



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Шкурдода Ю. О., Пасько О. О., Коваленко О. А.

ФІЗИКА.

МЕХАНІКА, МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету*

Суми
Сумський державний університет

2021

УДК 53(07)
Ш 67

Рецензенти:

А. І. Салтикова – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та методики навчання фізики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка;

С. І. Денисов – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри електроніки, загальної та прикладної фізики Сумського державного університету

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 6 від 24 грудня 2020 року)*

Шкурдода Ю. О.

Ш 67 Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка :
навчальний посібник / Ю. О. Шкурдода, О. О. Пасько,
О. А. Коваленко. – Суми : Сумський державний університет, 2021. –
221 с.

У навчальному посібнику подані науково-навчальні матеріали для вивчення дисципліни «Загальна фізика».

Видання рекомендоване студентам закладів вищої освіти денної, заочної й дистанційної форм навчання за спеціальністю «Середня освіта. Фізика».

УДК 53(07)

© Шкурдода Ю. О., Пасько О. О.,
Коваленко О. А., 2021

© Сумський державний університет, 2021

ЗМІСТ

	С.
ПЕРЕДМОВА.....	9
РОЗДІЛ 1 МЕХАНІКА	11
1.1 Кінематика матеріальної точки.....	11
1.1.1 Завдання кінематики	11
1.1.2 Класичні уявлення про простір і час	11
1.1.3 Основні поняття кінематики. Система відліку	14
1.2 Методи опису руху. Рівняння руху матеріальної точки у векторній і координатній формі.....	17
1.2.1 Векторний метод опису руху.....	17
1.2.2 Координатний метод опису руху	23
1.2.3 Природний метод опису руху.....	25
1.2.4 Тангенціальне і нормальне прискорення ...	26
1.3 Елементи кінематики обертального руху	28
1.3.1 Кутова швидкість і кутове прискорення	28
1.3.2 Лінійні і кутові величини і зв'язок між ними.	31
1.4 Динаміка матеріальної точки	33
1.4.1 Перший закон Ньютона та його наслідки	33
1.4.2 Другий закон Ньютона.....	35
1.4.3 Третій закон Ньютона	42
1.4.4 Перетворення Галілея	43

1.5 Динамічні закономірності.	
Принцип причинності у класичній механіці	44
1.5.1 Основне завдання механіки	44
1.5.2 Принципи класичної механіки та її обмеження	46
1.5.3 Принцип відносності Ейнштейна.....	48
1.6 Робота. Енергія. Потужність	49
1.6.1 Енергія – універсальна міра руху та взаємодії	49
1.6.2 Робота і потужність	51
1.7 Динаміка системи матеріальних точок.....	58
1.7.1 Замкнуті системи.	
Закон збереження імпульсу.....	58
1.7.2 Центр мас. Рух центра мас	61
1.7.3 Рух тіл змінної маси	63
1.7.4 Застосування законів збереження імпульсу та енергії до аналізу пружного і непружного ударів	65
1.7.5 Закон збереження енергії для системи матеріальних точок	68
1.8 Механіка твердого тіла	72
1.8.1 Тверде тіло як система матеріальних точок. Абсолютно тверде тіло. Поступальний і обертальний рух твердого тіла. Миттєві осі обертання. Поняття про ступені вільності і зв'язків	72
1.8.2 Динаміка обертального руху твердого тіла. Момент сили. Момент інерції.	

Момент імпульсу матеріальної точки. Закон збереження моменту імпульсу матеріальної точки	74
1.8.3 Пара сил	77
1.8.4 Основний закон динаміки обертального руху. Обчислення моменту інерції твердого тіла	79
1.8.5 Вільні осі обертання твердого тіла. Гіроскопи	86
1.9 Сили тертя і сили пружності	89
1.9.1 Сили тертя. В'язке тертя. Формула Стокса. Закони сухого тертя. Тертя спокою і тертя ковзання	89
1.9.2 Сухе тертя.....	91
1.9.3 Тертя кочення.....	93
1.10 Елементи механіки рідин і газів.....	95
1.10.1 Тиск у рідинах і газах. Закон Паскаля. Закон Архімеда.....	95
1.10.2 Рівняння Бернуллі. Реакція рідини, що витікає	100
1.10.3 Рух в'язкої рідини. В'язкість. Формула Пуазенля	103
1.11 Коливання і хвилі	109
1.11.1 Рух тіл під дією пружних і квазіпружних сил. Вільні коливання лінійного гармонічного осцилятора. Диференціальне рівняння власних коливань і його розв'язок	109
1.11.2 Енергія гармонічного осцилятора.....	111
1.11.3 Математичний маятник.....	111

