ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія фізична. 2002. Вип.35. С.110-116 Ser.Physic. 2002. № 35. P.110-116

УДК 535.8
PACS number(s): 42.60.Rn , 42.55.Rz

АНАЛІЗ МОДИФІКОВАНИХ БАЛАНСНИХ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ ТВЕРДОТІЛЬНИХ ЛАЗЕРІВ

С. Коломієць

Сумський національний аграрний університет
кафедра вищої математики і фізики
вул. Кірова, 160, 40021, Суми, Україна
e–mail: s_kolomiets@mail.ru

Розглянуто модель динаміки твердотільного лазера напів-класичного типу, режим генерації гігантських імпульсів за наявності як модулятора добротності, так і квадратично–нелінійного елемента. Виявлено ефекти, зумовлені врахуванням поправок у динамічних рівняннях лазерів, порівняно з класичною моделлю Статца–Демарса.

Ключові слова: модулятор добротності, гігантські імпульси, квадратично–нелінійний елемент.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь [1] :

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx\left(y\phi^{-1}(y) - 1\right) \equiv f(x,y); \\ \dot{y} = \left(A - y - xy\phi^{-1}(y)\right), \end{cases} \tag{1}$$

де $\phi(y) = 1 + \varepsilon(1 - y) + \gamma^2\delta$, $\delta = (1+\varepsilon)^{-1}$, ε – відношення констант релаксацій поля і поляризації атомної системи; A – параметр накачування; $\gamma = (\omega_0 - \omega_c)\upsilon_a^{-1}$; υ_a – швидкість релаксації поляризації атомної системи; G – великий параметр в теорії лазерів класу B [1]: x – нормована інтенсивність поля випромінювання фотонів; y – нормована різниця заселення рівнів.

Система (1) одержана зі складнішої шляхом адіабатного вилучення трьох швидких фазових координат, тому вона справджується в разі виконання певних співвідношень між параметрами системи. Зокрема, повинні виконуватись нерівності: $\upsilon_a >> \upsilon_i$, $\upsilon_a >> \upsilon_r$, де υ_i – швидкість релаксації інверсії; υ_r – швидкість загасання поля в резонаторі. Система, яку розглядаємо, переходить у систему рівнянь Статца–Демарса, коли знехтувати значенням ε як малим параметром, і коли центр спектральної лінії ω_0 збігається з власною частотою резонатора ω_c.

Системи (1) вивчають в околі стаціонарного розв’язку:

$$x_c = A - 1 - \gamma^2\delta^2 ; y_c = 1 + \gamma^2\delta^2 .$$

Матриця Якобі правих частин системи, обчислена в стаціонарному розв'язку, має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} 0 & GR \\ -1 & -(1+R) \end{pmatrix}; \quad R = \frac{x_c(1+\varepsilon)}{y_c},$$

а корені її характеристичного рівняння

$$2\lambda_{1,2} = -(1+R) \pm \left((1+R)^2 - 4GR\right)^{1/2}.$$

Оскільки x_c, y_c додатні, а число G для твердотільних лазерів класу B досягає 10^5, то особливою точкою для них практично завжди є стійкий фокус, що збігається з класичною моделлю лазера такого самого типу. Однак якщо в останньому випадку декремент і частота коливань мали, відповідно, значення

$$d = -\frac{A}{2}; \quad \omega \approx \sqrt{G(A-1)},$$

то для моделі, яку розглядаємо, ці величини є такими:

$$d = -\frac{1}{2}\left(\frac{A(1+\varepsilon)^2}{\rho} - \varepsilon\right); \quad \omega \approx \left(G\left(\frac{A(1+\varepsilon)}{\rho} - 1\right)(1+\varepsilon)\right)^{1/2}; \quad \rho = 1 + \varepsilon + \gamma^2\delta.$$

Оскільки x_c, y_c завжди більші від нуля, то дійсна частина комплексних коренів не може перетворитись у нуль, звідки випливає, що коливання будуть загасальними, і біфуркація Хопфа неможлива. Таку саму властивість має і класична модель лазера Статца – Демарса [2]. Отже, врахування величин ε і γ не змінює фазового портрета системи, а лише впливає на деякі її параметри. Можна довести, що для неї виконуються всі умови теореми де Баггіса [3], тому вона належить до структурно стійких, що є необхідною умовою адекватності моделі фізичному явищу.

