

Переходы, индуцированные взаимно коррелированными гауссовскими белыми шумами: метод эффективного потенциала

А.Н. Витренко*

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 22.10.2018; в отредактированной форме – 07.02.2019; опубликовано online 25.02.2019)

Рассматривается стохастическая нелинейная система первого порядка с одной динамической переменной, детерминированной силой и двумя взаимно коррелированными гауссовскими белыми шумами, один из которых аддитивный, другой – мультипликативный. Для соответствующего стохастического дифференциального уравнения используется произвольное исчисление, которое, в частности, включает исчисление Ито и исчисление Стратоновича. В виде квадратуры записывается точное выражение эффективного потенциала системы, которое раскладывается в ряд Маклорена. Из общих соображений показывается, что индуцированные взаимно коррелированными гауссовскими белыми шумами переходы от одномодального вероятностного распределения состояния системы к двухмодальному могут качественно описываться нормальной формой бифуркации типа вил, возмущаемой аддитивным гауссовским белым шумом. Её явный вид получен для конкретного примера системы с линейной восстанавливающей силой и мультипликативным шумом, пространственная составляющая которой состоит из аддитивного и мультипликативного шумов, пространственная составляющая динамической переменной и постоянной – при больших. Построенные графики как одноявного, так и двухъявного эффективного потенциала системы для точного выражения и разложенного в ряд хорошо согласуются друг с другом в окрестности нуля – критической точки. Изучены зависимости бифуркационного параметра от параметров шумов. Установлено, что при варьировании коэффициента взаимной корреляции шумов или амплитуды мультипликативного шума бифуркационный параметр изменяется по линейному закону, а при варьировании амплитуды аддитивного шума – по нелинейному.

Ключевые слова: Стохастическая динамическая система, Гауссовский белый шум, Аддитивный шум, Мультипликативный шум, Взаимная корреляция, Индуцированные шумом переходы, Двухмодальное распределение вероятности, Двухъявный потенциал, Бифуркация типа вил

DOI: [10.21272/jnep.11\(1\).01010](https://doi.org/10.21272/jnep.11(1).01010)

PACS numbers: 05.10.Gg, 05.40. – a, 05.70.Fh

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная динамика является междисциплинарной наукой, в которой изучается изменение состояния систем со временем и его причины [1]. Она берет начало в законах Ньютона, опирается на теорию дифференциальных уравнений и затрагивает не только классическую механику и другие разделы физики, но и электронику, химию, биологию, экономику. Центральным понятием динамики служит динамическая система. Различают три типа её поведения: регулярное, хаотическое и стохастическое [2-4].

Стохастическая динамика свойственна системам, подверженным воздействию одного или нескольких источников шума. Причем последние вездесущи и порождаются дискретным строением материи [5], её тепловым или турбулентным движением. В теоретических исследованиях широко применяется так называемый белый шум [4-6], для которого автокорреляция задаётся дельта-функцией, а спектр колебаний, соответственно, приобретает вид плато в бесконечном интервале частот. Он имеет бесконечную мощность и не может быть на практике реализован. Однако любой физический шум с плоским спектром в ограниченном диапазоне частот может быть хорошо аппроксимирован белым шумом, если характерные частоты динамической системы во много раз ниже максимальной шумовой частоты. Примеры: случайная сила, действующая на броуновскую частицу со стороны окружающих её молекул жидкости

(сила Ланжевена); флуктуации электрического напряжения на сопротивлении (шум Джонсона-Найквиста) и многое другое. Ограниченный по частоте белый шум находит и практическое использование, например, в электронике при вычислении частотной характеристики линейных динамических систем – электронных фильтров, усилителей и т.п. [7-8]. Он в качестве зондирующего сигнала подается на вход такой системы. А пропуская выходной сигнал через анализатор спектра, получают искомую зависимость.

Обычно шум является помехой, он оказывает дезорганизующее воздействие на систему, приводя к размазыванию её состояния около среднего значения. Однако в нелинейных динамических системах шум может играть конструктивную роль, как и в явлении индуцированных шумом переходов [6, 9-12], при которых плотность вероятности состояния системы не только расплывается, но и качественно трансформируется, например, из одномодальной в двухмодальную. Можно отметить, что важную роль при экспериментальном исследовании данного явления играют электронные аналоговые схемы [6, 12, 13], содержащие генераторы широкополосного гауссовского шума с постоянной спектральной плотностью.