1.11.4 Фізичний маятник.....	113
1.12 Згасальний гармонічний осцилятор.....	115
1.12.1 Диференціальне рівняння згасальних коливань і аналіз його розв'язку, рівняння руху, коефіцієнт згасання, аперіодичний рух.....	115
1.12.2 Вимушені коливання.....	118
1.13 Пружні хвилі.....	121
1.13.1 Поширення хвиль. Хвильовий рух. Фронт хвилі. Поперечні й повздовжні хвилі.....	121
1.13.2 Рівняння плоскої хвилі. Хвильове рівняння. Енергія хвилі, потік енергії. Вектор Умова.....	125
1.13.3 Принцип Гюйгенса. Когерентні хвилі. Інтерференція хвиль. Утворення стоячої хвилі.....	128
1.14 Елементи акустики.....	131
1.14.1 Природа звуку. Швидкість звуку.....	131
1.14.2 Поширення звукових хвиль. Інтенсивність звуку.....	133
1.14.3 Джерела звуку.....	135
1.14.4 Ефект Доплера.....	138
1.14.5 Ультразвук та його застосування.....	141
РОЗДІЛ 2 МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА	
I ТЕРМОДИНАМІКА.....	144
2.1 Основи молекулярно-кінетичної теорії (МКТ).....	144
2.1.1 Основні поняття молекулярної фізики.....	144
2.1.2 Температура.....	147

2.2 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу	150
2.2.1 Статистичний характер тиску та температури	150
2.2.2 Рівняння стану ідеального газу	153
2.2.3 Газові закони.....	153
2.3 Розподіл Максвелла	156
2.3.1 Розподіл молекул за модулем швидкості	156
2.3.2 Характеристичні швидкості. Найбільш ймовірна швидкість.....	158
2.3.3 Середня швидкість	159
2.3.4 Розподіл молекул за відносною швидкістю	160
2.4 Явище переносу в ідеальному газі	163
2.4.1 Зіткнення молекул, середня довжина вільного пробігу	163
2.4.2 Дифузія. Рівняння Фіка. Коефіцієнт дифузії	165
2.4.3 В'язкість. Рівняння Ньютона. Коефіцієнт в'язкості	168
2.4.4 Теплопровідність. Рівняння Фур'є. Коефіцієнт теплопровідності	169
2.5 Елементи термодинаміки	171
2.5.1 Кількість теплоти. Теплопровідність	171
2.5.2 Застосування першого закону термодинаміки для вивчення термодинамічних процесів в ідеальному газі.....	174

2.6 Другий закон термодинаміки.....	180
2.6.1 Постулати другого закону термодинаміки.....	180
2.6.2 Аналітичне формулювання другого закону термодинаміки для оборотних процесів.....	183
2.6.3 Основне рівняння термодинаміки для оборотних процесів. Розрахунок зміни ентропії за оборотних процесів	186
2.6.4 Аналітичне формулювання другого закону термодинаміки для необоротних процесів.....	187
2.6.5 Третій закон термодинаміки	190
2.7 Реальні гази.....	191
2.7.1 Рівняння Ван-дер-Ваальса.....	191
2.7.2 Ізотерми Ван-дер-Ваальса.....	194
2.7.3 Зведене рівняння Ван-дер-Ваальса	200
2.8 Рідкий стан речовини	200
2.8.1 Загальна характеристика стану. Особливості поверхневого шару рідини.....	200
2.8.2 Особливості поверхневого шару рідини.....	202
2.8.3 Тверде тіло.....	204
2.8.4 Пружні деформації.....	207
2.8.5 Перехід у твердий стан.....	209
2.8.6 Діаграма стану. Потрійна точка	212
2.8.7 Фазові переходи 1-го і 2-го роду	213

Передмова

Метою вивчення фізики в закладах вищої освіти є ознайомлення здобувачів освіти з основними фізичними явищами, їхніми механізмами, закономірностями та практичним застосуванням. Правильні уявлення про природу фізичних явищ особливо важливі у процесі практичної діяльності вчителя фізики.

