

О СТАТИЧЕСКОЙ И ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

И.Б. Каринцев, канд. техн. наук, профессор,

В.В. Белан,

Сумский государственный университет, г.Сумы

Рассматривается статья, которая посвящена определению влияния потока вязкой несжимаемой жидкости на устойчивость упруго закрепленной жесткой пластины. Определены значения критического перепада давления, при которых возникают статическая и динамическая потери устойчивости.

Ключевые слова: Статическая, динамическая устойчивость, вязкая жидкость, перепад давления, потери устойчивости.

В работе рассматриваются свободные колебания упруго закрепленной жесткой пластины под действием гидродинамических сил, действующих на стенку со стороны потока вязкой несжимаемой жидкости. Задача эта напоминает задачу классического флаттера [1]. Однако в отличие от классического флаттера, где крыло обтекается внешним потоком, в нашем случае пластина обтекается внутренним потоком, который определяется в основном осевым перепадом давления. Рассматриваемая задача может быть моделирована на случай течения в плоских зазорах клиновых затворов [2].

Для случая колебания упруго закрепленной жесткой стенки (рис.1), которая совершает совместные поперечные и угловые колебания относительно статического равновесия, получена система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y - \alpha_1 \ddot{\theta} - \alpha_2 \dot{\theta} - \alpha_3 \theta = 0, \quad (1)$$

$$\beta_1 \ddot{y} + \beta_2 \dot{y} + \beta_3 y - b_1 \ddot{\theta} - b_2 \dot{\theta} - b_3 \theta = 0,$$

где y и θ – безразмерные обобщенные координаты ($y = \frac{\ell}{H}$, $\theta = \frac{\theta \ell}{2H}$), а коэффициенты $a_1, \alpha_1, \beta_1, b_1$ – характеризуют инерционные свойства стенки и протекающей жидкости; a_2, β_2 – линеаризованные коэффициенты неконсервативных сил; α_2, b_2 – перекрестные диссипативные силы; $a_3, \alpha_3, \beta_3, b_3$ – коэффициенты суммарной радиальной и угловой жесткости.

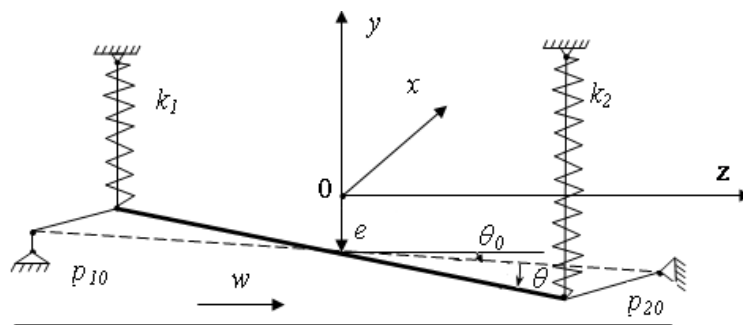


Рисунок 1 – Схема плоского канала с упруго закрепленной верхней стенкой

Уравнения колебаний подвижной стенки учитывают также параметр конусности θ_0 , поэтому некоторые коэффициенты зависят от этого параметра и, следовательно, могут менять знак при переходе от конфузорной щели к диффузорной.

К сожалению, анализ полученной системы затруднен ввиду ее сложности. Поэтому в настоящей работе более подробно рассматривается частный случай, когда пренебрегаются силы инерции присоединенной массы жидкости ($a_1 = \beta_1 = 1$), а также диссипативные силы ($a_2 = b_2 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$).

Тогда система приобретает более простой вид

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_3 y - \alpha_3 \theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + \beta_3 \theta - b_3 y &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты a_3, β_3 – характеризуют парциальные частоты чисто поперечных и чисто угловых колебаний; α_3, b_3 – учитывают перекрестные коэффициенты радиальной и угловой жесткости.

