



Исследование критических частот ротора центробежного компрессора с учётом жёсткости опор и уплотнений

И. В. Павленко¹⁾, В. И. Симоновский¹⁾, Я. Питель²⁾, А. Е. Вербовой¹⁾, М. Н. Демьяненко¹⁾

¹⁾ Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007, Сумы, Украина;

²⁾ Технический университет г. Кошице, ул. Баерова, 1, 08001, Прешов, Словакия

Article info:

Paper received:

April 14, 2017

The final version of the paper received:

May 11, 2017

Paper accepted online:

May 15, 2017

Correspondent Author's Address:

i.pavlenko@omdm.sumdu.edu.ua

В работе рассмотрена реализация математической модели свободных колебаний роторов центробежных машин с применением компьютерной программы "Critical frequencies of the rotor". Преимуществом программы является возможность учёта любой наперёд заданной аналитической зависимости жёсткости опор и уплотнений от частоты вращения ротора. В результате численного расчёта на примере ротора многоступенчатого центробежного компрессора 295ГЦ2-190/44-100М определены собственные и критические частоты ротора и соответствующие им формы колебаний. Достоверность предложенной математической модели подтверждена теоремой о взаимном расположении спектров собственных и критических частот, а также путём сравнения результатов динамического расчёта в программе "Critical frequencies of the rotor" с результатами численного моделирования в ANSYS с применением конечноэлементной 3D-модели и построением диаграммы Кемпбелла.

Ключевые слова: метод конечных элементов, матрица жёсткости, матрица инерции, свободные колебания, собственная частота, диаграмма Кемпбелла.

1. ВВЕДЕНИЕ

С ростом рабочих параметров многоступенчатых центробежных машин проблемы, связанные с их вибрационной надёжностью, становятся более значительными. В связи с этим актуальной является задача исследования динамики роторных систем, в том числе определения критических частот, а также форм свободных и вынужденных колебаний.

На современном этапе развития компьютерных технологий задача определения собственных частот роторных систем на основе линейных математических моделей хорошо изучена в работах [1, 2]. Учёт скорости вращения ротора на жёсткость подшипниковых опор может быть численно смоделирован с использованием ANSYS, как это было реализовано в работе [3]. В работах [4, 5] рассмотрены методы, позволяющие учитывать гироскопические моменты инерции насадных деталей. Влияние деформируемого корпуса на динамику ротора исследуется в работе [6].

Вышеописанные подходы связаны с применением линейных математических моделей динамики ротора, а также не учитывают наперёд заданную зависимость жёсткости подшипниковых опор от частоты вращения ротора, полученную по экспериментальным данным.

В современных методах расчёта динамики роторных систем [7], основанных на использовании компьютерных программ, реализующих метод конечных элементов, как правило, используются балочные ко-

нечные элементы с учётом допущения о недеформируемых плоских поперечных сечениях либо трёхмерные модели. Применение трёхмерных моделей, в частности, в программном комплексе ANSYS, требует сравнительно большого машинного времени. При этом использование балочных моделей является нетрудоемким для подготовки исходных данных и не требуют большого машинного времени. Кроме того, применение ANSYS для определения критических частот ротора неизбежно связано с графическим построением диаграммы Кемпбелла.

Целью данной работы является подтверждение достоверности математической модели свободных колебаний роторных систем, реализуемой при помощи компьютерной программы "Critical frequencies of the rotor", путём сравнения результатов расчёта с данными численного моделирования в ANSYS.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

2.1 Описание математической модели и компьютерной программы её реализации

Предложенная математическая модель свободных колебаний ротора основана на применении двумерных балочных 2-узловых конечных элементов с четырьмя степенями свободы (поперечные перемещения в узлах и углы поворота), локальные матрицы жёсткости $[C_e]$ и инерции $[M_e]$ которых изначально содержат параметры c_0 , a , β зависимости жёсткости опор и уплотнений от частоты вращения ω .