Влияние мультипликативного и аддитивного шумов, их взаимной корреляции на форму вероятностного распределения состояния некоторых аб-

* a.vitrenko@oepf.sumdu.edu.ua

страктных динамических систем изучается в [14-16]. (Об абстрактных моделях написано, например, в [16,17]). В данной же работе мы записываем эффективный (вероятностный) потенциал и раскладываем его в степенной ряд в окрестности критической точки. Это позволяет переходам, индуцированным взаимно коррелированными шумами, придать не только наглядности, но и исследовать их с помощью теории катастроф [6,12,18]. Согласно неё существует всего несколько форм разложений потенциальных функций в ряд Тейлора. Одной из них является катастрофа типа сборки, с которой связана бифуркация типа вил. Примеры разложений в ряд Тейлора эффективных потенциалов для классических моделей теории индуцированных шумом переходов – генетической модели [19] и модели Хонглера [20] – можно найти в работе [21].

2. МОДЕЛЬ

Стохастическое дифференциальное уравнение динамической системы в общей форме имеет вид [14,15]

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sigma_1 g(x(t))\xi_1(t) + \sigma_2 \xi_2(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ – параметр состояния системы, является случайным процессом, точка – производная по времени t ; $f(x)$ – детерминированная сила, $f(x) = -V'(x)$, $V(x)$ – детерминированный потенциал, штрих – производная по x ; $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – мультипликативный и аддитивный гауссовские белые шумы с амплитудами σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 \geq 0$ и $\sigma_2 \geq 0$, мы говорим «амплитуды» в том смысле, что их квадраты определяют интенсивности шумов), $g(x)$ – пространственная составляющая амплитуды мультипликативного шума (мультипликативный фактор). Средние значения шумов равняются нулю, корреляционные функции задаются выражением:

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \delta(t-t') \begin{cases} 1, & i = j \\ r & i \neq j \end{cases}, \quad (2)$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; r – коэффициент корреляции между шумами, $|r| \leq 1$.

Все величины в (1) безразмерные. Для параметра состояния системы принимаются естественные граничные условия, т.е. $x(t) \in (-\infty, \infty)$. Для мультипликативного шума вводится параметр λ , $\lambda \in [0, 1]$, который устанавливает исчисление стохастического дифференциального уравнения. В частности, значение $\lambda = 0$ соответствует исчислению Ито, значение $\lambda = 1/2$ – исчислению Стратоновича.

Уравнение (1) имеет первый порядок. Если $x(t)$ – координата частицы, например броуновской, тогда её скорость пропорциональна силе. Это случай так называемого сильного затухания. Он соответствует одномерному движению в достаточно вязкой среде, при котором инерционными свойствами частицы можно пренебречь. Если $x(t)$ трактуется как скорость частицы, тогда уже её ускорение пропорционально силе, что согласуется с хорошо известным вторым законом динамики Ньютона. В электронных генера-

торах $x(t)$ – это сила тока, в химической кинетике – концентрация реагента, в динамике биологической популяции – её численность, примеры можно приводить и далее.

Равновесная плотность вероятности того, что $x(t) = x$ при $t \rightarrow \infty$ для системы (1)–(2), имеет вид

$$P(x) = NB^{\lambda-1}(x) \exp \left[\int_0^x \frac{f(y)dy}{B(y)} \right], \quad (3)$$

где N – константа нормировки, определяемая из условия $\int_{-\infty}^{\infty} P(x) = 1$; $2B(x)$ – коэффициент диффузии, равный

$$B(x) = \frac{\sigma_1^2}{2} g^2(x) + r\sigma_1\sigma_2 g(x) + \frac{\sigma_2^2}{2}. \quad (4)$$

Здесь величины $\sigma_1^2/2$ и $\sigma_2^2/2$ – интенсивности мультипликативного и аддитивного шумов.

