k\pi}{\omega_B})}. \quad (10.14)$$

Теорема Котельникова на підставі формули (10.14) стверджує: довільний сигнал, спектр якого не містить частот вище ніж  $f_B$  [Гц], може бути цілком відтворений, якщо відомі відлікові значення цього сигналу, взяті через рівні проміжки часу  $1/2f_B$  [с].

**Приклад.** Нехай дано сигнал  $s(t) = \cos \omega_B t$ .

Ряд Котельникова для сигналу

$$\cos \omega t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sin \omega(t - \frac{2k\pi}{\omega})}{\omega(t - \frac{2k\pi}{\omega})} - \frac{\sin \omega(t - \frac{(2k+1)\pi}{\omega})}{\omega(t - \frac{(2k+1)\pi}{\omega})} \right].$$

Значення сигналу у відлікових точках

$$s_k = \cos(\omega_B t_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Відтак гармонічне коливання з найвищою частотою, яка допускається теоремою Котельникова, описується двома відліками, що випадають на кожний період – рівними за модулем, але знакозмінними (рис. 10.4 а). Коли ж умови теореми Котельникова порушуються, і відліки у часі беруться недосить часто, то при відтворенні сигналу за формулою (10.14) виникає похибка, іноді досить істотна (рис. 10.4 б).

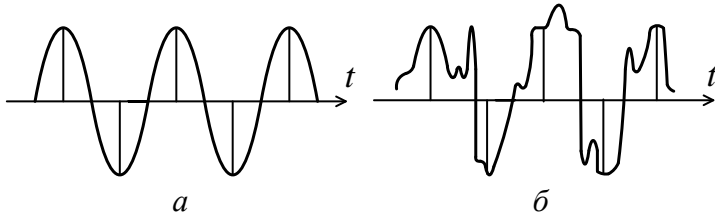


Рисунок 10.4

Ряд Котельникова можна застосувати і для наближеного опису сигналів із необмеженим спектром за умови, що більшість енергії таких сигналів зосереджена у низькочастотній області.

Наприклад, прямокутний імпульс з одиничною амплітудою і тривалістю  $\tau_u$  хоч і не належить до сигналів з обмеженим спектром, але може бути приблизно описаний:

а) двома відліками, тобто членами ряду (10.14) на початку і в кінці імпульсу, коли у спектрі враховуються всі гармоніки до  $\omega_B = \pi/\tau_u$  (рис. 10.5 а);

б) трьома рівновіддаленими відліками через  $\tau_u/2$ , коли у спектрі ураховуються всі гармоніки до  $\omega_B = 2\pi/\tau_u$  (рис. 10.5 б).

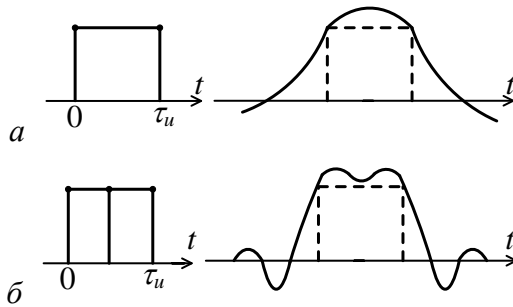


Рисунок 10.5

Природно, зі збільшенням числа ураховуваних членів, тобто зі зменшенням часового інтервалу, між вибірками точність апроксимації зростає.

### 3 Вузькосмугові випадкові процеси

У царині випадкових сигналів важливу роль відіграє особливий клас випадкових процесів, які характеризуються тим, що їх енергетичний спектр має різко виражений максимум поблизу певної відмінної від нуля частоти (рис. 10.6). Такими процесами є здебільшого гаусові процеси, які мають важливе значення для практики. Розглянемо кореляційні

властивості вузькосмугових ВП. Нехай маємо ВП  $X(t)$ , однобічний енергетичний спектр якого  $F(\omega)$  зосереджується в околі довільно вибраної частоти  $\omega_0$ .