$$[C_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} + c_0 + \alpha\omega + \beta\omega^2 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}m & \frac{11}{210}ml & \frac{9}{70}m & -\frac{13}{420}ml \\ \frac{11}{210}ml & -\left(\frac{34ml^2}{105} + \frac{md^2}{16} + I_g\right) & \frac{13}{420}ml & -\frac{1}{140}ml^2 \\ \frac{9}{70}m & \frac{13}{420}ml & \frac{13}{35}m & -\frac{11}{210}ml \\ -\frac{13}{420}ml & -\frac{1}{140}ml^2 & -\frac{11}{210}ml & \frac{1}{105}ml^2 \end{bmatrix},$$

Дополнительные параметры формулы (1): EI – изгибная жёсткость; m, l, d – масса, длина и диаметр поперечного сечения конечного элемента; J – гироскопический момент насадной детали.

Преимуществом такого подхода является возможность определения критических частот ротора для имеющихся экспериментальных точек зависимости «жёсткость – частота вращения» без предварительного построения диаграммы Кемпбелла.

Глобальные матрицы жёсткости $[C]$ и инерции $[M]$ конечноэлементной модели ротора формируются путём суммирования соответствующих локальных матриц по общим узлам [8]:

$$[C]_{ij} = \sum_{k=1}^n [C_e]_{ij}^{(k)}, \quad [M]_{ij} = \sum_{k=1}^n [M_e]_{ij}^{(k)}. \quad (2)$$

	L, м	D, м	d, м	m, кг	I, кг·м ²	k, Н/м	α , Н·с/м	β , Н·с ² /м
1	0.015	0.37	0.277	0	0	0	0	0
2	0.028	0.3	0.27	0.7	0	0	0	0
3	0.015	0.27	0.18	0.8	0	0	0	0
4	$9 \cdot 10^{-3}$	0.66	0.59	2.8	0	0	0	0
5	0.01	0.662	0.6	0	0	0	0	0
6	0.01	0.56	0.53	9	0	0	0	0
7	0.01	0.45	0.35	12.7	0	0	0	0
8	0.011	0.22	0.136	12.7	0	0	0	0
9	0.07	0.126	0	9.3	0	0	0	0
10	0.025	0.118	0	3	0	0	0	0
11	0.01	0.132	0	4	0	0	0	0
12	0.017	0.131	0	0	0	0	0	0
13	0.158	0.141	0	0	0	0	0	0
14	0.13	0.146	0	92.16	0	$2.45 \cdot 10^7$	$-2.9 \cdot 10^4$	208.635
15	0.037	0.152	0	0	0	0	0	0
16

Рисунок 1 – Фрагмент таблицы исходных данных для расчёта собственных и критических частот ротора компрессора 295ГЦ2-190/44-100М

После ввода исходных данных программа формирует локальные матрицы жёсткости и инерции конечных элементов (1). Глобальные матрицы жёсткости $[K]$ и инерции $[M]$ формируются из локальных путём «сшивания» последних по соответствующим узлам согласно формуле (2).

Задача об определении собственных и критических частот изгибных колебаний роторов и валопроводов турбомашин сводится к отысканию собственных значений ω_i глобальной матрицы (3) путём численного решения нелинейного относительно ω частотного уравнения $\det[D] = 0$. Формы колебаний определяются с точностью до постоянного множителя путём решения системы $(n - 1)$ линейных алгебраи-

где $[C_e]_{ij}^{(k)}, [M_e]_{ij}^{(k)}$ – элементы (i, j) локальных матриц (1) для k -го конечного элемента; n – количество конечных элементов.

Задача определения собственных и критических частот изгибных колебаний ротора, которая сводится к нахождению собственных значений матрицы

$$[D] = [C] - \omega^2 [M], \quad (3)$$

реализуется с применением компьютерной программы “Critical frequencies of the rotor” [9]. Преимуществами программы являются учёт зависимости коэффициентов жёсткости опор и уплотнений от частоты вращения ротора и гироскопических моментов насадных деталей, а также отсутствие необходимости дополнительного построения диаграммы Кемпбелла.