3. МЕТОД

Для нахождения эффективного потенциала перейдем от уравнения (1) с двумя шумами, учитывая их характеристики (2), к статистически эквивалентному стохастическому дифференциальному уравнению с одним аддитивным шумом:

$$\dot{x}(t) = -U'(x(t)) + \zeta(t), \quad (5)$$

где $U(x)$ – эффективный потенциал, является детерминированной функцией; $\zeta(t)$ – гауссовский белый шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t-t')$. При этом амплитуда эффективного шума $\zeta(t)$ принимается равной единице: все параметры системы (1)–(2) входят в эффективный потенциал $U(x)$. Уравнение (5) описывает одномерное движение воображаемой броуновской частицы во внешнем силовом поле с потенциалом $U(x)$ в приближении сильного затухания. Равновесная плотность вероятности для её координаты x подчиняется экспоненциальному распределению Больцмана:

$$P(x) = Ne^{-2U(x)}. \quad (6)$$

Приравнивая правые части выражений (3) и (6), выразим эффективный потенциал:

$$U(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{f(y)dy}{B(y)} + \frac{1}{2} (1-\lambda) \ln B(x). \quad (7)$$

Он определяется с точностью до произвольной константы. Если амплитуда мультипликативного шума равняется нулю ($\sigma_1 = 0$), тогда выражения (7) и (6), соответственно, примут вид

$$U(x) = \frac{V(x)}{\sigma_2^2} \text{ и } P(x) = N \exp \left[-\frac{2V(x)}{\sigma_2^2} \right].$$

В этом случае потенциалы, эффективный $U(x)$ и детерминированный $V(x)$, качественно одинаковые. Для аддитивного теплового шума его интенсивность

$\sigma_2^2/2$ пропорциональна абсолютной температуре.

Разложим эффективный потенциал (7) в ряд по степеням x в окрестности точки $x=0$ по формуле Маклорена:

$$U(x) = \sum_{k=0}^n u_k x^k, \quad (8)$$

где $u_k = U^{(k)}(0)/k!$ (верхний индекс в круглых скобках обозначает порядок производной). Мы полагаем, что при индуцированных шумами переходах качественные изменения равновесной плотности вероятности системы, а значит и эффективного потенциала, происходят локально в окрестности точки $x=0$ (если же это не так, то можно выполнить соответствующее преобразование координаты). Запишем первую производную эффективного потенциала (7):

$$U'(x) = \frac{F(x)}{2B(x)}, \quad (9)$$

где $F(x) \equiv -f(x) + (1-\lambda)B'(x)$. Для дальнейшего вычисления производных высших порядков от $U(x)$ можно или последовательно дифференцировать выражение (9), или использовать формулу Лейбница для k -ой производной произведения двух функций [22]:

$$U^{(k+1)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^k C_k^m F^{(k-m)}(x) \left[\frac{1}{B(x)} \right]^{(m)}, \quad (10)$$

где C_k^m – биномиальный коэффициент.

В данной работе рассматриваются такие индуцированные шумами переходы, при которых равновесная плотность вероятности системы из одномаксимальной (с одним максимумом) превращается в двухмаксимальную (с двумя максимумами), а эффективный потенциал, соответственно, из одноямы – в двухъямный. Поэтому мы ожидаем, что в разложении (8) для качественного описания можно ограничиться членом четвертого порядка. Из (10) следует

$$\begin{aligned} U''(x) &= \frac{F'}{2B} - \frac{FB'}{2B^2} \\ U'''(x) &= \frac{F''}{2B} - \frac{FB'' + 2F'B'}{2B^2} + \frac{FB'^2}{B^3} \\ U^{(4)}(x) &= \frac{F'''}{2B} - \frac{FB''' + 3F''B'' + 3F'B'^2}{2B^2} \\ &\quad + \frac{3FB'B'' + 3F'B'^2}{B^3} - \frac{3FB'^3}{B^4} \end{aligned} \quad (11)$$

где $F \equiv F(x)$ и $B \equiv B(x)$. Принимая во внимание (9) и (11), ограничимся первыми четырьмя производными коэффициента диффузии (4):

$$\begin{aligned} B' &= \sigma_1^2 gg' + r\sigma_1\sigma_2 g' \\ B'' &= \sigma_1^2 (g'^2 + gg'') + r\sigma_1\sigma_2 g'' \\ B''' &= \sigma_1^2 (3g'g'' + gg''') + r\sigma_1\sigma_2 g''' \\ B^{(4)} &= \sigma_1^2 (3g''^2 + 4g'g''' + gg^{(4)}) + r\sigma_1\sigma_2 g^{(4)} \end{aligned}, \quad (12)$$

где $g \equiv g(x)$.

