ВАКУУМНА ТА ТВЕРДОТІЛЬНА ЕЛЕКТРОНІКА

УДК 535.8

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ ГЕНЕРАЦІЇ В ОДНОМОДОВИХ ЛАЗЕРАХ НА ТВЕРДОМУ ТІЛІ

Г.П.Коваленко, С.В.Коломієць

Сумський національний аграрний університет
160, вул. Кірова, Суми, 40021, Україна
E-mail: s_kolomiets@mail.ru

Методом біфуркації народження циклу досліджується динаміка напівкласичної моделі одномодового лазера на твердому тілі. Біфуркаційний аналіз проведено для квадратичної, кубічної і біквадратичної залежностей модулятора добротності від інтенсивності поля фотонів. Знайдено критерії стійкості періодичних коливань, що виникають внаслідок біфуркації Хопфа, побудовано інтервали стійкості для параметрів керування модулятора добротності. Табл. 2. Бібліогр.: 6 назв.
Ключові слова: модулятор добротності, граничний цикл, інтервал стійкості.

Методом бифуркации рождения цикла исследуется динамика полуклассической модели одномодового твердотельного лазера. Бифуркационный анализ проведен для квадратической, кубической и биквадратической зависимостей модулятора добротности от интенсивности поля фотонов. Получены критерии устойчивости предельных циклов, которые возникают вследствие бифуркации Хопфа, построены интервалы устойчивости для параметров управления модулятора добротности.
Ключевые слова: модулятор добротности, предельный цикл, интервал устойчивости.

Проблема теоретичного дослідження нелінійних динамічних режимів в лазерах з модуляцією параметрів, розробка нових методів керування лазерними параметрами, знаходження фізичних процесів, які б самостабілізували певні нерівноважні режими роботи лазерних систем, залишаються актуальними задачами. В міру розвитку лазерної техніки все більше значення набуває дослідження динаміки процесів, що визначають фізичну картину роботи лазера у різних режимах. Теоретичне вивчення процесів, що формують регулярну та хаотичну динаміку в лазерних системах [1-3], базується на аналізі напівкласичних рівнянь, для дослідження яких використовують методи теорії нелінійних коливань. Важливість та актуальність проблеми дослідження явищ біфуркації при аналізі лазерних моделей неодноразово підкреслюється в монографіях [1,2], де наведені експериментальні дані, що ілюструють наявність граничних циклів в динаміці лазерів при різних значеннях структурних параметрів. При дослідженні динаміки лазерних моделей в зазначених роботах переважають якісні методи дослідження.

Теоретичне дослідження динаміки одномодових лазерів на твердому тілі пов'язане з певними проблемами, до яких належать відсутність загальних методів інтегрування динамічних систем, наявність в моделях кількох параметрів, які в процесі роботи лазера можуть повільно змінюватись, що істотно впливає на його динаміку, помітне ускладнення напівкласичної моделі в порівнянні з класичною внаслідок врахування нелінійності взаємодії поля з речовиною резонатора та введення нелінійного елементу в резонатор як ефективного засобу впливу на динаміку лазера. В той же час не менш актуальним залишається розв'язання обернених задач динаміки лазера, в тому числі параметрична ідентифікація, розпізнавання точки біфуркації, для чого потрібно мати достатній набір розв'язків прямих задач. Як відмічається в монографії [1], проблема одержання інформації про параметри лазера та окремі елементи резонатора має велике практичне значення і для розв'язання цієї проблеми необхідно використовувати нові ідеї, що базуються на сучасних концепціях нелінійної динаміки.

Відсутність загальних методів інтегрування нелінійних систем диференціальних рівнянь примушує скористатися локальними, кожен з яких суттєво використовує асимптотичні оцінки як фазових координат, так і параметрів моделі. Одним з локальних методів, що дозволяє виявити та дослідити фізичні процеси, які породжують нестійкість та приводять до формування регулярних пульсацій, є алгоритм біфуркації народження циклу [4].