Исходными данными для расчёта являются физические свойства материала вала (плотность $\rho = 7850$ кг/м³ и модуль упругости 1-го рода $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²), длины L , наружные D и внутренние d диаметры участков, массы m и гироскопические моменты инерции J насадных деталей, а также жёсткости s подшипниковых опор. На рис.1 приведен фрагмент таблицы исходных данных для расчёта собственных частот и форм ротора компрессора 295ГЦ2-190/44-100М. Общее количество участков – 52.

ческих уравнений относительно n амплитуд свободных колебаний.

Особенностью программы является возможность учёта аналитической зависимости жесткостей опор и уплотнений от частоты вращения ротора по любому предложенному закону. Таким образом, программа позволяет рассчитывать не только собственные частоты, определяющиеся при постоянных жесткостях, но и критические частоты вращения [10].

2.2 Пример расчёта собственных частот и форм колебаний ротора центробежного компрессора

Рассмотрим результаты расчёта динамики ротора центробежного компрессора 295ГЦ2-190/44-100М на

магнитном подвесе мощностью 16,85 МВт, работающего в диапазоне частот вращения от 3710 до 5565 об/мин (рис. 2). При расчёте собственных частот

была принята жёсткость опоры $C_p = 0,705 \cdot 10^8$ Н/м, соответствующая рабочей частоте вращения ротора 544 рад/с.

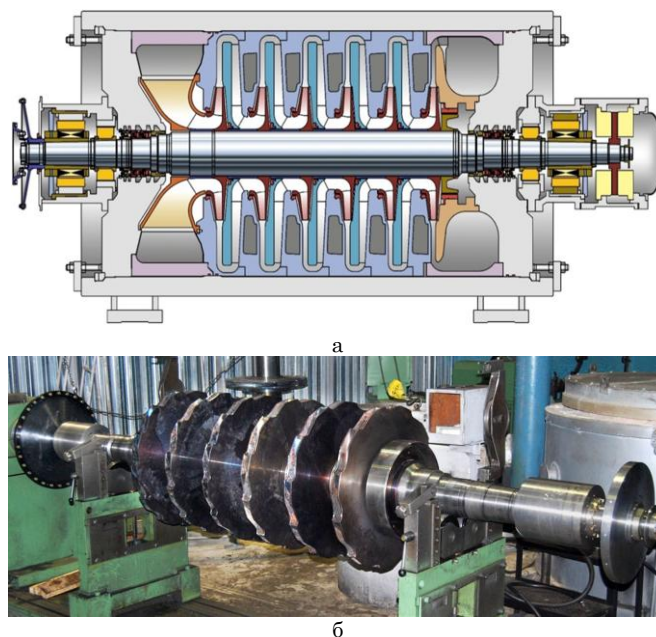


Рисунок 2 – Фронтальный разрез многоступенчатого центробежного компрессора 295ГЦ2-190/44-100М (а) и фото его ротора (б)

Расчёт критических частот произведен для квадратичной зависимости жёсткости подшипника от частоты вращения ротора (рис. 3):

$$C(\Omega) = C_0 + a \cdot \Omega + \beta \cdot \Omega^2, \quad (1)$$

где по данным ПАО «Сумское научно-производственное объединение», жёсткость при отсутствии вращения $C_0 = 2,45 \cdot 10^7$ Н/м, а коэффициенты a , β найдены методами идентификации (линейного оценивания) [10, 12]: $a = -2,9 \cdot 10^4$ Н·с/м, $\beta = 208,635$ Н·с²/м.