Выражения (4), (9), (11) и (12) позволяют выразить коэффициенты u_k степенного ряда (8) при $n=4$ непосредственно через детерминированную силу $f(x)$ и мультипликативный фактор $g(x)$, входящие в уравнение (1). Прежде чем конкретизировать их вид, сделаем предположение о симметрии равновесной плотности вероятности системы: $P(-x) = P(x)$. Её график симметричен относительно оси ординат. В этом случае значения в точке $x=0$ нечетных производных эффективного потенциала $U(x)$ равняются нулю. Поэтому

$$U(x) \sim u_2 x^2 + u_4 x^4, \quad x \ll 1 \quad (13)$$

(здесь полагается, что $U(0) = 0$). Коэффициент u_2 принимает как положительные, так и отрицательные значения. При $u_2 > 0$ эффективный потенциал $U(x)$ является одноямыным с минимумом в точке $x=0$, при $u_2 < 0$ – двухъямыным с локальным максимумом в нуле. Типичным примером потенциала вида (13) служит потенциал Ландау-Гинзбурга, применяемый в теории равновесных фазовых переходов. Таким образом, коэффициент u_2 определяет форму эффективного потенциала и играет роль бифуркационного параметра с критическим значением $u_{2cr} = 0$. При этом неравновесные переходы, индуцированные взаимно коррелированными шумами, могут быть качественно описаны нормальной формой бифуркации типа вил, возбуждаемой аддитивным гауссовским белым шумом.

4. ПРИМЕР

Рассмотрим конкретный пример системы (1)–(2):

$$f(x) = -x, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}. \quad (14)$$

Детерминированная сила $f(x)$ принимается линейной восстанавливающей. Соответствующий детерминированный потенциал $V(x)$ параболический (одноямыный). Функции в (14) не содержат каких-либо параметров. Тем самым система (1)–(2) в данном примере характеризуется четырьмя параметрами: $\sigma_1, \sigma_2, r, \lambda$. Можно показать, что любые дополнительные параметры будут избыточны: выполнив соответствующие преобразования координаты и времени, задача сведётся к указанному их числу.

Коэффициенты u_2 и u_4 в (13) являются функциями четырех аргументов. Для нахождения их явного вида запишем первые три производные для $f(x)$ и первые четыре – для $g(x)$:

$$\begin{aligned} f' &= -1, \quad f'' = f''' = 0, \\ g' &= \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad g'' = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}, \\ g''' &= -\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}, \quad g^{(4)} = -\frac{24(1-10x^2+5x^4)}{(1+x^2)^5}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычисляя значения выражений (14) и (15), (4) и (12), (9) и (11) при $x=0$, получим

$$u_2 = \frac{1 + 2(1 - \lambda)r\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_2^2}, \quad (16)$$

$$u_4 = \frac{(1 - \lambda)(\sigma_1^2 - 2r\sigma_1\sigma_2)}{2\sigma_2^2} - \frac{r\sigma_1[1 + 2(1 - \lambda)r\sigma_1\sigma_2]}{2\sigma_2^3}. \quad (17)$$

Из (16) следует, что при $1 + 2(1 - \lambda)r\sigma_1\sigma_2 > 0$ эффективный потенциал одноямный, иначе – двухъямный. Данное условие полностью согласуется с полученным ранее [14,16] из других соображений. Графики эффективного потенциала данной системы представлены на рис. 1, бифуркационного параметра u_2 – на рис. 2.