1. Постановка задачі. Розглядається модель динаміки одномодового лазера на твердому тілі з керованою добротністю резонатора $\varphi(a,b,x)$ [1]

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx\left(\dfrac{y}{c-yk} - 1 - \varphi(x)\right), \\ \dot{y} = A - y - \dfrac{xy}{c-yk},\; c = 1 + k + \dfrac{\Delta^2}{1+k}, \end{cases} \tag{1}$$

де x - інтенсивність поля фотонів; y - різниця заселеностей рівнів (інверсія); k - відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи; A - параметр накачки;

$\Delta = (\omega_0 - \omega_c)\upsilon_a^{-1}$; υ_a - швидкість релаксації атомної поляризації; ω_c - центр спектральної лінії; ω_0 - власна частота резонатора; A - параметр накачки; G - великий параметр в теорії лазерів класу В. Система (1) одержана з більш складної шляхом адіабатного виключення трьох швидкісних фазових координат, тому вона справджується лише при виконанні нерівностей: $\upsilon_a >> \upsilon_i$, $\upsilon_a >> \upsilon_r$, де υ_i - швидкість релаксації інверсії; υ_r - швидкість згасання поля в резонаторі. Всі величини – фазові координати, параметри і час – безрозмірні.

В роботі [1] наведено результати теоретичного дослідження динаміки одномодового лазера з модулятором добротності, що залежить від інтенсивності поля фотонів. Відповідна система диференціальних рівнянь є частинним випадком системи (1), якщо $k = \Delta = 0$. Оскільки функціональна залежність модулятора добротності від інтенсивності поля фотонів не конкретизувалась, то автор обмежився зауваженнями щодо можливих типів коренів характеристичного рівняння і відповідних режимів генерації. Подальша конкретизація проблеми пов'язана з дослідженням біфуркації Хопфа, що виникає при певних значеннях параметрів лазера.

Метою даної роботи є з'ясування умов виникнення біфуркації Хопфа в системі (1), знаходження біфуркаційних значень параметрів керування a і b, одержання основних характеристик динаміки випромінювання – критеріїв стійкості граничних циклів, інтервалів стійкості та розв'язків динамічної системи в явній залежності від параметрів k і c, що враховують напівкласичність моделі

Система (1) вивчається в колі стаціонарного розв'язку (x_c, y_c), який знаходиться з рівнянь

$$\begin{gathered} x_c k\psi^2(x_c) + (c - kA + x_c)\psi(x_c) - A = 0, \\ y_c = \frac{c\psi(x_c)}{\beta(x_c)}, \\ \psi(x_c) = 1 + \varphi(x_c), \beta(x_c) = 1 + k\psi(x_c). \end{gathered} \tag{2}$$

Власні значення матриці Якобі системи (1), обчисленої у стаціонарному розв'язку, мають вигляд

$$\begin{gathered} 2\lambda_{1,2} = SpurM \pm \left((SpurM)^2 - 4\det M\right)^{1/2}, \\ SpurM = -Gx_c \frac{\partial\psi(x_c)}{\partial x} - \frac{\nu}{c}, \\ \det M = \frac{Gx_c}{c}\left(\nu\frac{\partial\psi(x_c)}{\partial x} + \psi(x_c)\beta^2(x_c)\right), \\ \nu = c + x_c\beta^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Оскільки $G \approx 10^5$, то власні значення λ_n відповідають принаймні стійкому вузлу, який в міру зменшення $SpurM$ переходить в стійкий фокус. Отже, стаціонарний розв'язок вважається стійким. Стійкість буде порушуватись, коли власні значення стають суто уявними, що відбувається при виконанні умов $SpurM = 0$, $\det M > 0$. Біфуркаційне значення одного з параметрів керування знаходиться з рівняння

$$SpurM = 0.$$

Для побудови періодичного розв'язку, або граничного циклу, який згідно з теоремою Хопфа [4] може виникнути внаслідок набуття одним з параметрів свого біфуркаційного значення і відповідного критерію стійкості періодичних коливань, використовується алгоритм біфуркації народження циклу, викладений в роботі [4].

Згідно з алгоритмом система (1) зводиться до канонічного вигляду за допомогою матриці перетворення P, стовпці якої складаються з дійсної та уявної частин власного вектора матриці Якобі, що відповідає суто уявному власному значенню $i\omega_0 \equiv i\sqrt{\det M_0}$, знайденому при біфуркаційному значенні відповідного параметра. Праві частини отриманої системи слід розвинути в ряд Маклорена із збереженням доданків до третього степеня включно по сукупності фазових координат. З частинних похідних другого і третього порядку отриманих функцій, обрахованих в нулі за спеціальними формулами, наведеними в роботі [4], формуються комплекси g_{ij}, з яких утворюється величина

$$\Phi = \frac{i}{2\omega_0}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right) + \frac{g_{21}}{2},$$

де i - уявна одиниця.