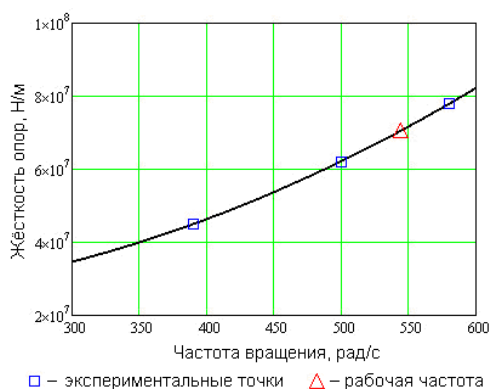


Рисунок 3 – Зависимость жёсткости подшипников компрессора 295ГЦ2-190/44-100М от частоты вращения ротора

Таблица исходных данных для расчёта собственных частот отличается значением жёсткости подшипников опор (в столбцах 7–8 все значения нулевые, в столбце 6 $C_p = 0,705 \cdot 10^8$ Н/м).

На рисунке 4 приведена формируемая программой расчётная схема ротора.

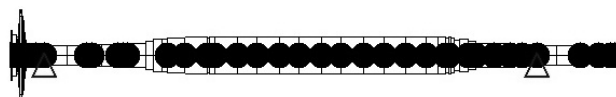


Рисунок 4 – Расчётная схема балочной конечноэлементной модели ротора

Результаты расчёта собственных и критических частот ротора сведены в табл. 1, а соответствующие формы колебаний показаны на рисунке 5.

Таблица 1 – Значения собственных и критических частот, рад/с

Частота	Номер частоты			
	1	2	3	4
Собственная	159	379	525	732
Критическая	118	257	512	744

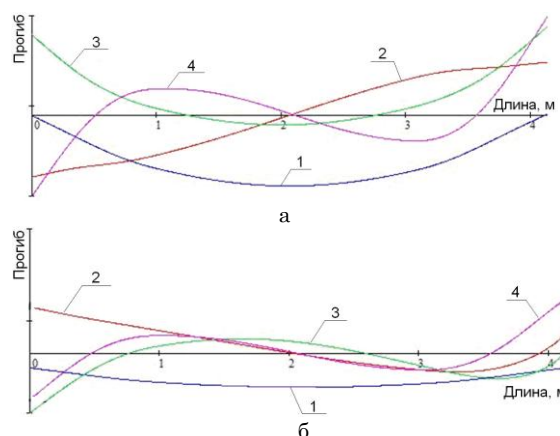


Рисунок 5 – Формы собственных колебаний ротора в результате расчёта собственных (а) и критических (б) частот

Как видно из табл. 1, данные расчёта согласуются с теоремой о взаимном расположении спектров собственных и критических частот [11, 13]. Так, критические частоты, меньше, чем рабочая частота (в данном случае 544 рад/с), меньше соответствующих собственных частот; критические частоты, превышающие рабочую частоту, превышают соответствующие собственные частоты.

2.3 Расчёт собственных и критических частот с помощью ANSYS

Для расчёта собственных и критических частот ротора в программном комплексе ANSYS на основе таблицы исходных данных (рис. 1) создана 3D-модель, приведенная на рис. 6. Также задавались значения и положения точечных масс и жёсткости подшипниковых опор.

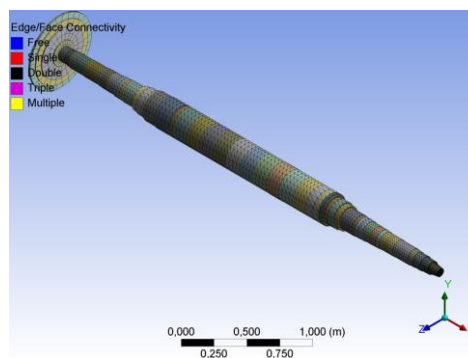


Рисунок 6 – Конечноэлементная 3D-модель ротора

Первые четыре формы свободных колебаний ротора представлены на рис. 7.