С учетом обозначений, принятых в монографии [2], коэффициенты уравнений (2) имеют вид

$$a_3 = \omega_{10}^2 + k_{p1} \theta_0, \quad \alpha_3 = c_{12} + k_{p1}, \quad (3)$$

$$\beta_3 = \omega_{20}^2, \quad b_3 = c_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{10}^2 &= \frac{k_s}{m}; & \omega_{20}^2 &= \frac{k_s \ell}{4I}; & k_3 &= k_1 + k_2; & I &= \frac{m \ell^2}{12}; \\ c_{12} &= \frac{\Delta k}{m}; & c_{21} &= \frac{\Delta k \ell^2}{4I}; & \Delta k &= k_2 - k_1; & c &= \frac{m \ell^2}{12I}; \\ k_{p1} &= \frac{k_p}{mH}; & k_p &= \frac{\Delta P \ell}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\omega_{10}^2, \omega_{20}^2$ – парциальные частоты в воздухе, т.е. без учета гидродинамических сил, c_{12}, c_{21} – перекрестные коэффициенты жесткости без учета гидродинамических сил (их знаки определяются знаком разности Δk), k_p – коэффициент жесткости от напорного течения, Δp – дросселируемый на канале перепад давления; θ_0 – угол конусности ($\theta_0 > 0$ – конфузор, $\theta_0 < 0$ – диффузор); I – момент инерции верхней стенки, m – погонная масса стенки; H – средний зазор в канале; ℓ – длина канала; k_1, k_2 – коэффициенты жесткости пружин.

Для анализа статической потери устойчивости в уравнениях (2) достаточно положить $\dot{y} = \dot{\theta} = 0$. Тогда будем иметь два алгебраических уравнения:

$$a_3 y - \alpha_3 \theta = 0, \quad b_3 y - \beta_3 \theta = 0. \quad (5)$$

Приравняв к нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы, получим уравнение для определения условия устойчивости

$$a_3 \beta_3 - \alpha_3 b_3 = 0. \quad (6)$$

После подстановки выражений (3) и (4) в (6) условие устойчивости примет вид

$$k_p = H \frac{k_s(1-\chi)}{\chi - \theta_0}, \quad (7)$$

где χ – безразмерный коэффициент упругой связи, учитывающий влияние перекрестных жесткостей.

Критическое значение осевого перепада давления, при котором возникает дивергенция:

$$\Delta p = \frac{8 \frac{H}{\ell} k_1 k_2}{k_2(1-\theta_0) - k_1(1+\theta_0)}. \quad (8)$$

Легко видеть, что при $k_1 = k_2 = k$ $\Delta p = -4 \frac{H}{\ell} \frac{k}{\theta_0},$

т.е. дивергенция возможна при $\theta_0 < 0$ (для диффузорной щели).

Если $k_2 \rightarrow \infty$, то $\Delta p = 8 \frac{H}{\ell} \frac{k_1}{1-\theta_0},$

т.е. дивергенция возможна при любых θ_0 .

Если $k_1 \rightarrow \infty$, то $\Delta p = -8 \frac{H}{\ell} \frac{k_2}{1+\theta_0},$

т.е. дивергенция невозможна.

Если $\theta_0 = 0$, дивергенция возникает при $\Delta p = \frac{8 \frac{H}{\ell} k_1 k_2}{k_2 - k_1},$

т.е. жесткости должны увеличиваться по направлению потока.

В общем случае дивергенция возможна, когда $k_2 > k_1 \frac{1+\theta_0}{1-\theta_0}.$

Для анализа динамической потери устойчивости (флаттера) воспользуемся уравнениями (2). Решение будем искать в виде

$$y = A e^{i\omega t}, \quad \theta = B e^{i\omega t}.$$

После подстановки в уравнения (2) определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных A и B , будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a_3 & -\alpha_3 \\ -b_3 & -\omega^2 + \beta_3 \end{vmatrix} = \omega^4 - \omega^2 (a_3 + \beta_3) + a_3 \beta_3 - \alpha_3 b_3 = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{a_3 + \beta_3}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_3 + \beta_3)^2}{4} - (a_3 \beta_3 - \alpha_3 b_3)}. \quad (9)$$