Дійсна частина $\mathrm{Re}\Phi$ зазначеної величини є головним доданком показника Флоке, а уявна - використовується для уточнення періоду і фази коливань. Наближений розв'язок динамічної системи записується за степенями малого параметра ε - амплітуди модуляції.

Критерій стійкості періодичних коливань одержується з вимоги від'ємності показника Флоке $\mathrm{Re}\Phi < 0$. Наявність великого параметра

G дозволяє спростити вираз $\operatorname{Re}\Phi$, залишивши лише три доданки, що містять великий параметр в чисельнику. Такий підхід буде виправданим, якщо прийняти ще одне припущення: x_c достатньо віддалене від нуля. Досить вважати, що $x_c > 0{,}1$, що практично не обмежує загальності результату.

Наявність великого параметра G використовується і для спрощення рівняння $SpurM = 0$, яке можна подати у вигляді

$$\frac{\partial\psi(x_c)}{\partial x} = -\nu(cx_cG)^{-1}.$$

Врахування порядку параметра G дозволяє знехтувати правою частиною рівняння, як це прийнято робити в теорії лазерів класу В [1]. Отже, біфуркаційне значення параметрів керування далі буде знаходитись з рівняння

$$\frac{\partial\psi(x_c)}{\partial x} = 0,$$

яке використовується для спрощення виразу $\det M$, що обчислюється при біфуркаційному значенні одного з параметрів

$$\det M_0 = Gx_c\psi(x_c)\beta^2(x_c)c^{-1} - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \approx \approx Gx_c\psi(x_c)\beta^2(x_c)c^{-1}. \quad (4)$$

Аналіз виразу (4) показує, що періодичні коливання можливі при виконанні умови $\psi(x_c) > 0$.

Застосування алгоритму біфуркації народження циклу з використанням асимптотичного аналізу дозволяє знайти основний доданок показника Флоке і відповідне значення критерію стійкості періодичних коливань:

$$\operatorname{Re}\Phi = G\left(8x_c\beta^2\psi(x_c)\right)^{-1}K, \quad (5)$$

$$K = 2\nu\rho_2^2 + \beta^2\psi(x_c)(\rho_2 - 3\rho_3x_c) < 0, \quad (6)$$

де ρ_2, ρ_3 - коефіцієнти ряду Маклорена функції $(x_c + z_1)\psi(x_c + z_1)$ при ступенях z_1^2, z_1^3. Критерій стійкості (6) накладає певні обмеження на параметри моделі (1) та її стаціонарний розв'язок x_c. Нерівність $\psi(x_c) > 0$ вносить додаткові обмеження.

Важливо одержати розв'язок системи (1) як функцію параметрів, що відкриває можливості проведення параметричної оптимізації та ідентифікації, а також дозволяє вивчати вплив окремих параметрів на динаміку лазера.

2. Моделювання модулятора добротності резонатора Одержання практично важливих результатів не можливо без конкретизації функціональної залежності $\varphi(a,b,x)$. В роботі розглядаються квадратична, кубічна та біквадратична залежності модулятора добротності від інтенсивності поля фотонів.

У першому випадку $\varphi(x) = ax^2 - bx$, де a, b - додатні параметри керування, які послідовно розглядаються в якості біфуркаційних.

У випадку біфуркаційного параметра a: $a_0 = b/2x_c$ знайдено

$$\rho_{20} = \frac{b}{2},\ \rho_{30} = \frac{b}{2x_c}, \psi_{10} = 1 - \frac{1}{2}bx_c > 0.$$

З останньої нерівності випливає інтервал для x_c: $(0;2/b)$, звідки $x_c = 2q/b$, де q - невідомий параметр, $q \in (0;1)$. Оскільки $\psi_{10} = 1 - q$, то основний доданок показника Флоке (5) набирає вигляду

$$\operatorname{Re}\Phi_0 = \frac{Gb}{16x_c\beta_{10}^2(1-q)} \times \left(bc - 2\left(1 + k(1-q)\right)^2(1-2q)\right).$$

Критерій стійкості (6) зводиться до нерівності

$$K_1 \equiv bc - 2(1 + k(1-q))^2(1-2q) < 0,$$

з якої знаходиться інтервал стійкості для параметра керування b

$$0 < b < c^{-1}2(1 + k(1-q))^2(1-2q) \quad (7)$$

і уточнений інтервал для параметра q: $0 < q < 1/2$.