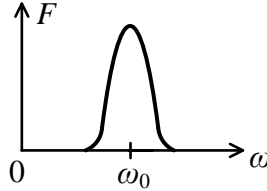


Рисунок 10.6

За теоремою Хінчіна, АКФ досліджуваного процесу

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (10.15)$$

Уявно змістимо спектр процесу з околу частоти  $\omega_0$  до околу нульової частоти, здійснивши заміну змінної

$$\omega = \omega_0 + \Omega.$$

Тоді формула (10.15) набере такого вигляду:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega) \cos[(\omega_0 + \Omega)\tau] d\Omega. \quad (10.16)$$

Позаяк ВП  $X(t)$  – вузькосмуговий, то його енергетичний спектр  $F(\omega)$  нескінченно малий на частотах поблизу нуля. Тому в (10.16) можна з високою точністю замінити нижню межу інтегрування на  $-\infty$  і записати АКФ у вигляді

$$K(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau - b(\tau) \sin \omega_0 \tau, \quad (10.17)$$

$$\text{де } a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega \tau d\Omega,$$

$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega \tau d\Omega$  – повільно змінні функції аргументу  $\tau$ ;

$a(\tau)$  – парна;  $b(\tau)$  – непарна.

Особливо наочною і простою є АКФ, коли  $F(\omega)$  є симетричним щодо своєї центральної частоти  $\omega_0$ . При цьому  $b(\tau) = 0$ , відтак,



$$K(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (10.18)$$

Коефіцієнт  $a(\tau)$  відіграє роль обвідної, що змінюється повільно порівняно з множником  $\cos \omega_0 \tau$ . Іноді буває зручним упровадити *нормовану обвідну*  $\rho(\tau)$  для АКФ вузькосмугового процесу, визначивши її так:

$$a(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau).$$

Тоді АКФ вузькосмугового ВП  $X(t)$  (рис. 10.7):

$$K(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (10.19)$$

Із (10.19) випливає, що окремі реалізації вузькосмугового ВП являють собою квазігармонічні коливання вигляду

$$x(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (10.20)$$

де  $U(t)$  – обвідна і  $\varphi(t)$  – початкова фаза є повільно змінними випадковими функціями.

Наведемо деякі статистичні характеристики вузькосмугового процесу  $X(t)$ :

– щільність імовірності фази  $p(\varphi) = 1/2\pi$  – рівномірний закон розподілу. Це означає, що переважне значення початкової фази у окремих реалізацій відсутнє;

– щільність імовірності величини обвідної

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} - \text{закон Релея (рис. 10.8)}.$$

Із рисунка 10.8 випливає, що найбільш імовірні величини обвідної  $U = \sigma_x$ , а малоймовірними є величини  $U \approx 0$  і  $U \gg \sigma_x$ ;

– коефіцієнт кореляції обвідної

$$R_U(\tau) = 0,915\rho^2(\tau) + 0,058\rho^4(\tau) + \dots$$

Приблизно вважаємо, що коефіцієнт кореляції обвідної просто дорівнює квадрату обвідної АКФ  $\rho(\tau)$  вузькосмугового сигналу;

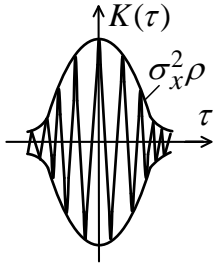


Рисунок 10.7

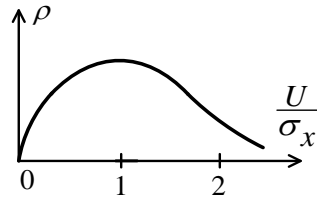


Рисунок 10.8

– обвідна суми гармонічного сигналу  $U_m \cos \omega_0 t$  і вузькосмугового гаусового шуму розподілена за законом Райса (рис. 10.9):

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} \exp \left[ -\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma_x^2} \right] I_0 \left[ \frac{UU_m}{\sigma_x^2} \right].$$

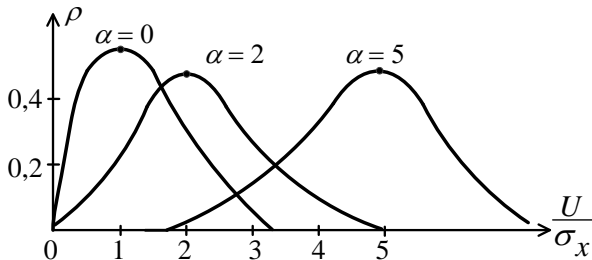


Рисунок 10.9

На рисунку 10.9  $\alpha = \frac{U}{\sigma_x}$  – відношення сигнал/шум.