Проаналізуємо режим генерації гігантських імпульсів у системі (1). Як відомо, під час випромінювання гігантських імпульсів можна знехтувати процесом релаксації і накачування з огляду на незначну тривалість генерації порівняно з часом релаксації T_1 [2]. Тоді друге рівняння системи (1) набуває вигляду

$$\dot{y} = -xy\phi^{-1}(y). \tag{2}$$

З фізичного боку це означає, що в системі (1) діє модулятор добротності резонатора, який залежить лише від часу і вмикається за законом одиничної функції Хевісайда. Ділення першого рівняння системи (1) на рівняння (2) й інтегрування результату ділення дає інтенсивність потоку фотонів як функції y – щільності різниці заселення рівнів, або інакше, інверсії

$$x = x_1 + G\left((1+\varepsilon)(y_1 - y) - \rho \ln\frac{y_1}{y}\right), \tag{3}$$

де x_1 – початкове значення інтенсивності, яке далі не буде враховуване із-за його малості порівняно з наступним доданком; y_1 – максимальна щільність інверсії, досягнута перед початком формування імпульсу.

Розглянемо деякі характеристики імпульсу (3) і вплив на нього факторів ε і γ. Максимальне значення x є при y_0, що визначене першим рівнянням системи (1), якщо в ньому прийняти $\dot{x}=0$: $y_0 = \dfrac{\rho}{1+\varepsilon} = y_c$. Тоді

$$x_{\max} = G\left(y\ (1+\varepsilon) - \rho - \rho \ln \frac{y\ (1+\varepsilon)}{\rho} \right). \tag{4}$$

Відповідний результат для класичної системи одержують з попереднього при $\varepsilon = \gamma = 0, \rho = 1$, він має значення $x_{\max} = G(y_1 - 1 - \ln y_1)$. Тому приріст максимального значення $x_{\max}$

$$\Delta x_{\max} = G\left(\varepsilon(y_1 - 1) - \gamma^2 \delta - \left(\varepsilon + \gamma^2 \delta\right) \ln y_1 - \rho \ln \frac{\rho}{1+\varepsilon} \right). \tag{5}$$

З класичної моделі випливає, що для існування імпульсу необхідне виконання нерівності $y_1 > 1$. Для моделі, яку розглядаємо, відповідна нерівність узагальнювана, її можна бути записати з залежності (4). Оскільки $\dfrac{\rho}{1+\varepsilon} > 1$, то з залежності (5) випливає критерій додатності приросту $\Delta x_{\max}$.

Мінімальне значення y_k, яке відповідає припиненню генерації, відшукують з рівняння (3), якщо в ньому прийняти $x = 0$:

$$y_k - S \ln y_k = y_1 - S \ln y_1; \quad S = \frac{\rho}{1+\varepsilon}. \tag{6}$$

Легко бачити, що рівняння (6) має корінь $y_k = y_1$, який відповідає початку генерації. Існування другого кореня випливає з геометричних міркувань, як точка перетину прямої і логарифмічної кривої, і з фізичною очевидністю їхнього перетину. Для визначення характеру впливу параметрів y_1 і S на значення y_k доцільно знайти частинні коефіцієнти чутливості, розглядаючи y_k як неявно задану функцію параметрів y_1 і S та знаходячи її частинні похідні:

$$\frac{\partial y_k}{\partial y_1} = \frac{(y_1 - S) y_k}{(y_k - S) y_1}. \tag{7}$$

Оскільки $y_k < S = y_0$, то знаменник від'ємний, а чисельник додатний, бо y – максимальне значення інверсії на початку генерації. Отже, похідна від'ємна: збільшення y веде до зменшення y_k, що характерно для класичної моделі і підтверджене експериментально. Знайшовши частинну похідну функції y_k за зміною S, отримаємо

$$\frac{\partial y_k}{\partial S} = \frac{y_k \left(\ln y_k - \ln y_1\right)}{y_k - S} > 0, \tag{8}$$

бо як чисельник, так і знаменник від'ємні. Отже, зростання S приводить до зростання y_k, що може зумовити скорочення тривалості імпульсу. Оскільки зростання y_1 зменшує y_k, то постає питання: як впливає збільшення параметра S

на швидкість зменшення y_k – прискорює чи сповільнює? Відповідь можна одержати, знайшовши мішаний коефіцієнт чутливості:

$$\frac{\partial^2 y_k}{\partial y_1 \partial S} = \frac{y_k N(S)}{y_1 (S - y_k)^3}; \; N(S) = S(S - y_1) \ln \frac{y_1}{y_k} + Sy_1 - Sy_k - y_k (y_1 - y_k) .$$

Знак похідної визначений $N(S)$, бо в межах прийнятих припущень щодо параметрів моделі $S \approx 1, y_k < 1$ для y_1 можна прийняти інтервал $(3; 5)$. Тоді в типових випадках маємо $S(S - y_1) \ln \frac{y_1}{y_k} + Sy_1 < 0$. Отже, зростання S сповільнює зменшення y_k зі збільшенням y_1.