Після виконання елементарних перетворень рівняння (2) має вигляд

$$\frac{2q}{b}k(1-q)^2 + \left(c - kA + \frac{2q}{b}\right)(1-q) - A = 0,$$

звідки можна знайти значення параметра накачки

$$A = (1-q)\left(\frac{2q}{b}\beta_{10} + c\right)\beta_1^{-1}, \quad \beta_{10} = 1 + k\psi_{10}. \quad (8)$$

Отже, вибір параметрів c, k і q визначає інтервал змінювання параметра керування b (7), а за співвідношенням (8) - інтервал змінювання параметра накачки A.

Якщо в якості біфуркаційного взяти параметр b: $b_0 = 2ax_c$, тоді

$$\rho_{20} = ax_c, \rho_{30} = a, \psi_{10} = 1 - ax_c^2 > 0,$$

звідки випливає, що $x_c^2 < (a)^{-1}$, можна покласти $x_c^2 = q/a$, де $q \in (0;1)$. В цьому випадку $\psi_{10} = 1 - q$, $\rho_{20} = \sqrt{aq}$, $\rho_{30} = a$, а умова стійкості періодичної генерації має вигляд

$$K_2 \equiv c\sqrt{aq} - \beta_{20}^2(1-2q) < 0.$$

Аналіз нерівності (10) дозволяє знайти інтервал стійкості для параметра a

$$0 < \sqrt{a} < \frac{\beta^2(1-2q)}{c\sqrt{q}} \qquad (9)$$

і уточнений інтервал для параметра q: $q \in (0;1/2)$.

Рівняння (2) зводиться до вигляду

$$\sqrt{\frac{q}{a}}k(1-q)^2 + \left(c - kA + \sqrt{\frac{q}{a}}\right)(1-q) - A = 0,$$

звідки маємо

$$A = (1-q)\left(\sqrt{\frac{q}{a}}\beta_{10} + c\right)\beta_{10}^{-1}. \qquad (10)$$

Порядок розрахунку елементів динамічного процесу за одержаними формулами аналогічний попередньому, а саме: вибором параметрів c, q, k і визначається інтервал змінювання параметра керування a, стаціонарного розв'язку x_c і параметра накачки A.

У випадку кубічної залежності модулятора добротності від інтенсивності поля фотонів $\varphi_2 = ax^3 - bx$ отримано

$$\rho_2 = 6x_c^2 a - b,\ \rho_3 = 4ax_c.$$

При біфуркаційному значенні параметра a: $a_0 = b/3x_c^2$ елементи критерію стійкості приймають значення

$$\rho_{20} = b, \rho_{30} = 4b(3x_c)^{-1}, \psi_{20} = 1 - \frac{2}{3}bx_c > 0.$$

З останньої нерівності випливає обмеження $x_c < 3q/2b$, тому можна прийняти, що $x_c = 3q/2b$, $q \in (0;1)$. Отже, $\psi_{20} = 1-q$, а умова стійкості періодичної генерації має вигляд

$$K_3 \equiv 2bc - 3\beta^2(1-2q) < 0,$$

звідки одержується інтервал стійкості для параметра керування b

$$0 < b < \frac{3\beta_{20}^2(1-2q)}{2c}, \qquad (11)$$

а також уточнений інтервал змінювання параметра q: $0 < q < 1/2$.

Рівняння (2) приводиться до вигляду

$$\frac{3q}{2b}k(1-q)^2 + \left(c - kA + \frac{3q}{2b}\right)(1-q) - A = 0,$$

звідки

$$A = (1-q)\left(\frac{3q}{2b}\beta_{20} + c\right)\frac{1}{\beta_{20}}. \qquad (12)$$

Якщо в ролі біфуркаційного приймається параметр $b: b_0 = 3ax_c^2$, тоді $\rho_{20} = 3ax_c^2$, $\rho_{30} = 4ax_c$, $\psi_{20} = 1 - 2ax_c^3 > 0$. З останньої нерівності випливає, що $x_c^3 < 1/2a = q/2a$, $0 < q < 1$. Як і в попередніх випадках, $\psi_{20} = 1-q$. Умова стійкості періодичної генерації має вигляд

$$K_4 \equiv c\sqrt[3]{2aq^2} - \beta^2(1-2q) < 0,$$

інтервал стійкості для параметра керування a:

$$0 < \sqrt[3]{a} < \frac{\beta_{20}^2(1-2q)}{c\sqrt[3]{2q^2}}, \qquad (13)$$

уточнений інтервал змінювання параметра q: $0 < q < 1/2$.