При  $\alpha = 0$  сигнал відсутній – закон Релея.

При  $\alpha > 3$  спостерігається нормалізація розподілу величини обвідної.

## Лекція 11

### Перетворення характеристик випадкового процесу у лінійному колі

1 Спектральний аналіз проходження випадкових сигналів через лінійні стаціонарні кола: постановка завдання.

2 Середнє значення вихідного сигналу.

3 Автокореляційна функція та енергетичний спектр випадкового сигналу на виході системи.

4 Проходження випадкових сигналів із широким спектром. Шумова смуга кола.

5 Нормалізація випадкового сигналу на виході лінійного кола.

#### 1 Спектральний аналіз проходження випадкових сигналів через лінійні стаціонарні кола: постановка завдання

Нехай на вхід лінійного стаціонарного кола надходить коливання  $x(t)$ , яке є певною реалізацією ВП  $X(t)$ .

Цю реалізацію можна вважати детермінованим сигналом, бо вона зазначена заздалегідь [4, 6], а відтак аналіз проходження її через лінійні кола не несе із собою принципової новизни порівняно, наприклад, з аналізом, проведеним у лекції 5. Знання математичної моделі кола (системи), яка визначається, наприклад, комплексною передавальною функцією  $K(j\omega)$ , дозволяє завжди знайти вихідну реакцію  $y(t)$ .

Втім, специфіка статистичної теорії полягає в тому, що така повна інформація про вхідний сигнал недоступна; замість детермінованого опису вхідного сигналу ми володіємо лише відомостями про усереднені статистичні характеристики ВП  $X(t)$ . Такими характеристиками можуть бути одновимірні і багатовимірні щільності імовірності, а також різні моменти функції (МО, АКФ тощо). Наша мета – дослідження зв'язку між властивостями вхідного  $X(t)$  і вихідного  $Y(t)$  процесів через комплексну функцію  $K(j\omega)$  системи.

З огляду на вимоги простоти і стислості викладення будемо аналізувати проходження випадкових сигналів через лінійні кола, беручи ці сигнали як стаціонарні у широкому сенсі ВП із нульовим середнім значенням  $\bar{x} = 0$ . Цей висновок аж ніяк не обмежує загальності міркувань і висновків, запропонованих нижче.

### **2 Середнє значення вихідного сигналу**

Розглянемо окрему взятую реалізацію вхідного сигналу  $x(t)$  і подамо його у вигляді інтегралу Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Тут і далі припустимо, що спектральні щільності реалізацій вхідного сигналу явно існують принаймні у формі узагальнених функцій.

Вихідний сигнал системи знаходимо, якщо відома її комплексна передавальна функція  $K(j\omega)$ :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.1)$$

Перейдемо від окремої вхідної реалізації до повного ансамблю вхідних реалізацій ВП. Вважаємо, що  $S_x(j\omega)$  – випадкова функція, а позаяк  $X(t)$  – це стаціонарний ВП, то його МО, як свідчить формула (9.11),  $\overline{S_x(j\omega)} = 0$ . Тому, здійснюючи статистичне усереднення в обох частинах рівності (11.1), одержуємо

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(j\omega)} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = 0. \quad (11.2)$$

### **3 Автокореляційна функція та енергетичний спектр випадкового сигналу на виході системи**

Для знаходження АКФ на виході системи потрібно, крім спектрального розкладання (11.1), мати ще вираз вихідного сигналу в момент часу  $t + \tau$ .