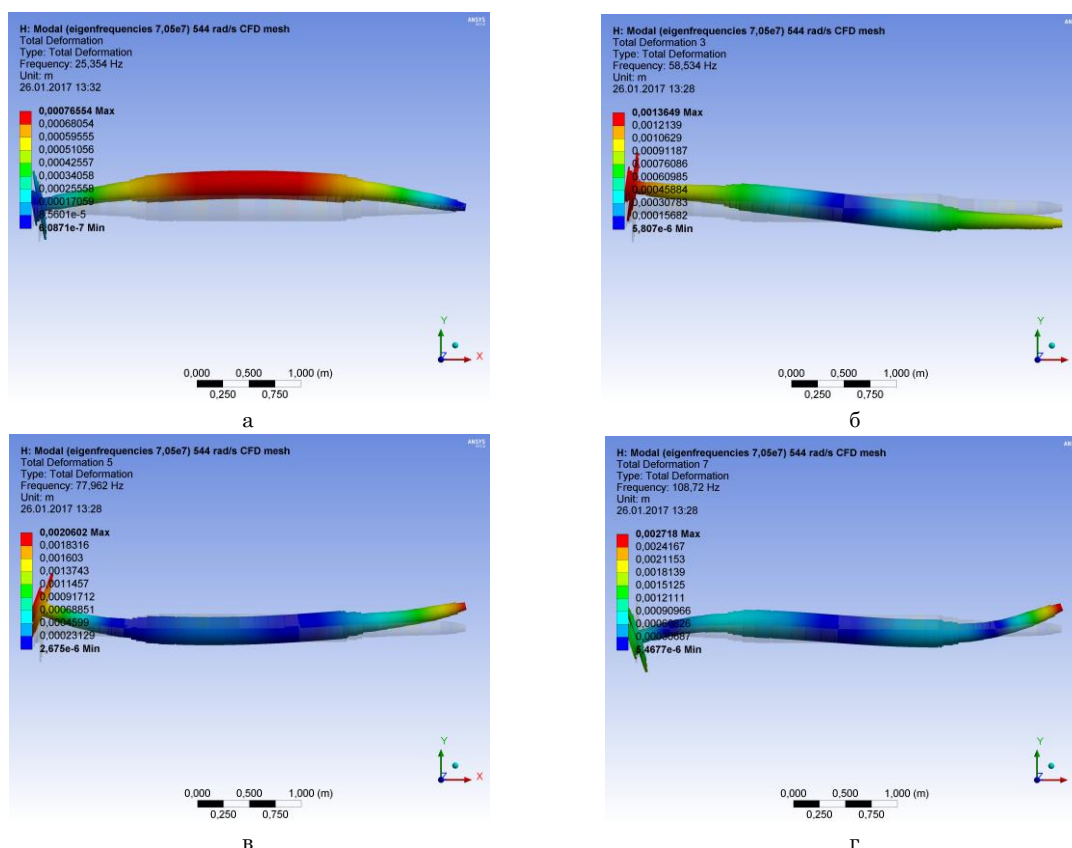


Рисунок 7 – Формы собственных колебаний ротора: 1-я (а), 2-я (б), 3-я (в) и 4-я (г)

Критические частоты определялись с использованием диаграммы Кемпбелла по следующему алгоритму:

- 1) по формуле (1) вычислялись жёсткости подшипников для разных значений частот Ω (табл. 2);
- 2) при помощи ANSYS были найдены собственные частоты ω для разных значений жёсткостей опор (табл. 2);
- 3) в координатной плоскости $\Omega - \omega$ путём интерполяции полученных точек были построены кривые зависимостей собственных частот от частоты вращения ротора (рис. 8);
- 4) критические частоты определялись как ординаты точек пересечения интерполированных кривых с биссектрисой $\omega(\Omega) = \Omega$ на диаграмме $\Omega - \omega$ (рис. 8).