В цьому випадку рівняння (2) можна звести до вигляду

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2a}}k(1-q)^2 + \left(c - kA + \sqrt[3]{\frac{q}{2a}}\right)(1-q) - A = 0,$$

звідки

$$A = \frac{\psi_{20}}{\beta_{20}}\left(c + \sqrt[3]{\frac{q}{2a}}\beta_{20}\right). \qquad (14)$$

У випадку третьої моделі $\varphi_3 = x^4 - ax^2 + bx$, знайдено

$$\rho_2 = 10x^3 - 3ax + b,\ \rho_3 = 10x_c^2 - a.$$

При біфуркаційному значенні параметра a: $a_0 = (4x_c^3 + b)(2x_c)^{-1}$ елементи критерію стійкості набувають значень

$$\rho_{20} = 4x_c^3 - \frac{b}{2}, \rho_{30} = \frac{16x_c^3 - b}{2x_c},$$

$$\psi_{30} = 1 - x_c^4 + \frac{bx_c}{2} > 0.$$

З останньої нерівності одержується обмеження щодо параметра b: $b > \frac{2(x_c^4 - 1)}{x_c}$, а критерій стійкості (6) зводиться до нерівності

$$K_5 \equiv 2\nu\left(4x_c^3 - \frac{b}{2}\right)^2 + \\ + \beta_{30}^2\psi_{30}(x_c)\left(b - 20x_c^3\right) < 0. \qquad (15)$$

З останніх двох нерівностей випливає інтервал змінювання параметра керування b

$$2(x_c^4 - 1)x_c^{-1} < b < 20x_c^3. \qquad (16)$$

Зокрема, якщо взяти $b = 8x_c^3$, то нерівність (15) виконується для будь-яких додатних x_c. З рівняння (2) знаходиться значення параметра накачки

$$A = \psi_{30}(x_c)\left(x_c\beta_{30} + c\right)\beta_{30}^{-1},\qquad \beta_3 = 1 + k\psi_{30}. \tag{17}$$

Алгоритм розрахунку елементів динаміки лазера за одержаними формулами зводиться до наступного. Вибором x_c знаходиться інтервал змінювання параметра b (16). Остаточний вибір параметра b контролюється виконанням нерівності (15) при відомих c і k. Параметр A визначається за формулою (17).

В разі вибору в якості біфуркаційного параметра $b: b_0 = -4x_c^3 + 2ax_c$ елементи критерію стійкості приймають значення

$$\rho_{20} = 6x_c^3 - ax_c, \rho_{30} = 10x_c^2 - a,$$
$$\psi_{30} = 1 - 3x_c^4 + ax_c^2,$$

а умова стійкості періодичної генерації набирає вигляду

$$K_6 \equiv \nu\left(6x_c^3 - ax_c\right)^2 + +\beta_3^2\psi_{30}(x_c)\left(a - 12x_c^2\right)x_c < 0. \tag{18}$$

З двох останніх нерівностей знаходиться інтервал змінювання параметра керування a:

$$\left(3x_c^4 - 1\right)\left(x_c\right)^{-2} < a < 12x_c^2. \tag{19}$$

З рівняння (2) знаходиться значення параметра накачки A для заданого випадку.

Можна показати, що для $a = 6x_c^2$ нерівність (18) виконується для будь-яких значень x_c. Знову на підставі міркувань неперервності можна стверджувати, що існує цілий інтервал значень параметра a, для яких нерівність буде виконуватись.

3. Аналіз елементів розв'язку. Для побудови періодичного розв'язку необхідно знайти деякі його елементи відповідно до алгоритму біфуркації народження циклу:

період модуляції

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \tau\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^4\right)\right),$$

де

$$\tau = -\omega_0^{-1}\left(\operatorname{Im}\Phi - \frac{\omega_0' \operatorname{Re}\Phi}{\lambda'}\right);$$
$$\lambda' = \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda}{\partial a};\ \omega_0' = \frac{\partial \operatorname{Im}\lambda}{\partial a},$$