Загальний курс фізики для студентів педагогічних спеціальностей закладів вищої освіти є фундаментом, без якого неможливо підготувати кваліфікованих вчителів фізики. Різде скорочення годин, насамперед аудиторного часу, які надають на вивчення курсу фізики, вимагає винесення значної частини питань загального курсу фізики для самостійного опрацювання студентами. На сьогодні існує велика кількість підручників для засвоєння лекційного матеріалу з курсів загальної фізики різних ступенів складності, обсягу, якості подання матеріалу, виданих в Україні та за її межами (див. список літератури). Але переважна більшість посібників зорієнтована на інженерні та технічні спеціальності. Крім того, кількість посібників, які допомогли б студенту знаходити відповіді на запитання, що стосуються фундаментальних питань фізики, сприяли б більш глибокому розумінню суті розглянутих на лекційних заняттях фізичних явищ, досить обмежена.

Викладачами кафедри електроніки, загальної та прикладної фізики Сумського державного університету накопичений значний досвід із викладання фізики в педагогічних ЗВО. Усе це спонукало авторів до написання цього посібника з метою допомогти студентам педагогічної спеціальності в їхній самостійній роботі більш глибоко зрозуміти лекційний матеріал із загальної фізики.

Посібник структурований за двома розділами – «Механіка» та «Молекулярна фізика й термодинаміка», у кожному з яких наведені визначення основних фізичних величин і понять, сформульовані та обґрунтовані основні закони поступального та обертального механічних рухів. Для більшості фізичних співвідношень наведені їхні математичні обґрунтування. Водночас посібник не перевантажений складними математичними викладками і для сприйняття матеріалу достатньо знань студентів із курсу математичного аналізу, вивчення якого передбачено на першому році навчання.

У запропонованому посібнику, на думку авторів, матеріал викладений стисло й логічно, наведений опис широкого кола явищ та узагальнена таблиця не лише аналогій між фізичними величинами, які характеризують поступальний і обертальний рухи, а й усього курсу. Указані відмінності у фізичному розумінні порівняно з математичним розумінням таких фундаментальних понять, як нескінченно мала величина, похідна, інтеграл тощо.

Текстовий матеріал супроводжує значна кількість ілюстрацій, що підвищує наочність і певною мірою покращує сприйняття матеріалу. У посібнику використана Міжнародна система одиниць. Розмірність фізичної величини подана через символ «dim», а одиниці вимірювання фізичної величини вказані у квадратних дужках. Структура посібника, написання фізичних величин, їхніх розмірностей тощо подана згідно з ДСТУ [1–5]. Зазначене дещо відрізняє цей посібник від інших, подібних йому.

Автори висловлюють щире подяку проф. І. Ю. Проценку та проф. Л. В. Одноворець за надані консультації щодо написання методичних аспектів посібника, а також рецензентам за зауваження, дружні поради й пропозиції, які значно поліпшили текст посібника.

РОЗДІЛ 1 МЕХАНІКА

1.1 Кінематика матеріальної точки

1.1.1 Завдання кінематики

Механіка – це розділ фізики, який вивчає рух або зміну руху тіла у просторі з плином часу. Основний принцип механіки полягає в положенні, що будь-який механічний рух можна розкласти на два види рухів – поступальний і обертальний. *Основне завдання механіки* – знайти положення матеріальної точки в будь-який момент часу. Механіка поділяється на кінематику, динаміку та іноді як окремий розділ виділяють статику.

Кінематика вивчає рух тіла або його зміну, не вказуючи на причини, які їх зумовлюють. Пряме завдання кінематики: маючи закон руху матеріальної точки, треба отримати її швидкість і прискорення. Зворотне завдання кінематики полягає у визначенні закону руху матеріальної точки, якщо відомі закони зміни в часі швидкості або прискорення. Пряме завдання кінематики розв'язують за допомогою математичної операції диференціювання. Зворотне завдання кінематики розв'язують за допомогою математичної операції інтегрування.

1.1.2 Класичні уявлення про простір і час

Безперервний рух матерії відбувається у **просторі й часі**, які є формами **існування** матерії та є своєрідною «ареною», на якій протікають різноманітні фізичні процеси.

У світі немає матерії, якій не були б притаманні просторово-часові властивості, як не існує простору й часу окремо від матерії та незалежно від неї.

В основу класичної фізики І. Ньютон поклав концепцію **абсолютного простору**, згідно з якою допустиме об'єктивне існування простору, незалежно від матеріальних тіл і фізичних процесів, які в ньому протікають, у тому розумінні, що вони ніяк не впливають на властивості простору.

Абсолютний простір – це абсолютна порожнеча, яка нескінченна, нерухома, неперервна, тривимірна і нерозривно зв'язана з матерією, оскільки у світі немає жодного об'єкта поза простором. Метричні властивості простору у класичній фізиці повністю описують сукупності аксіом геометрії Евкліда. Саме з цієї причини зазначений простір називають **евклідовим**.