Таблица 2 – Зависимость собственных частот ротора и жёсткости подшипниковых опор от частоты

Частота вращения Ω , рад/с	Жёсткость опор $c \cdot 10^7$ Н/м	Собственная частота ω , рад/с			
		1-я	2-я	3-я	4-я
0	2,45	118,4	222,8	399,9	675,1
100	2,37	117,0	219,3	398,2	674,9
200	2,70	122,5	233,6	405,3	675,4
300	3,46	132,9	263,2	421,5	676,8
400	4,63	144,5	302,4	445,6	678,9
500	6,22	155,3	347,3	476,1	682,4
544	7,05	159,3	367,8	489,9	683,1
600	8,22	164,2	394,5	510,8	687,9
700	10,60	171,3	441,5	546,3	696,4
800	13,50	176,9	488,9	581,5	710,4

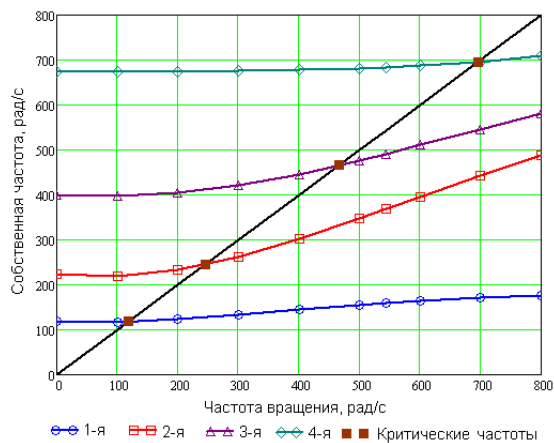


Рисунок 8 – Диаграмма Кемпбелла

Полученные с применением ANSYS значения собственных и критических частот, приведенные в табл. 3, также согласуются с теоремой о взаимном расположении спектров собственных и критических частот.

Таблица 3 – Значения собственных и критических частот ротора, рад/с

Частота	Номер частоты			
	1	2	3	4
Собственная	159	368	490	683
Критическая	118	246	466	696

3. ВЫВОДЫ

В работе разработана математическая модель для расчёта динамики ротора, основанная на рассмотрении балочных конечных элементов. Разрабо-

тана соответствующая программа “Critical frequencies of the rotor” для определения собственных и критических частот ротора, обеспечивающая возможность учёта зависимости коэффициентов жёсткости опор и уплотнений от частоты вращения ротора, а также гироскопических моментов насадных деталей.

Проведена верификация предложенной математической модели свободных колебаний роторных систем на примере многоступенчатого центробежного компрессора 295ГЦ2-190/44-100М. Значения собственных и критических частот (табл. 3, 4) и форм колебаний (рис. 5 а, 7), полученные с применением компьютерных программ ANSYS и “Critical frequencies of the rotor”, совпадают для первой критической частоты. Отличие результатов расчётов на 4 %, 9 % и 7 % для 2-й, 3-й и 4-й критических частот соответственно объясняется отличием применяемой двухмерной балочной модели в программе “Critical frequencies of the rotor” от трёхмерной модели в ANSYS, а также фактором дополнительного «ужесточения» ротора насадными деталями при расчёте в ANSYS. Таким образом, полученные результаты подтверждают достоверность предложенной математической модели и обеспечение разработанной программой [9] результатов расчёта с достаточной для практических целей точностью при хорошем согласовании с существующими трёхмерными моделями.

При этом программа “Critical frequencies of the rotor” имеет преимущество по сравнению с процедурой построения диаграммы Кемпбелла в ANSYS, заключающееся в автоматическом расчёте критических частот с учётом любой наперёд заданной аналитической зависимости жесткостей подшипниковых опор от частоты вращения ротора.