малий параметр

$$\varepsilon^2 = \frac{\left(a - a_0\right)\lambda'}{-\operatorname{Re}\Phi}.$$

Періодичний розв'язок системи (1) будується у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + +P\left(\varepsilon\begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2 G}{12\omega_0}\left(2\rho_{20}\begin{pmatrix} -\sin 4\theta \\ \cos 4\theta \end{pmatrix} + +2\rho_{20}\frac{\nu}{\omega_0 c}\begin{pmatrix} \cos 4\theta \\ -\sin 4\theta \end{pmatrix} - \frac{2\omega_0}{x_c G}\begin{pmatrix} 2\cos 4\theta \\ -\sin 4\theta \end{pmatrix} + +6\rho_{20}\begin{pmatrix} \dfrac{\nu}{\omega c_0} \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) + O\left(\varepsilon^3\right). \tag{20}$$

Для аналізу розв'язку необхідно знайти значення функціонального параметра ε - амплітуди модуляції, періоду коливань T, коефіцієнта ρ_{20} для кожної моделі. Виконання відповідних перетворень дозволяє знайти значення параметра ε для кожної моделі:

модель 1,а

$$\varepsilon^2 = \left(a_0 - a\right)L_1,$$
$$L_1 = 16x_c^3\beta_{10}^2\left(1 - q\right)\left(-bK_1\right)^{-1};$$

модель 1,б

$$\varepsilon^2 = \left(b - b_0\right)L_1,$$
$$L_2 = 4\beta_{10}^2\left(1 - q\right)\left(-aK_2\right)^{-1};$$

модель 2,а

$$\varepsilon^2 = \left(a - a_0\right)L_3,$$
$$L_3 = 18x_c^3\beta_{20}^2 q\left(1 - q\right)\left(-b^2K_3\right)^{-1};$$

модель 2,б

$$\varepsilon^2 = \left(b_0 - b\right)L_4,$$
$$L_4 = \frac{8}{9}\beta_{20}^2\left(1 - q\right)\sqrt[3]{\frac{2}{qa^2}}\left(-K_4\right)^{-1};$$

модель 3,а

$$\varepsilon^2 = \left(a - a_0\right)L_5,$$
$$L_5 = 8x_c^3\beta_{30}^2\psi_{30}\left(x_c\right)\left(-K_5\right)^{-1};$$

модель 3,б

$$\varepsilon^2 = \left(b_0 - b\right)L_6,$$
$$L_6 = 8x_c^2\beta_{30}^2\psi_{30}\left(x_c\right)\left(-K_6\right)^{-1}.$$

Тип біфуркації, що відбувається в динамічній системі, можна визначити з вимоги додатності параметра ε^2. Наприклад, для моделі 1,а: $a_0 > a$, тобто біфуркація докритична, для моделі 1,б: $b > b_0$, тобто біфуркація закритична. В наступних випадках також відбувається чергування типів біфуркації.

Значення функціонального параметра використовується також для розрахунку критеріїв стійкості K_5, K_6, що відрізняються від попередніх випадків, оскільки нерівності (16) та (19) визначають лише необхідні умови для параметрів керування a і b. Достатні умови можна отримати при розв'язуванні рівняння четвертого ступеня, що пов'язано з громіздкими перетвореннями.

Доцільно почати вибір параметра a чи b з вимоги обертання в нуль першого доданку критеріїв, тобто прийняти, що $b = 8x_c^3$ і $a = 6x_c^2$. В табл. 1 наведено результати розрахунків критерію K_5 для випадків $x_c = 0{,}5; 1; 2$.

Таблиця 1

Стаціонарне рішення системи	b	K_5	A	L_5
$x_c = 0{,}5$	0,5	-2,291	2,356	0,513
	1	-1,425	1,834	0,666
$x_c = 1$	4	-65,44	5,166	0,352
	5	-43,013	6,3	0,726
	6	-63,8	9,6	0,636
	7	-81,063	8,426	0,629
	8	-94,08	9,103	0,666
	9	-100,063	10,396	0,756
	10	-104,2	11,33	0,864
	11	-110,318	12,24	0,958
	12	-87,2	13,125	1,409
	13	-67,18	13,9	2,107
	14	-35,16	14,823	4,603
$x_c = 2$	28	-990,6	36,739	4,443
	30	-3864,3	41,4	1,553
	40	-29752,8	63,571	0,659
	60	-81175,8	105,545	1,073
	70	-208810,8	126,076	0,712
	80	-279092,8	146,466	0,838
	90	-300972,8	166,764	1,048
	100	-401177,4	187,00	1,224
$x_c = 2$	115	-398801,3	217,272	1,942
	120	-137734,8	227,347	6,452
	121	-115999,1	229,36	6,748
	122	-92900,98	213,376	10,091