Характерні риси евклідового простору щодо **інерціальних систем відліку** (ICB) є такими:

– простір є **однорідним**, тобто всі точки простору є фізично еквівалентними, рівноцінними; це означає, що у просторі не існує особливих точок і початок системи відліку (СВ) можна обрати в довільній точці простору;

– простір є **ізотропним** (від *isos* – рівний, однаковий і *trapos* – поворот), тобто всі напрямки у просторі еквівалентні; це означає незмінність фізичних законів щодо вибору напрямку координатних осей системи відліку (щодо її повороту на довільний кут).

Під **часом** йдеться про властивість матеріальних процесів мати певну тривалість, здійснюватись один за одним у певній послідовності, розвиватися за стадіями та етапами [1, 6]. Час не є окремим від матерії та її руху, він є однією з форм існування матерії. Немає сенсу розглядати час, який є сам собою, уявлення про плин часу поза зв'язком із матеріальними процесами є безглуздим. Модель реального часу у класичній механіці – так званий ньютонівський час. Класична механіка Ньютона постулює

абсолютний час. Це означає, що ньютонівський час можна розглядати як одновимірну Евклідову пряму, кожна точка якої відповідає деякому моменту часу.

Абсолютний час є додатною, скалярною та незалежною фізичною величиною. Його розглядають відособлено від простору, він є:

– безвідносним до будь-чого зовнішнього, тобто не піддається впливу інших об'єктів;

– нескінченним і неперервним;

– одновимірним, тобто таким, що рівномірно змінюється в одному напрямку від минулого до майбутнього;

– у разі зміни часу у фізиці розрізняють такі поняття: **початковий момент часу (початок відліку)** – момент часу t_0 , з якого починається його відлік; вибір початкового моменту часу довільний і визначається характером задачі, яку розв'язують, а в разі, коли початок механічного руху збігається з початком відліку часу, то $t_0 = 0$;

– **проміжок часу Δt** – це різниця між наступним t_2 і попереднім t_1 значеннями часу, тобто $\Delta t = t_2 - t_1$, а в разі, коли попереднім значенням часу є початковий момент, причому він збігається з початком відліку часу ($t_1 = t_0 = 0$), тоді $\Delta t = t$ – час, який минув із початку руху до даного моменту;

– **момент часу** – межа між двома суміжними проміжками часу.

У класичній фізиці час є **однорідним** щодо інерціальних систем відліку, тобто в ньому відсутні особливі моменти і будь-який момент часу можна взяти за початок його відліку.

1.1.3 Основні поняття кінематики. Система відліку

Матеріальна точка – це макроскопічне тіло деякої маси, формою та розмірами якого за даних умов можна знехтувати. Під макроскопічним тілом йдеться про тіло, до якого можна застосувати закони Ньютона. Одне й теж саме тіло в одних випадках можна вважати матеріальною точкою, а в інших – ні. Критерієм, що дозволяє вважати тіло матеріальною точкою, є виконання таких умов: розміри тіла набагато менші за відстані, які воно долає; тіло рухається поступально. Ознакою поступального руху є те, що всі точки тіла під час руху переміщуються однаково, і якщо на тілі провести довільний відрізок, він буде переміщуватися паралельно самому собі. Наприклад, розглядаючи рух планет навколо Сонця, ці тіла можна вважати матеріальними точками, оскільки їхні розміри дуже малі порівняно з розмірами орбіт. Проте Землю неможливо вважати матеріальною точкою в задачах, пов'язаних із рухом тіл на поверхні Землі.

Абсолютно твердим тілом називають тіло, відстань між будь-якими двома точками якого завжди залишається незмінною за усіляких випробувань. Наведені вище поняття цілком абстрактні, але їхнє використання значно полегшує розв'язування конкретних фізико-механічних задач.

Усі тіла матеріального світу рухаються у просторі та часі. Під **рухом** йдеться про зміну положення матеріальної точки щодо деякого тіла (тіл), умовно взятого за нерухоме, з плином часу. Для однозначного визначення положення деякого тіла в довільний момент часу необхідно вибрати систему відліку. Положення деякого тіла у просторі може бути визначене тільки щодо іншого довільно визначеного тіла, яке отримало назву *тіла відліку*. Умовно нерухоме тіло відліку, жорстко зв'язана з ним система координат і вибраний спосіб вимірювання часу отримали назву *системи відліку*. Кількість незалежних координат, які

повністю визначають положення матеріальної точки у просторі, називається числом ступенів свободи.