Investigation of critical frequencies of the centrifugal compressor rotor with taking into account stiffness of bearings and seals

I. V. Pavlenko¹⁾, V. I. Simonovsky¹⁾, J. Pitel²⁾, A. E. Verbovyi¹⁾, M. M. Demianenko¹⁾

¹⁾ Sumy State University, 2 Rymskogo-Korsakova St., 40007, Sumy, Ukraine;

²⁾ Technical University of Košice, 1 Bayerova St., 08001, Prešov, Slovakia

In this paper the implementation of the mathematical model for rotor free oscillations of centrifugal machines is considered with the use of the computer program “Critical frequencies of the rotor”. The advantage of the program is the possibility of taking into account any advance given analytic dependence of support and seal stiffness on the rotor speed. As a result of numerical calculation on the example of the multistage centrifugal compressor

295GTS2-190/44-100M eigenfrequencies, critical frequencies and corresponding mode shapes are defined. The credibility of the proposed mathematical model is confirmed by theorem of the mutual position for spectrum of eigenfrequencies and correspondent critical frequencies, as well as by comparing the results of dynamic calculation in the program “Critical frequencies of the rotor” with the results of numerical simulation in ANSYS using the 3D finite element model and drawing the Campbell diagram.

Keywords: finite element method, stiffness matrix, matrix of inertia, free oscillations, eigenfrequency, Campbell diagram.



Дослідження критичних частот ротора відцентрового компресора з урахуванням жорсткості опор і ущільнень

І. В. Павленко¹⁾, В. І. Симоновський¹⁾, Я. Пітель²⁾, А. Є. Вербовий¹⁾, М. М. Дем'яненко¹⁾

¹⁾ Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007, Суми, Україна;

²⁾ Технічний університет м. Кошице, вул. Баєрова, 1, 08001, Прешов, Словаччина

У статті розглянута реалізація математичної моделі вільних коливань роторів відцентрових машин із застосуванням комп'ютерної програми "Critical frequencies of the rotor". Перевагою програми є можливість урахування будь-якої наперед заданої аналітичної залежності жорсткості опор і ущільнень від частоти обертання ротора. У результаті чисельного розрахунку на прикладі ротора багатоступінчастого відцентрового компресора 295ГЦ2-190/44-100М визначені власні й критичні частоти ротора та відповідні форми коливань. Достовірність запропонованої математичної моделі підтверджена теоремою про взаємне розміщення спектрів власних і критичних частот, а також шляхом порівняння результатів динамічного розрахунку у програмі "Critical frequencies of the rotor" із результатами чисельного моделювання в ANSYS із застосуванням скінченноелементної 3D-моделі та побудовою діаграми Кемпбелла.

Ключові слова: метод скінченних елементів, матриця жорсткості, матриця інерції, вільні коливання, власна частота, діаграма Кемпбелла.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Vollan, A., Komzsik, L. (2012). Computational techniques of rotor dynamics with the finite element method. *CRC Press, Taylor & Francis Group*.
2. Yamamoto, T., Ishida, Y. (2013). Linear and nonlinear rotordynamics: A modern treatment with applications. *John Wiley & Sons Inc*.
3. Jin, C., Xu, Y., Zhou, J. et al. (2016). Active magnetic bearings stiffness and damping identification from frequency characteristics of control systems. *Hindawi Publishing Corporation*, 1–8. DOI: 10.1155/2016/106756.
4. Wang, T., Wang, F., Bai, H. et al. (2008). Stiffness and critical speed calculation of magnetic bearing-rotor system based on FEA. *Electrical machines and systems ICEMS 2008*.
5. Yoon, S. Y. et al. (2013). Control of surge in centrifugal compressors by active magnetic bearings, advances in industrial control. *Springer-Verlag*.
6. Villa, C., Sinou, J.-J., Thouverez, F. (2008). Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 (4), 804–821.
7. Vance, J., Zeidan, F., Murphy, B. (2010). Machinery vibration and rotordynamics. *John Wiley & Sons Inc*.
8. Комп'ютерна програма "Critical frequencies of the rotor": авторське свідоцтво № 59855, Україна / І. В. Павленко,