Це можна зробити на основі теореми про зсув перетворення Фур'є:

$$y(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega') K(j\omega') e^{j\omega'\tau} e^{j\omega't} d\omega'. \quad (11.3)$$

Функція  $y(t)$  – дійсна, і тому формула (11.3) не зміниться, якщо в її правій частині перейти до комплексно-спряжених величин:

$$y(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(j\omega') K^*(j\omega) e^{-j\omega'\tau} e^{-j\omega't} d\omega. \quad (11.4)$$

АКФ вихідного сигналу знайдемо через перемноження сигналів (11.1) і (11.4) і статистичне усереднення добутку:

$$K_y(\tau) = \overline{y(t)y(t + \tau)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) S_x^*(j\omega') K(j\omega) \times \\ \times K^*(j\omega') e^{-j\omega'\tau} e^{-j(\omega - \omega')t} d\omega d\omega'. \quad (11.5)$$

Оскільки вхідний ВП  $X(t)$  – стаціонарний, то окремі його реалізації мають дельта-корельовані спектральні щільності (див. (9.15)).

$$\overline{S_x(j\omega) S_x^*(j\omega')} = 2\pi W_x(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (11.6)$$

де  $W_x(\omega)$  – енергетичний спектр СВП  $X(t)$ . Ця чудова властивість структури спектра вхідного сигналу дозволяє істотно спростити формулу (11.5):

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (11.7)$$

Ця рівність є повним розв'язком поставленого завдання в рамках кореляційної теорії: енергетичний спектр вихідного випадкового сигналу зв'язаний з аналогічним спектром сигналу на вході за допомогою відношення

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) |K(j\omega)|^2. \quad (11.8)$$

У практичних розрахунках часто застосовують однобічні енергетичні спектри (лекція 9)  $F_x(f)$  і  $F_y(f)$ , які

визначені лише на додатних частотах  $f$ , що вимірюються у герцах. Очевидно, що

$$F_y(f) = F_x(f)|K(j2\pi f)|^2, \quad (11.9)$$

і тому дисперсія вихідного сигналу

$$\sigma_y^2 = K_y(0) = \int_0^\infty F_x(f)|K(j2\pi f)|^2 df \quad (11.10)$$

є сумою внесків від енергетичного спектра вхідного сигналу, помножених на частотнозалежний квадрат модуля коефіцієнта передачі (частотний коефіцієнт передавання потужності).

Розглянемо ряд прикладів аналізу проходження СВП через лінійні кола.

**Приклад 1.** Нехай на інтегрувальне  $rC$ -коло (рис. 11.1) діє стаціонарний ВП у вигляді білого шуму (БШ) з постійним на всіх частотах енергетичним спектром  $W_0$  ( $B^2 \cdot c$ ). Визначити дисперсію і АКФ вихідної напруги  $y(t)$ .

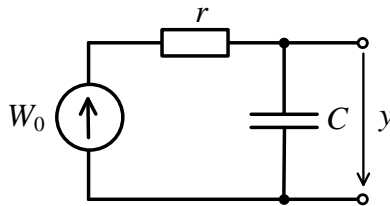


Рисунок 11.1

◀ Коефіцієнт передавання потужності кола:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2(rC)^2},$$

де  $rC$  – стала часу.

Дисперсію вихідного сигналу знаходимо за (11.7) при  $\tau = 0$ :

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2(rC)^2} = \frac{W_0}{2rC}.$$

Дисперсія вихідного сигналу зменшується при збільшенні інерційності (сталого часу  $rC$ ) кола, бо зменшується смуга частот, що ефективно пропускається колом.

$$\text{АКФ кола } K_y(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{1 + \omega^2(rC)^2} = \frac{W_0}{2rC} e^{-\frac{|\tau|}{rC}}.$$

Отже, при збудженні інтегрувального  $rC$ -кола білим шумом ми одержуємо на виході ВП з АКФ експоненційного типу (рис. 11.2).