Траєкторією руху матеріальної точки називається лінія у просторі, яку описує під час свого руху матеріальна точка, щодо вибраної системи відліку. Залежно від форми траєкторії рух тіла може бути прямолінійним або криволінійним. Якщо траєкторія руху – пряма, то такий рух *прямолінійний*, в інших випадках – *криволінійний*. Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку. Наприклад, траєкторія точки на колесі, що котиться горизонтальною поверхнею, має різну форму залежно від обраної системи відліку. Щодо осі колеса це – коло щодо поверхні, якою котиться колесо, – пряма лінія щодо спостерігача, що стоїть осторонь, – циклоїда. Важливо зауважити, що під час будь-якого руху матеріального тіла з визначеною траєкторією у власній СВ траєкторія самого тіла, як і будь-якої його точки, взагалі відсутня через те, що у власній СВ матеріальне тіло перебуває у стані спокою.

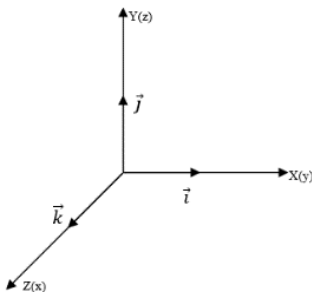


Рисунок 1.1 –
Означення декартової
системи координат

Для повного задання положення матеріальної точки у просторі необхідно мати систему відліку й передбачити відлік часу. Тобто, відзначають, що необхідно мати просторово-часові характеристики. Як систему відліку ми будемо використовувати правоїдеальну прямокутну декартову систему координат.

Зазначаючи про рух і спокій, необхідно завжди вказувати систему відліку, щодо якої їх розглядають. Траєкторія, як і рух, є поняттям відносним.

Положення матеріальної точки у вибраній системі координат можна однозначно визначити, якщо задані її координати x , y , z щодо вибраної системи координат і визначений спосіб відліку часу. Крім того, положення матеріальної точки у просторі можна охарактеризувати за допомогою радіус-вектора \mathbf{r} .

Радіус-вектор – це напрямлений відрізок, який з'єднує початок координат із положенням матеріальної точки з координатами x , y , z у просторі.

Очевидно, радіус-вектор \mathbf{r} у певний спосіб зв'язаний із координатами x , y , z , цей зв'язок можна пояснити рівнянням

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти), напрямлені вздовж відповідних осей координат.

У подальшому під час опису руху ми будемо користуватися поняттями переміщення і шляху.

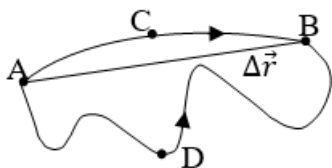


Рисунок 1.2 – Пояснення переміщення і шляху

Переміщення – це напрямлений відрізок, який з'єднує початкове положення тіла з кінцевим його положенням.

Шлях – це довжина траєкторії рухомого тіла.

Переміщення є величиною векторною, шлях – скалярною. У разі прямолінійного руху в одному напрямку шлях і модуль переміщення однакові. На рисунку 1.2 АСВ та АДВ – шлях; АВ – переміщення.

Необхідно пам'ятати, що радіус-вектор і переміщення є різними поняттями.

1.2 Методи опису руху. Рівняння руху матеріальної точки у векторній і координатній формі

Описати рух, або знайти закон руху означає знайти залежність положення МТ у просторі від часу. Існують три способи опису руху матеріальної точки: векторний (за допомогою радіус-вектора \vec{r}), координатний (через координати x, y, z) і так званий природний (за відомою траєкторією руху точки щодо вибраної СВ). Априорі ці способи рівноправні й вибір одного з них зазвичай пов'язують із умовою конкретної задачі.

1.2.1 Векторний метод опису руху

Будемо вважати, що матеріальна точка рухається з положення 1 у положення 2 за довільною траєкторією 1A2. Якщо взяти за початок координат точку О, то її радіус-вектор у початковому положенні буде \vec{r}_1 , радіус-вектор точки в кінцевому положенні буде \vec{r}_2 . Переміщення матеріальної точки водночас буде рівним Δr (рис. 1.3).