Для кожної пари x_c, b знаходяться значення критерію K_5, параметра накачки A і множника L_5 функціонального параметра ε^2. З одного боку, цей множник самостійно має важливе значення, а з іншого, його обернена величина $1/L_5$ визначає межі змінювання різниці $b - b_0$. Для $x_c = 0{,}5$ критерій K_5 задовольняється при $b = 0{,}5$ і $b = 1$. В інтервалі $(1;2)$ стійкість втрачається, тобто корінь многочлена належить зазначеному інтервалу. У випадку $x_c = 1$ стійкість має місце, коли $b \in (4;14)$. В інтервалах $(3;4)$ та $(4;15)$ многочлен проходить через нуль і стійкість втрачається. У випадку $x_c = 2$ стійкість спостерігається, якщо $b \in (28;122)$. В інтервалах $(27;28)$ та $(122;123)$ знаходяться корені K_5, в яких відбувається перехід до нестійкості.

Найменшому значенню L_5 відповідає найбільше відхилення $\Delta a = a - a_0$. Так, для $x_c = 2$

$$\max \Delta a < L^{-1} = \frac{1}{0{,}659} = 1{,}517.$$

Оскільки

$$a_0 = \left(4x_c^3 + b\right)\left(2x_c\right)^{-1} = \frac{1}{4}\left(32 + 40\right) = 18,$$

то $a \in (18; 19{,}517)$.

Розрахунок критерію K_6 у випадку біфуркаційного параметра b виконується аналогічно. Результати розрахунків критерію стійкості, параметра накачки та нормуючого множника у випадку біфуркаційного параметра b для $x_c = 1$ подано у табл. 2.

Таблиця 2

Стаціонарне рішення системи	a	K_5	A	L_5
$x_c = 2$	4	-13,68	5,166	1,684
	5	-28,31	7,38	1,433
	6	-47,04	9,43	1,333
	7	-47,95	11,33	1,876
	8	-25,76	13,13	4,77

В інтервалах $(3;4)$ і $(8;9)$ для параметра a відбувається перехід від стійкого режиму генерації до нестійкого. Істотною різницею в порівнянні з попереднім випадком є звуження інтервалу змінювання параметра керування a, зменшення абсолютного значення критерію одночасно зі збільшенням множника L, що викликає зменшення відхилення Δb. Результати порівняння мають практичне значення, бо орієнтують відносно вибору біфуркаційного параметра, який задовольняв би вимоги щодо використання лазера.

Дослідження моделі (1) дозволило знайти нульове наближення до невідомої частоти модуляції

$\omega_0^2 = Gx_c\psi(x_c)\beta^2 c^{-1}$, яку прийнято називати частотою Рабі [1]. Частота Рабі для класичної моделі Статца-Демарса визначається як $\omega_0^2 = G(A-1)$ [1] і є частинним випадком одержаної формули.

Наприклад, для моделі 1,а знайдено

$$x_c = \frac{A-(c-kA)(1-q)}{(1-q)(1+k(1-q))}.$$

Підстановка значення x_c, значень $\psi_{10} = 1-q$, $\beta_{10} = 1+k\psi_{10}$ в формулу для частоти модуляції приводить останню до вигляду

$$\omega_0^2 = G(A-(c-kA)(1-q))\beta_{10}c^{-1}. \quad (21)$$

В класичній моделі без нелінійних елементів в резонаторі $\psi_{10} = 1$, $c=1$, $k=0$, тобто $q=0$. При цих значеннях параметрів формула (21) переходить в класичну $\omega_0^2 = G(A-1)$.

Цей результат залишається вірним не лише для перших двох моделей, але і для третьої, для якої формула частоти має такий самий вигляд. З рівняння (2) одержується $x_c\psi_{30}(x_c)\beta_{30}(x_c) = A\beta_{30}(x_c) - c\psi_{30}(x_c)$. Тоді частота ω_0^2 набирає вигляду

$$\omega_0^2 = G\beta_{30}\left[A(1+k\psi_{30}(x_c)) - c\psi_{30}(x_c)\right]c^{-1}.$$

Аналогічні міркування знову дозволяють отримати класичну формулу $\omega_0^2 = G(A-1)$. Формула (21) зручна для вивчення впливу параметра c на змінювання частоти. Коефіцієнт чутливості ω_0^2 щодо c має вигляд

$$\frac{\partial\omega_0^2}{\partial c} = -\frac{GA\beta}{c^2}(1+k(1-q)) < 0.$$

Оскільки похідна від'ємна, то збільшення параметра c приводить до зменшення частоти модуляції ω_0 і збільшення періоду T.