Проанализируем полученное выражение. Нетрудно увидеть, что должны выполняться следующие условия:

$$\omega^2 \text{—вещественное, т.е. } a_3\beta_3 - \alpha_3b_3 \leq \frac{(a_3 + \beta_3)^2}{4},$$

$$\omega^2 \text{—положительное, т.е. } a_3\beta_3 - \alpha_3b_3 \geq 0.$$

Преобразуем первое условие

$$(a_3 + \beta_3)^2 = 4a_3\beta_3 - 4\alpha_3b_3 \quad \text{или} \quad (a_3 - \beta_3)^2 + 4\alpha_3\beta_3 = 0.$$

После подстановки (3) и (4)

$$(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2 - k_{p1}\theta_0)^2 + 4c_{12}c_{21} + 4c_{21}k_{p1} = 0, \quad (10)$$

или

$$(a - k_{p1}\theta_0)^2 + b + dk_{p1} = 0, \quad (11)$$

где для удобства введены новые обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \omega_{20}^2 - \omega_{10}^2 = \frac{k_s}{m}(3c - 1), \\ b &= 4c_{21}c_{12} = 12c \left(\frac{\Delta k}{m}\right)^2, \\ d &= 4c_{21} = 12c \frac{\Delta k}{m}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вначале рассмотрим частный случай, когда $\theta = 0$ (т.е. без учета конусности). Тогда

$$k_{p1} = -\frac{1}{d}(b + a^2).$$

После подстановки новых обозначений получим

$$k_{p1} = -\frac{\Delta k}{m} \left[1 + \frac{(3c - 1)^2}{12c} \frac{1}{\chi^2} \right]. \quad (13)$$

Критическое значение осевого перепада давления для возникновения флаттера

$$\Delta p_* = -\frac{2H}{\ell}(k_2 - k_1) \left[1 + \frac{(3c - 1)^2}{12c} \frac{1}{\chi^2} \right], \quad (14)$$

т.е. флаттер возможен при $k_2 < k_1$, а дивергенция при $k_2 < k_1$.

В общем случае, когда $\theta_0 \neq 0$:

$$k_{p1} = \frac{(2a\theta_0 - d) \pm d\sqrt{1 - \varepsilon}}{2\theta_0^2},$$

где $\varepsilon = \frac{4(ad\theta_0 + b\theta_0^2)}{d^2}$ — малый параметр.

Разложим корень квадратный в ряд, ограничившись слагаемым θ_0^3 .
Окончательно получим для критического перепада давления:

$$\begin{aligned} \Delta p_* = & -\frac{2H}{\ell}(k_2 - k_1) \left[1 + \frac{(3c-1)^2}{12c} \frac{1}{\chi^2} \right] \times \\ & \times \left[1 + \frac{2(3c-1)}{12c} \frac{\theta_0}{\chi^2} + \left(\frac{1}{12c} + \frac{5(3c-1)^2}{(12c)^2} \frac{1}{\chi^2} \right) \theta_0^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{12c} + \frac{7(3c-1)^2}{(12c)^2} \frac{1}{\chi^2} \right) \theta_0^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Полагая $\theta_0 = 0$, приходим к предыдущему результату (14).

Полученные выше условия статической устойчивости (дивергенция) и динамической устойчивости (флаттер) представлены графически на рис.2,3. По оси ординат откладывался безразмерный параметр