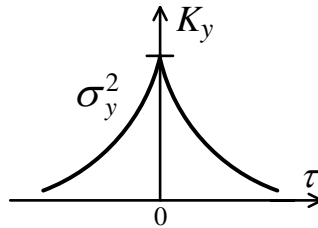


Рисунок 11.2

Інтегрувальне коло за рахунок своїх інерційних властивостей здійснює певне «упорядкування»: якщо БШ на вході є абсолютно не прогнозованим, то вихідний сигнал кола є згладженим; його інтервал кореляції має порядок сталого часу кола. ►

**Приклад 2.** Нехай джерело ЕРС вигляду БШ із заданим однобічним енергетичним спектром  $F_0(B^2/\Gamma\omega)$  збуджує вхід резонансного підсилювача з коефіцієнтом підсилення на резонансі  $K_{\text{рез}}$ . Визначити дисперсію і АКФ вихідного сигналу.

◄ Хід розв'язування аналогічний до попереднього прикладу.

Коефіцієнт передавання потужності

$$|K(j2\pi f)|^2 = \frac{K_{\text{рез}}^2}{1 + 4\pi^2 \tau_k^2 (f - f_{\text{рез}})^2}.$$

Дисперсія вихідного сигналу

$$\sigma_y^2 = F_0 K_{\text{рез}}^2 \int_0^\infty \frac{df}{1+4\pi^2\tau_k^2(f-f_{\text{рез}})^2} = \frac{F_0 K_{\text{рез}}^2}{2\tau_k}.$$

АКФ сигналу на виході

$$K_y(\tau) = \frac{F_0 K_{\text{рез}}^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega \tau d\omega}{1+\tau_k^2(\omega - \omega_{\text{рез}})^2} \approx \frac{F_0 K_{\text{рез}}^2}{2\tau_k} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_k}} \cos \omega_{\text{рез}} \tau.$$

Одержана АКФ має вигляд

$$K_y(\tau) = \sigma_y^2 \rho(\tau) \cos \omega_{\text{рез}} \tau,$$

властивий вузькосмуговому ВП: обвідна  $\rho(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_k}$  є повільною функцією порівняно з ВЧ заповненням (рис. 11.3 а). Будь-яка реалізація випадкового сигналу на виході підсилювача є квазігармонічним коливанням із випадковими обвідною і миттєвою частотою. Адже цей сигнал є сумою величезної кількості елементарних реакцій, кожна з яких пропорційна імпульсній характеристиці системи (принцип інтеграла Дюамеля) – рисунок 11.3 б. ►

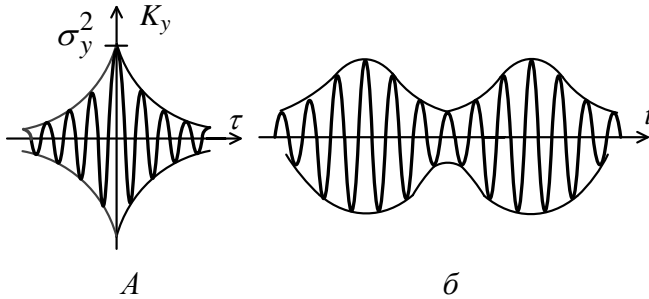


Рисунок 11.3

**Приклад 3.** Дано коло, утворене двома  $rC$ -ланками, між якими увімкнений ідеальний підсилювач із коефіцієнтом підсилення  $K_0$ .



На вході кола діє генератор БШ. Визначити АКФ вихідного сигналу кола (рис. 11.4).