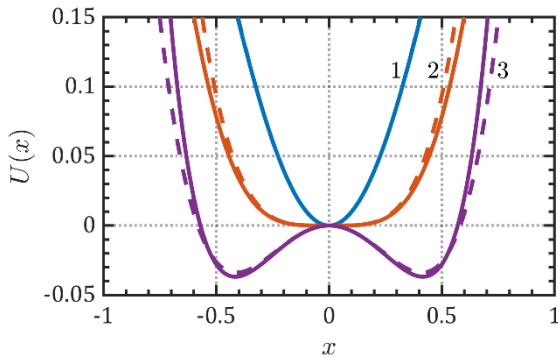
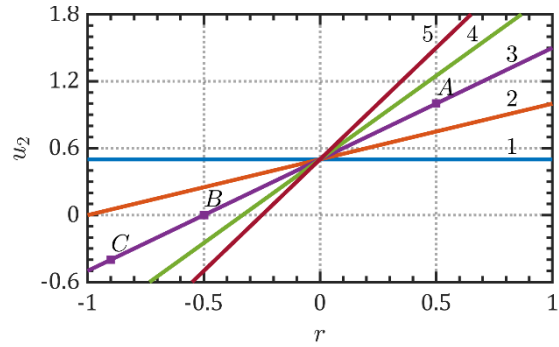
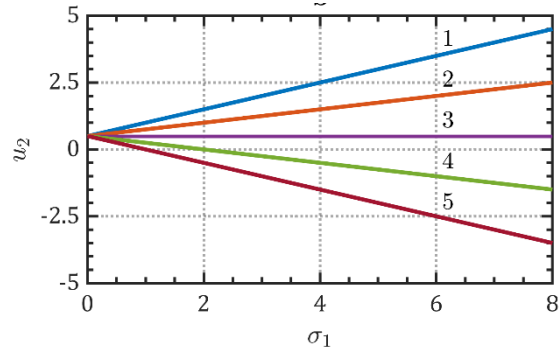


Рис. 1 – Графики эффективного потенциала для точного выражения (7) (сплошная линия) и разложения в ряд Маклорена (13) с коэффициентами (16) и (17) (пунктирная линия) в исчислении Стратоновича ($\lambda = 1/2$) при постоянных амплитудах шумов ($\sigma_1 = 2$ и $\sigma_2 = 1$) и изменяемом коэффициенте взаимной корреляции: (1) $r = 0.5$ ($u_2 > 0$); (2) $r = -0.5$ ($u_2 = 0$); (3) $r = -0.9$ ($u_2 < 0$)

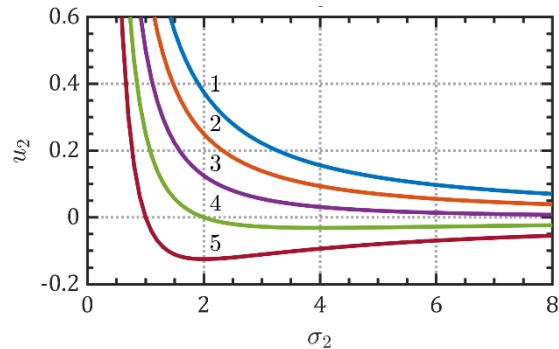
Зависимость бифуркационного параметра u_2 от коэффициента взаимной корреляции r при постоянных амплитудах шумов σ_1 и σ_2 является линейной неубывающей (см. Рис. 2а). Чем больше амплитуда мультипликативного шума σ_1 (при фиксированной амплитуде σ_2), тем больше угол наклона прямой $u_2(r)$. При этом существует такое пороговое значение $\sigma_{cr} = 1/[2(1 - \lambda)\sigma_2]$ (ему соответствует прямая 2), что при $\sigma_1 < \sigma_{cr}$ ни при каком значении r бифуркационный параметр u_2 не будет отрицательным, т.е. в этом случае изменение коэффициента взаимной корреляции шумов не приводит к качественному изменению одномодального распределения состояния системы. При $\sigma_1 > \sigma_{cr}$ существует такое отрицательное пороговое значение $r_{cr} = -\sigma_{cr}/\sigma_1$ (точка *B* на прямой 3), что при $r > r_{cr}$ бифуркационный параметр u_2 положительный, а при $r < r_{cr}$ – отрицательный, т.е. при $r = r_{cr}$ происходит переход от одномодального распределения состояния системы к двухмодальному (эффективный потенциал трансформируется, соответственно, из одноямого в двухъямный как на Рис. 1). При этом чем больше σ_1 , тем больше (по модулю меньше) r_{cr} , причём $r_{cr} \rightarrow 0^-$ при $\sigma_1 \rightarrow \infty$. Отметим, что при увеличении амплитуды аддитивного шума σ_2 при фиксированной амплитуде мультипликативного шума σ_1 угол наклона прямой $u_2(r)$, наоборот, уменьшается, но при этом также уменьшается высота её точки пересечения с вертикальной осью ординат [см. выражение (16)].