Висновки. Застосування алгоритму біфуркації народження циклу до дослідження моделі (1) дозволяє з'ясувати умови виникнення біфуркації Хопфа, знайти основні характеристики режиму неперервної періодичної генерації, з'ясувати вплив параметрів лазера на його динаміку.

1. Аналіз залежностей (7), (9), (11), (13) показує, що врахування параметра c приводить до зменшення інтервалів стійкості параметрів керування a і b. Параметр k має протилежний вплив і приводить до збільшення інтервалів стійкості параметрів керування. Однак його вплив значно менший ніж вплив параметра c, оскільки обмеження, накладені на модель (1), роблять його величину порядку $O(0,1)$.

2. З формул (8), (10), (12), (14) випливає, що параметр c збільшує значення параметра накачки, при якому можливий стаціонарний розв'язок моделі (1). Одночасно зазначені залежності визначають інтервал змінювання параметра накачки, оскільки містять параметри керування a і b.

3. Розв'язок динамічної системи (1) містить елемент ρ_{20}, що залежить від параметрів керування. Отже, вибір параметра керування істотно впливає і на сам розв'язок. Так, у випадку моделі 3,а значення $b = 8x_c^3$, при якому $\rho_{20} = 0$, надає стійкості періодичній генерації при будь-якому $x_c > 0$. Одночасно сам розв'язок набуває найпростішого вигляду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P\left(\varepsilon\begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2}{3x_c}\begin{pmatrix} \cos 4\theta \\ -\sin 4\theta \end{pmatrix}\right) + O(\varepsilon^3).$$

Цей факт можна використати і для дослідження динаміки лазера за межами інтервалів стійкості деяких параметрів, що становить окрему проблему [5,6].

4. Умова модуляції $\psi(x_c) > 0$ може бути записана в іншому вигляді, якщо використати формулу для квадрата частоти (21), звідки випливає нерівність $A(1+k(1-q)) > c(1-q)$. Для моделі Статца-Демарса $k=0, q=0, c=1$, тоді остання нерівність зводиться до нерівності $A>1$, тобто умова модуляції переходить в умову генерації випромінювання класичної моделі.

5. Критерії K_5 і K_6 та їх розрахунки, наведені в таблицях, є теоретичним підтвердженням експериментального факту існування багатьох порогів стійкості для параметра накачки.

Якщо прийняти до уваги, що розробка ефективних методів керування вихідними характеристиками лазерного випромінювання та оптимізація параметрів самого лазерного пристрою неможлива без систематичного дослідження впливу різних тонких ефектів, які обумовлені взаємодією генеруючого випромінювання з активним середовищем або іншими елементами лазера, застосування методів теоретичного дослідження біфуркаційних явищ при аналізі лазерних моделей має широкі перспективи.

1. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров. – М.: Наука, 1999. – 364 с.
2. *Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А.* Автоколебания в лазерах. - Мн.: Навука і техніка, 1990. – 280 с.
3. *Фолин К.Г., Гайнер А.В.* Динамика свободной генерации твердотельных лазеров. – Новосибирск: Наука, 1979. – 263 с.

4. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. - М.: Мир, 1985. - 280 с.
5. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М.: Наука, 1991. - 240 с.
6. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Меркурий-ПРЕСС, 2000. – 528 с.

STUDY OF PERIODIC DUTIES OF LASING IN SINGLE- MODE SOLID-STATE LASERS

G.P.Kovalenko, S.V.Kolomiets

Dynamics of semi-classical model of solid-state laser is studied by method of bifurcation of cycle initiation. The bifurcation analysis is conducted for quadratic, cubical and biquadratic dependencies of Q-switch of intensity of a photon flux. The criteria of stability of limiting cycles, which occur in consequence of Hopf's bifurcation, are obtained, intervals of stability for control parameters are made.

Key words: Q-spoiler, limiting cycle, interval of stability.

Рукопис надійшов 14 травня 2004 р.