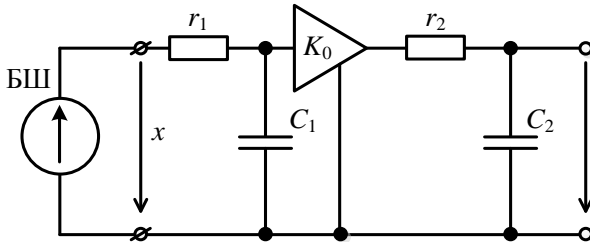


Рисунок 11.4

◀ Коефіцієнт передавання потужності

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{K_0^2}{(1+\omega^2\tau_1^2)(1+\omega^2\tau_2^2)}.$$

Відповідно до (11.7) АКФ вихідної напруги

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \frac{W_0 K_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{(1+\omega^2\tau_1^2)(1+\omega^2\tau_2^2)} = \\ &= \frac{W_0 K_0^2}{2(\tau_1^2 - \tau_2^2)} \left( \tau_1 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_2}} \right). \end{aligned}$$

Дисперсія сигналу

$$\sigma_y^2 = K_y(0) = \frac{W_0 K_0^2}{2(\tau_1 + \tau_2)},$$

а відтак коефіцієнт кореляції

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_1 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_2}} \right).$$

На рисунку 11.5 зображені коефіцієнти кореляції сигналу на виході однієї ланки  $r_1 C_1$  зі сталою часу  $\tau_1$  (крива 1), а також на виході всієї схеми (рис. 11.4) при

$\tau_2 = \tau_1/2$  (крива 2) і при  $\tau_1 = \tau_2$  (крива 3), де  $\tau_2 = r_2C_2$  – стала часу другої ланки. Із рисунка 11.5 бачимо, що при доданні другої інерційної ланки інтервал кореляції сигналу  $\tau_k$  зростає. Зменшення при цьому ефективної ширини спектра приводить до того, що реалізація сигналу на виході однієї  $rC$ -ланки (рис. 11.6 а) має характер зміни з більшою швидкістю (хаотичністю), ніж реалізація сигналу на виході послідовного з'єднання обох ланок (рис. 11.6 б). ►

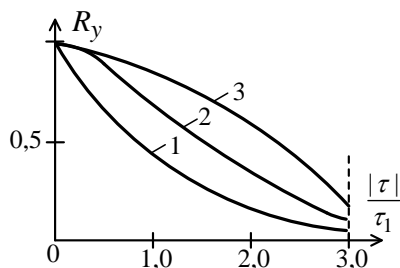


Рисунок 11.5

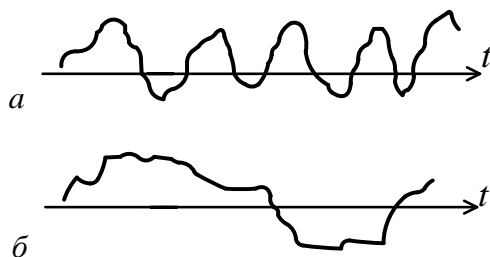


Рисунок 11.6

#### **4 Проходження випадкових сигналів із широким спектром. Шумова смуга кола**

На лінійні стаціонарні кола можуть діяти широкосмугові випадкові сигнали (наприклад, хаотична послідовність коротких імпульсів). При цьому доцільно враховувати спектральні характеристики шуму лише в

межах смуги пропускання системи, замінюючи реальний ВП еквівалентним щодо нього БШ з однобічним енергетичним спектром  $F_0 = F_x(f_0)$ , де  $f_0$  – певна частота в межах смуги пропускання кола. При цьому формула (11.10), що визначає вихідну дисперсію, спроститься:

$$\sigma_y^2 = F_0 \int_0^\infty |K(j2\pi f)|^2 df. \quad (11.11)$$

У практичних розрахунках лінійне коло, що зазнає дії широкосмугового сигналу, характеризується *шумовою смугою пропускання*  $\Pi_{ш}$  [Гц]. Вона визначається як смуга пропускання ідеального смугового фільтра з коефіцієнтом передавання  $K_{max}$  – максимальним за модулем коефіцієнтом передавання реального кола; при збудженні ідеального фільтра білим шумом з енергетичним спектром  $F_0$  дисперсії шумових сигналів на виходах ідеального і реального кіл повинні збігатися:

$$F_0 \int_0^\infty |K(j2\pi f)|^2 df = F_0 K_{max}^2 \Pi_{ш}, \quad (11.12)$$

звідки

$$\Pi_{ш} = \frac{1}{K_{max}^2} \int_0^\infty |K(j2\pi f)|^2 df. \quad (11.13)$$

Наприклад, для інтегрувального  $rC$ -кола

$$K_{max} = 1; |K(j2\pi f)|^2 = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2 (rC)^2},$$