REFERENCES

1. Vollan, A., Komzsik, L. (2012). Computational techniques of rotor dynamics with the finite element method. *CRC Press, Taylor & Francis Group*.
2. Yamamoto, T., Ishida, Y. (2013). Linear and nonlinear rotordynamics: A modern treatment with applications. *John Wiley & Sons Inc*.
3. Jin, C., Xu, Y., Zhou, J. et al. (2016). Active magnetic bearings stiffness and damping identification from frequency characteristics of control systems. *Hindawi Publishing Corporation*, 1–8. DOI: 10.1155/2016/106756.
4. Wang, T., Wang, F., Bai, H. et al. (2008). Stiffness and critical speed calculation of magnetic bearing-rotor system based on FEA. *Electrical machines and systems ICEMS 2008*.
5. Yoon, S. Y. et al. (2013). Control of surge in centrifugal compressors by active magnetic bearings, advances in industrial control. *Springer-Verlag*.
6. Villa, C., Sinou, J.-J., Thouverez, F. (2008). Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 (4), 804–821.
7. Vance, J., Zeidan, F., Murphy, B. (2010). Machinery vibration and rotordynamics. *John Wiley & Sons Inc*.
8. Pavlenko, I. V. (2007). Metod skinchennykh elementiv v zadachakh kolyvan' mekhanichnykh system [Finite element method for the problems of mechanical systems oscillations]. *Sumy, Sumy State University* [in Ukrainian].

В. І. Симоновський. – Дата реєстрації 27.05.2015 р.

9. Павленко І. В. Метод скінченних елементів в задачах коливань механічних систем : навч. посіб. / І. В. Павленко. – Суми : Сумський державний університет, 2007. – 179 с.
10. Симоновський В. И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин / В. И. Симоновский. – Харьков : Высшая школа, 1986. – 128 с.
11. Симоновський В. І. Уточнення математичних моделей коливальних систем за експериментальними даними : монографія / В. І. Симоновський. – Суми : Сумський державний університет, 2010. – 91 с.
12. Оцінювання коефіцієнтів жорсткості сегментних підшипників при балансуванні гнучких роторів турбокомпресорів на розгінно-балансувальному стенді / В. Г. Гадяка, В. І. Симоновський // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів». – Суми : Сумський національний аграрний університет, 2005. – № 11 (14). – С. 145–150.
13. Симоновський В. И. Оценивание коэффициентов математических моделей колебательных систем : учеб. пособ. / В. И. Симоновский. – Saarbruecken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 100 с.

9. Pavlenko, I. V., Symonovskiy, V. I. (2015). Kompyuterna programa "Critical frequencies of the rotor" [Computer program "Critical frequencies of the rotor"]. *Certificate of Authorship, Ukraine*, 59855 [in Ukrainian].
10. Simonovskiy, V. I. (1986). Ustoychivost' i nelineyniy kolebaniya rotorov tsentrobezhnykh mashyn [Stability and nonlinear oscillations of the centrifugal machines rotors]. *Khar'kov, Vyshcha shkola* [in Russian].
11. Simonovskiy, V. I. (2010). Utochnennya matematychnykh modeley kolyval'nykh system za eksperymental'nyy danymy [Refinement of the mathematical models for oscillatory systems by experimental data]. Monograph. *Sumy, Sumy State University* [in Ukrainian].
12. Gadyaka, V. G., Simonovskiy, V. I. (2005). Otsinyuvannya koeffitsiyentiv zhorstkosti sehmentnykh pidshypnykiv pry balansuvanni hnuchkykh rotoriv turbokompresoriv na rozginno-balansuval'nomu stendi [Evaluation of segment bearing stiffness while balancing flexible rotors for turbocharge units in the accelerating-balancing stand]. *Bulletin of Sumy National Agrarian University, Series "Mechanization and automation of industrial processes"*, 11 (14), 145–150 [in Ukrainian].
13. Simonovskiy, V. I. (2015). Otsenivaniye koeffitsiyentov matematicheskikh modeley kolebatel'nykh sistem [Evaluation of coefficients for mathematical models of the oscillatory systems]. Saarbruecken : LAP LAMBERT [in Russian].