а



б



в

Рис. 2 – Графики бифуркационного параметра u_2 для исчисления Стратоновича ($\lambda = 1/2$) в зависимости от: (а) коэффициента взаимной корреляции при $\sigma_2 = 1$ и $\sigma_1 = 0$ (прямая 1), $\sigma_1 = 1$ (прямая 2), $\sigma_1 = 2$ (прямая 3), $\sigma_1 = 3$ (прямая 4), $\sigma_1 = 4$ (прямая 5); (б) амплитуды мультипликативного шума при $\sigma_2 = 1$ и $r = 1$ (прямая 1), $r = 0.5$ (прямая 2), $r = 0$ (прямая 3), $r = -0.5$ (прямая 4), $r = -1$ (прямая 5); (в) амплитуды аддитивного шума при $\sigma_1 = 1$ и $r = 1$ (кривая 1), $r = 0.5$ (кривая 2), $r = 0$ (кривая 3), $r = -0.5$ (кривая 4), $r = -1$ (кривая 5). Для значений u_2 из верхней полуплоскости ($u_2 > 0$) эффективный потенциал одноямный, из нижней – двухъямный. Точки *A*, *B*, *C* соответствуют кривым 1, 2, 3 на рис. 1

Зависимость бифуркационного параметра u_2 от параметра σ_1 при постоянных параметрах r и σ_2 является также линейной (см. Рис. 2б). Причём её характер определяется коэффициентом взаимной корреляции: при $r > 0$ – возрастающий, при $r < 0$ – убывающий, при $r = 0$ – ни возрастающий, ни убывающий (прямая 3). Таким образом, существует такое пороговое значение $r_{cr} = 0$, что при $r > r_{cr}$ (поло-

жительная взаимная корреляция) ни при каком значении амплитуды мультипликативного шума σ_1 бифуркационный параметр u_2 не изменяет свой положительный знак на отрицательный. При $r < r_{cr}$ (отрицательная взаимная корреляция) существует такое пороговое значение $\sigma_{1cr} = -1/[2(1 - \lambda)r\sigma_2]$, что при $\sigma_1 < \sigma_{1cr}$ параметр u_2 положительный, а при $\sigma_1 > \sigma_{1cr}$ — отрицательный. Следовательно, при $\sigma_1 = \sigma_{1cr}$ происходит одномодальный-двухмодальный переход. Причём $\sigma_{1cr} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0-$.

Наконец, зависимость бифуркационного параметра u_2 от амплитуды аддитивного шума σ_2 при постоянных параметрах r и σ_1 , в отличие от рассмотренных ранее, нелинейная (см. Рис. 2с). Её асимптотика при $\sigma_2 \rightarrow \infty$ имеет вид

$$u_2 \sim \begin{cases} (1 \mp \lambda)r\sigma_1/\sigma_2, & r \neq 0 \\ 1/(2\sigma_2^2), & r = 0 \end{cases}$$

т.е. для больших значений σ_2 параметр u_2 стремится к нулю: сверху, если взаимная корреляция неотрицательная, и снизу, если она отрицательная. Таким образом, существует такое пороговое значение $r_{cr} = 0$, что при $r > r_{cr}$ для любых значений амплитуды аддитивного шума σ_2 бифуркационный параметр u_2 положительный. В этом случае зависимость $u_2(\sigma_2)$ монотонно убывающая. Если же $r < r_{cr}$, существует такое пороговое значение $\sigma_{2cr} = -1/[2(1 - \lambda)r\sigma_1]$, что $u_2 > 0$ при $\sigma_2 < \sigma_{2cr}$ и $u_2 < 0$ при $\sigma_2 > \sigma_{2cr}$, т.е. при $\sigma_2 = \sigma_{2cr}$ в системе совершается одномодальный-двухмодальный переход. Для случая отрицательной взаимной корреляции зависимость $u_2(\sigma_2)$ немонотонная с минимумом в точке $\sigma_{2m} = 1/[(1 \mp \lambda)r\sigma_1]$ и $u_{2m} = -(1 - \lambda)^2 r^2 \sigma_1^2 / 2$. По мере увеличения σ_1 он смещается в область малых значений σ_2 и становится

более глубоким.