і тому

$$\Pi_{ш} = \int_0^\infty \frac{df}{1+4\pi^2 f^2 (rC)^2} = \frac{1}{4rC}. \quad (11.14)$$

Зауважимо, що для цієї системи модуль частотного коефіцієнта передавання зменшується в  $\sqrt{2}$  разів щодо максимального значення на частоті  $f_{0,707} = 1/2\pi rC$ . Тому шумова смуга пропускання є ширшою за смугу  $\Pi_{0,707}$ :

$$P_{ш}/P_{0,707} = \pi/2 = 1,571.$$

Аналогічно знаходиться шумова смуга пропускання одноконтурного резонансного підсилювача:

$$P_{ш} = \int_0^{\infty} \frac{df}{1+4\pi^2\tau_k^2(f-f_{рез})^2} = \frac{1}{2\tau_k} = 1,571P_{0,707}. \quad (11.15)$$

### **5 Нормалізація випадкового сигналу на виході лінійного кола**

Досі всі вищерозглянуті задачі розв'язувалися в рамках кореляційної теорії, коли були відомі усереднені статистичні характеристики вхідного ВП  $X(t)$  (МО, дисперсія, АКФ). Втім, задача істотно ускладнюється, коли дається лише сім'я  $n$ -вимірних щільностей імовірності  $p_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  вхідного ВП, і при знанні комплексної функції передачі  $K(j\omega)$  потрібно визначити аналогічні щільності імовірності вихідного ВП. Однак для спрощення розв'язування задачі часто можна заздалегідь припускати гаусовий характер розподілу вихідного сигналу незалежно від того, який закон розподілу імовірності вхідного процесу.

Якщо ефективна тривалість імпульсної характеристики кола істотно перевищує інтервал кореляції вхідного ВП, то розрахунок інтегралу згортки

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

можна наближено вважати знаходженням суми великого числа некорельованих один з одним внесків від різних фрагментів сигналу  $x(t)$ . Відповідно до центральної граничної теореми (лекція 9) це означає, що розподіл імовірності вихідного ВП *нормалізується*, тобто наближається до гаусового незалежно від закону розподілу сигналу  $x(t)$ .

## Список літератури

1. Карташов Р. П. Теория электрорадиоцепей / Р. П. Карташов, А. П. Медведев. – Москва : Военное издательство МО СССР, 1980. – 496 с.
2. Атабеков Г. И. Основы теории цепей / Г. И. Атабеков. – Москва : Энергия, 1969. – 424 с.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебное пособие для вузов / И. С. Гоноровский. – Москва : Дрофа, 2006. – 719 с.
4. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник / С. И. Баскаков. – Москва : Высшая школа, 2000. – 462 с.
5. Френкс Л. Теория сигналов / Л. Франкс. – Москва : Сов. радио, 1974. – 344 с.
6. Иванов М. М. Радиотехнические цепи и сигналы / М. М. Иванов, А. Б. Сергиенко, В. Н. Ушаков. – Санкт-Петербург : Питер, 2014. – 336 с.
7. Баскаков С. И. Лекции по теории цепей : учебное пособие / С. И. Баскаков. – Москва : КомКнига, 2005. – 280 с.

Навчальне видання

**Кобяков** Олександр Миколайович,  
**Бражник** Ірина Євгенівна

**ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ.**  
**Теорія сигналів**

Конспект лекцій  
для студентів спеціальності  
172 «Телекомунікації та радіотехніка»  
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск А. С. Опанасюк  
Редактор Н. З. Клочко  
Комп'ютерне верстання І. Є. Бражник

Підписано до друку 16.03.2017, поз.  
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 7,21. Обл.-вид. арк. 5,44. Тираж 20 пр. Зам. №  
Собівартість видання      грн      к.

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.