У праці [2] запропонована формула максимальної потужності гігантського імпульсу: $P_{\max} = Gx_{\max}$, яка в цьому випадку зводиться до залежності

$$P_{\max} = G^2 (1 + \varepsilon)\left(y_1 - S - S \ln \frac{y_1}{S} \right).$$

Звідси випливає, що зростання потужності можна досягти збільшенням y . Однак остання величина обмежена низкою факторів фізичного і технологічного походження. Тому доцільно розглянути інший підхід, узявши до уваги добротність Q резонатора, яка пов'язана з параметром G залежністю $G = T \frac{\omega}{Q}$, де ω – частота генерації; T – час релаксації різниці заселення рівнів. Тоді $P_{\max}$ запишемо у вигляді

$$P_{\max} = \frac{a^2}{Q^2}\left(Qb - S - S \ln \frac{Qb}{S} \right)(1 + \varepsilon) ,$$

де $a = T_1 \omega$; $b = B\hbar N_1$; $y_1 = B\hbar N_1 Q$; $\hbar$ – стала Планка; B – коефіцієнт Енштейна для вимушених переходів у каналі генерації; N_1 – розмірна максимальна щільність інверсного заселення. Оптимальне значення добротності визначають з рівняння

$$S - Qb + 2S \ln \frac{Qb}{S} = 0 .$$

Як і раніше, це рівняння в граничному випадку $S = 1$, $\varepsilon = 0$ переходить в аналогічне для класичної моделі [2].

Значення P можна використати для знаходження тривалості гігантського імпульсу за схемою, запропонованою в [2]: $t_1 = \frac{U}{P_{\max}}$, де U – енергія гігантського імпульсу. Використання згаданого підходу дає таке значення тривалості гігантського імпульсу:

$$t_1 = \frac{T(y_1 - y_k)}{(1 + \varepsilon) W}; \quad W = y_1 - S - S \ln \frac{y_1}{S} ,$$

де T – час існування фотонів у резонаторі.

Оскільки

$$\frac{\partial W}{\partial S} = -\ln\frac{y_1}{S} < 0\,,$$

то зростання параметра S приводить до зменшення W і, отже, до збільшення тривалості імпульсу, що знаходить елементарне фізичне обґрунтування, однак у цьому разі може збільшитись y_k, що, навпаки, зумовить деяке скорочення тривалості. Остаточний результат залежить від впливу кожного з факторів.

Далі розглянемо систему (1) за наявності як модулятора добротності, що забезпечує режим генерації гігантських імпульсів, так і квадратично–нелінійного елемента, який залежить від інтенсивності потоку фотонів і вводиться в резонатор для збільшення тривалості імпульсів або як квадратично–нелінійне навантаження у вигляді кристала, в якому відбувається генерація другої гармоніки, або з іншою метою [2, 4]. Крім того, для спрощення викладок приймають, що $\varepsilon = 0$. Система (1) за цих умов набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx(y\zeta - 1) - gx^2; \quad \zeta = \dfrac{1}{1+\gamma^2}; \\ \dot{y} = -xy\zeta. \end{cases} \tag{9}$$

Ділення першого рівняння на друге приводить до диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dy} = G\left(\frac{1}{y\zeta} - 1\right) + \frac{gx}{y\zeta}\,.$$

Інтегрування цього рівняння за початкових умов $x(y_1) = 0$ приводить до інтегралу

$$x(y) = G\left(F(y_1)\left(\frac{y}{y_1}\right)^{g/\zeta} - F(y)\right); \quad F(y) = \frac{y\zeta}{\zeta - g} + \frac{1}{g}\,. \tag{10}$$