В завершение несколько слов о коэффициенте u_4 (17). В идеале он должен оставаться положительным, как, например, при $r = 0$. Но в случае $r \neq 0$ найдутся такие значения для σ_1 и σ_2 , при которых u_4 изменит свой знак, т.е. приближенный эффективный потенциал (13) опрокинется, что на самом деле не происходит согласно его точному выражению (7). Но если данная особенность в разложении $U(x)$ и наблюдается, то за пределами малой окрестности критической точки $x = 0$. Отметим, что изменение знака слагаемого 4-ой степени в разложении эффективного потенциала возможно и для генетической модели [18].

5. ВЫВОДЫ

В рамках метода эффективного потенциала из общих соображений показано, что одномодальные-двухмодальные переходы, индуцированные взаимно коррелированными гауссовскими белыми шумами, один из которых аддитивный, другой — мультипликативный, могут качественно описываться нормальной формой бифуркации типа вил, возмущаемой аддитивным гауссовским белым шумом. Её явный вид для системы с линейной восстанавливающей силой и мультипликативным фактором, квадратичным при малых по абсолютной величине значениях динамической переменной и постоянным — при больших, получен впервые. Установлено, что при варьировании коэффициента взаимной корреляции шумов или амплитуды мультипликативного шума бифуркационный параметр изменяется по линейному закону, а при варьировании амплитуды аддитивного шума — по нелинейному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed. (Boca Raton: CRC Press: 2018).
2. Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания, изд. 2-е, доп.* (Москва: Книжный дом "ЛИБРОКОМ": 2009) (Yu.I. Neimark, P.S. Landa, *Stochastic and Chaotic Oscillations* (Dordrecht: Springer: 1992)).
3. V.S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments*, 2nd ed (Berlin: Springer: 2007).
4. К.В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках* (Москва: Мир: 1986) (C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: For the Natural and Social Sciences*, 4th ed. (Berlin, London: Springer: 2009)).
5. Ш.М. Коган, *Электронный шум и флуктуации в твердых телах* (Москва: ФИЗМАТЛИТ: 2009) (Sh. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids* (Cambridge: Cambridge University Press: 2010)).
6. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии* (Москва: Мир: 1987) (W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*, 2nd printing (Berlin: Springer: 2006)).
7. Дж. Бендат, А. Пирсол, *Применения корреляционного и спектрального анализа* (Москва: Мир: 1983) (J.S. Bendat, A.G. Piersol, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, 2nd ed. (New York: Wiley: 2013)).
8. J. Milton, T. Ohira, *Mathematics as a Laboratory Tool: Dynamics, Delays and Noise* (New York: Springer: 2014).
9. L. Ridolfi, P. D'Odorico, F. Laio, *Noise-Induced Phenomena in the Environmental Sciences* (Cambridge: Cambridge University Press: 2011).
10. T. Biancalani, *The Influence of Demographic Stochasticity on Population Dynamics: A Mathematical Study of Noise-Induced Bistable States and Stochastic Patterns* (Cham: Springer: 2014).
11. T. Biancalani, L. Dyson, A.J. McKane, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 38101 (2014).
12. V.V. Semenov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, *Phys. Rev. E* **93**, 52210 (2016).
13. J. Smythe, F. Moss, P.V.E. McClintock, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1062 (1983).
14. S.I. Denisov, A.N. Vitrenko, W. Horsthemke, *Phys. Rev. E* **68**, 046132 (2003).
15. A.N. Vitrenko, I.A. Knyaz', V.S. Budeniy, D.O. Lytvynenko, *J. Nano- Electron. Phys.* **2** No 3, 63 (2010).
16. A.N. Vitrenko, *Cond. Mater.* arXiv:1612.03442 (2016).
17. J.A. Pelesko, *Self Assembly: The Science of Things That Put Themselves Together* (Boca Raton: Chapman & Hall/CRC: 2007) pp. 211–251.
18. В.И. Арнольд, *Теория катастроф, изд. 7-е* (Москва:

- URSS: 2016) (V.I. Arnol'd, *Catastrophe theory, 3rd ed., 2nd printing* (Berlin: Springer: 2004)).
19. L. Arnold, W. Horsthemke, R. Lefever, *Z. Phys. B* **29**, 367 (1978).
20. M.-O. Hongler, *Helv. Phys. Acta* **52**, 280 (1979).
21. R. Toral., *AIP Conf. Proc.* **1332**, 145 (2011).
22. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев, *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, изд. 13-е, испр.* (Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.: 1986) с. 227 (I.N. Bronshtein, K.A. Semendyayev, G. Musiol, H. Mühlig, *Handbook of Mathematics, 6th ed.* (Springer: Berlin: 2015) p. 438).

Transitions induced by cross-correlated Gaussian white noises: an effective potential approach

A.N. Vitrenko

Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

We consider a first-order one-variable stochastic nonlinear system with a deterministic force and two cross-correlated Gaussian white noises, one of them is additive, and the other is multiplicative. We use an arbitrary interpretation of the corresponding stochastic differential equation that includes in particular the Ito interpretation and the Stratonovich one. We write an exact expression for the effective potential for the system in the form of a quadrature, which is expanded into Maclaurin series. It is shown from general considerations that transitions from unimodal to bimodal probability distribution of the system state induced by cross-correlated Gaussian white noises can be qualitatively described by the normal form of the pitchfork bifurcation perturbed by additive Gaussian white noise. Its explicit expression is obtained for a concrete example of the system with a linear restoring force and multiplicative noise, whose state-dependent amplitude is quadratic for small absolute values of the dynamic variable and constant for large ones. We plot graphs of both single-well and double-well effective potentials of the system using the exact expression and the power series approximation. They are in good agreement with each other in the vicinity of the critical point (origin). Relations between the bifurcation parameter and the noise parameters are investigated. It is determined that the bifurcation parameter changes linearly as the cross-correlation coefficient of the noises or the amplitude of the multiplicative noise are varied, and it changes nonlinearly as the amplitude of the additive noise is varied.

Keywords: Stochastic dynamical system, Gaussian white noise, Additive noise, Multiplicative noise, Cross-correlation, Noise-induced transitions, Bimodal probability distribution, Double-well potential, Pitchfork bifurcation

Переходи, індуквані взаємно корельованими гаусівськими білими шумами: метод ефективного потенціалу

А.М. Вітренко

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

Розглядається стохастична нелінійна система першого порядку з однією динамічною змінною, детермінованою силою та двома взаємно корельованими гаусівськими білими шумами, один з яких адитивний, інший – мультиплікативний. Для відповідного стохастичного диференціального рівняння використовується довільне числення, яке, зокрема, включає числення Іто та числення Стратоновича. У вигляді квадратури записується точний вираз ефективного потенціалу системи, який розкладається в ряд Маклорена до четвертого порядку включно. Із загальних міркувань показується, що індуквані взаємно корельованими гаусівськими білими шумами переходи від одномодалого (з одним максимумом – модою) імовірнісного розподілу стану системи до двомодального (з двома максимумами) можуть якісно описуватися нормальною формою біфуркації типу вил, що збурюється єдиним адитивним гаусівським білим шумом. Її явний вид отримано для конкретного прикладу системи з лінійною відновлювальною силою та мультиплікативним шумом, просторова складова амплітуди якого є квадратичною при малих за абсолютною величиною значеннях динамічної змінної й постійною – при великих. Побудовані графіки як одноявного, так і дво'явного ефективного потенціалу системи для точного виразу і розкладеного в степеневий ряд добре узгоджуються один з одним в околі нуля – критичної точки. Вивчено залежності біфуркаційного параметра від параметрів шумів. Встановлено, що при варіюванні коефіцієнта взаємної кореляції шумів або амплітуди мультиплікативного шуму біфуркаційний параметр змінюється за лінійним законом, а при варіюванні амплітуди адитивного шуму – за нелінійним.

Ключові слова: Стохастична динамічна система, Гаусівський білий шум, Адитивний шум, Мультиплікативний шум, Взаємна кореляція, Індуквані шумом переходи, Двомодальний розподіл імовірностей, Дво'явний потенціал, Біфуркація типу вил