$$P = \frac{\Delta p}{2 \frac{H}{\ell} k_s},$$

по оси абсцисс – безразмерный коэффициент

$$\chi = \frac{\Delta k}{k_s},$$

который меняется от -1 до $+1$. Графики построены для случая, когда

$$c = \frac{m\ell^2}{12I} = 1 \quad (I = \frac{m\ell^2}{12}).$$

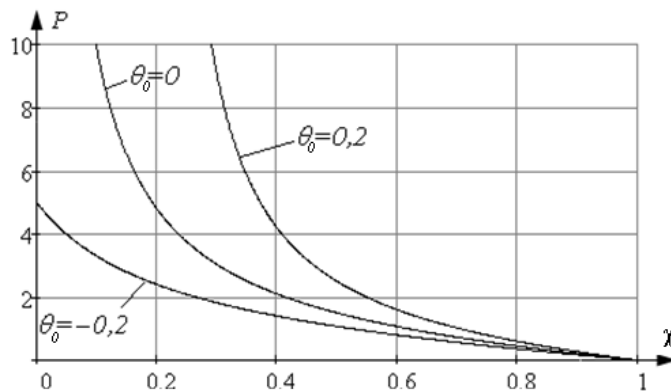


Рисунок 2 – Условие статической устойчивости при различных значениях начальной конусности канала

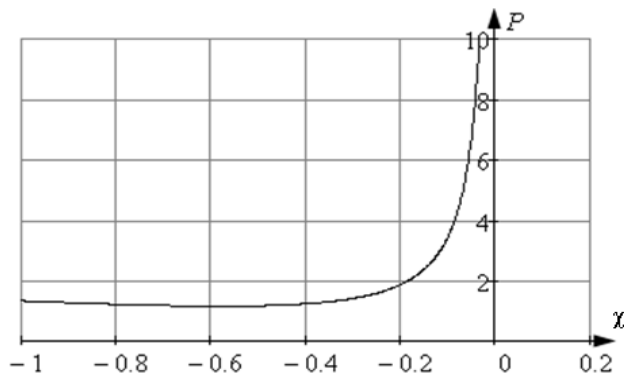


Рисунок 3 – Условие динамической устойчивости при $\theta_0 = 0$

ВЫВОДЫ

Таким образом, рассмотрены условия динамической и статической устойчивости упруго закрепленной пластины. Значение критического перепада осевого давления с учетом принятых упрощений зависят от геометрических параметров пластины, значений жесткости пружин, в том числе от изменения жесткости в направлении потока жидкости, и начальной конфузорности плоского канала. При рассмотрении частных случаев было установлено, что в случае равных жесткостей пружин дивергенция возможна при начальной диффузорности канала, в случае жесткого закрепления справа верхней стенки канала потеря устойчивости происходит при любых значениях начального угла отклонения, слева – дивергенция невозможна. То есть можно сделать вывод, что статическая потеря устойчивости возможна при увеличении жесткостей пружин в направлении потока жидкости.

При рассмотрении условия динамической устойчивости системы получена новая формула для определения значения критического перепада давления, позволяющая наглядно оценить влияние параметров системы на величину этого значения. В результате можно сделать вывод, что дивергенция возникает в случае уменьшения жесткостей пружин в направлении потока жидкости.

SUMMARY

ABOUT STATIC AND DYNAMIC STABILITY OF ELASTICALLY FIXED PLATE

I.B. Karintsev, V.V. Belan
Sumy State University, Sumy

This article is devoted to defining influence of the viscous incompressible fluid flow on the elastic fixed rigid plate stability. The critical pressure values in which there are static and dynamic stability loss were found.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каринцев И.Б. Гидроаэроупругость / И.Б. Каринцев. – Сумы: Изд-во Сумского государственного университета, 2000. - 138с.
2. Котов Ю.В. Оборудование атомных электростанций/ Ю.В. Котов, В.В. Кротов, Г.А. Филиппов. –М.: Машиностроение, 1982.–376 с.
3. Марцинковский В.А. Гидродинамика дросселирующих каналов / В.А. Марцинковский. – Сумы: Изд-во Сумского государственного университета, 2002.– 377 с.
4. Марцинковский В.А. Щелевые уплотнения: теория и практика / В.А. Марцинковский. – Сумы: Изд-во Сумского государственного университета, 2005.– 416 с.

Поступила в редакцию 9 июля 2009 г.