Величина x досягає максимального значення при $y = y_c$, що знаходять з рівняння

$$F(y_1)\frac{g}{\zeta}\frac{y^{g/\zeta - 1}}{{y_1}^{g/\zeta}} = \frac{\zeta}{\zeta - g}; \quad \zeta \neq g\,.$$

Звідси

$$y_0 = y_1\left(\frac{g(\zeta - g)F(y_1)}{\zeta^2 y_1}\right)^{\frac{\zeta}{\zeta - g}}.$$

Тоді для $x_{\max}$ одержимо таке значення:

$$x_{\max} = \frac{G}{g}\left(\left(\frac{F(y_1)g(\zeta - g)}{y_1}\right)^{\frac{\zeta}{\zeta - g}} \cdot y_1 - 1\right). \tag{11}$$

Значення y_k, за якого припиняється генерація імпульсу, відшукують з (10), якщо прийняти $x = 0$, тобто з рівняння

$$F(y_1)z^{g/\zeta} - \frac{zy_1\zeta}{\zeta - g} - \frac{1}{g} = 0\,; \; z = \frac{y_k}{y_1}\,. \tag{12}$$

Як легко бачити, воно має розв'язок $z=1$, тобто $y_k = y_1$, що відповідає початку генерації. Зокрема, якщо показник $\frac{g}{\zeta}$ допускає раціональну апроксимацію $\frac{g}{\zeta}=\frac{n}{k}$, де n і k цілі, і, для визначеності, $n>k$, ζ близька до 1, але менша від одиниці і $(\zeta-g)$ від'ємна, то рівняння (12) доцільно переписати у вигляді:

$$\left(\frac{y_1\zeta}{g-\zeta}\right)\left(V^n-V^k\right)-\frac{1}{g}\left(V^n-1\right)=0;\quad V=z^{\frac{1}{k}}.$$

Ділення його лівої частини на $V-1$ приводить до рівняння

$$\left(\frac{y_1\zeta}{g-\zeta}-\frac{1}{g}\right)\sum_{r=n-1}^{k}V^r-\frac{1}{g}\sum_{\tau=k-1}^{0}V^\tau=0. \qquad (13)$$

Рівняння (13) має одну зміну знаків коефіцієнтів, тому за ознакою Декарта має один додатний корінь $V=z^{1/k}$. Звідси $z=V^k=\frac{y_k}{y_1}$, $y_k=y_1\cdot V^k$. Наприклад, якщо $y_1=5, \zeta=0{,}9, g=2{,}7, n=3, k=1$, то рівняння (13) набуває вигляду

$$\left(\frac{y_1\zeta}{g-\zeta}-\frac{1}{g}\right)\left(V^2+V\right)-\frac{1}{g}=0.$$

Для V одержимо таке значення:

$$V=\frac{1}{2}\left(-1+\left(1+\frac{4(g-\zeta)}{g\left(y_1\zeta-(g-\zeta)g^{-1}\right)}\right)^{1/2}\right)=0{,}151.$$

З вигляду рівняння (13) можна зробити висновок, що його додатний корінь буде зменшуватися зі зростанням y_1, що зафіксовано і для попередньої моделі. Використовуючи формули (11), (13), можна одержати низку інших висновків щодо параметрів гігантських імпульсів у моделі (9).

Загалом зазначимо, що врахування навіть незначних поправок у динамічних рівняннях лазерів приводить до помітних ефектів, які потребують вивчення математичними засобами і порівняння результатів з експериментальними даними.

1. *Ханин Я. И.* Основы динамики лазеров. М. 1999.
2. *Тарасов Л. В.* Физика процессов в генераторах когерентного оптического излучения. М. 1982.
3. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальних уравнений. М. 1961.
4. *Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В.* Прикладная линейная оптика. М. 1982.

ANALYSIS OF MODIFIED BALANCE EQUATIONS OF SOLID-STATE LASERS DYNAMICS

S. Kolomiets

Sumy National Agrarian University
Higher Mathematics and Physics Department
Kirov str., 160, 40021, Sumy, Ukraine
e–mail: s_kolomiets@mail.ru

The semi–classical model of solid–state lasers' dynamics and mode of giant pulses in the presence of Q– spoiler or quadratic–nonlinear element are considered. Influence of the corrections to equations of lasers' dynamics as compared with Stats–De Mars model is studied.

Key words: Q–spoiler, giant pulses, quadratic–nonlinear element.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.2002
Прийнята до друку 17.06.2002