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (1.2)$$

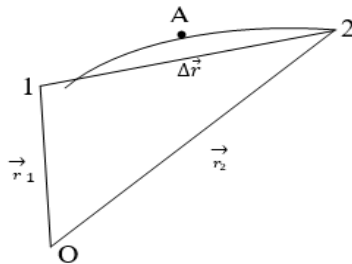


Рисунок 1.3 – Введення основних характеристик руху

Якщо відоме початкове положення матеріальної точки та функціональна залежність вектора переміщення від часу $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то можна визначити положення рухомої точки в будь-який момент часу, тобто розв'язати основне завдання механіки.

Рух називають *рівномірним*, якщо за будь-які однакові інтервали часу матеріальна точка здійснює однакові переміщення. Рівномірний рух характеризується векторною величиною – швидкістю, яка залишається незмінною за модулем і напрямом протягом усього часу руху.

Швидкістю рівномірного руху називають відношення вектора переміщення матеріальної точки до інтервалу часу, за який це переміщення відбулося

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{t}. \quad (1.3)$$

Одиницею вимірювання швидкості є метр за секунду $[v] = \text{м/с}$.

Якщо ж під час руху швидкість матеріальної точки змінюється, такий рух називається нерівномірним. Нерівномірні рухи характеризуються середньою швидкістю.

Середньою швидкістю нерівномірного руху називається відношення переміщення матеріальної точки до проміжку часу, за який воно відбулося.

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Знаходження середньої швидкості недостатньо для розв'язання основного завдання механіки. Наприклад, коли тіло вдаряється об перешкоду, то його дія на неї визначається саме швидкістю в момент удару, а не

середньою швидкістю. Тому для нерівномірного руху вводять поняття миттєвої швидкості.

Розглянемо відношення переміщення тіла за деякий інтервал часу Δr до цього інтервалу часу Δt , зменшуючи останній. Тоді для певного проміжку часу dt настане ситуація, коли переміщення Δr буде нескінченно малим, – відрізнити перше положення r_1 від другого r_2 буде практично неможливо, отже, подальше їхнє зменшення втрачає практичний зміст. Якщо проміжок часу руху матеріальної точки досить малий $\Delta t \approx dt$, то переміщення точки $\Delta r \approx dr$. Тоді середня швидкість за дуже малий інтервал часу і буде швидкістю тіла в даний момент часу або в даній точці.

Миттєва швидкість – границя відношення вектора переміщення матеріальної точки до інтервалу часу, за який воно відбулося, коли останній прямує до нуля.

$$\vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.5)$$

Зважаючи на рівняння (1.1), матимемо

$$\begin{aligned} \vec{v}_m &= \frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де v_x, v_y, v_z – проєкції на вісі координат.

Модуль миттєвої швидкості через складові може бути записаний так:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.7)$$

Миттєва швидкість співнапрявлена з переміщенням $d\vec{r}$. Оскільки за означенням $\vec{v}_m = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то миттєва швидкість буде напрямлена за дотичною до траєкторії в даній точці.

У разі прямолінійного рівномірного руху середня та миттєва швидкості матеріальної точки однакові під час усього руху.

Швидкість матеріальної точки під час її руху, зазвичай, не залишається незмінною, а з плином часу змінюється за значенням, за напрямом або і за значенням, і за напрямом одночасно. Зміну швидкості руху характеризує прискорення.

Щоб знайти прискорення руху тіла, треба визначити зміну вектора швидкості Δv за певний інтервал часу Δt : $\vec{a}_{\text{сєр.}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. У цьому разі мова йде про так зване середнє прискорення. Зазвичай його називають просто прискоренням. У рівнозмінному русі прискорення стає.

На підставі з означення вектором миттєвого прискорення є величина

$$\begin{aligned} \vec{a}_m &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \\ &= \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \end{aligned} \quad (1.8)$$

або у скалярному вигляді

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (1.9)$$

Миттєве прискорення – це перша похідна швидкості за часом або друга похідна шляху за часом.

Прискорення характеризує швидкість зміни швидкості і напрямлене так, як вектор $d\vec{v}$, а не як вектор \vec{v} ($a \parallel d\vec{v}$).

Одиниця вимірювання прискорення $[a] = \text{м/с}^2$.

Повернемося до розгляду векторного методу описування руху. Під час руху матеріальної точки її радіус-вектор є функцією часу $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Це рівняння називається рівнянням руху, і основне завдання полягає в тому, щоб знайти його в явному вигляді.

Будемо вважати, що матеріальна точка рухається із точки 1 у точку 2, здійснивши одночасно переміщення Δr і пройшовши шлях ΔS (рис. 1.4). Якщо проміжок часу руху матеріальної точки досить малий ($\Delta t \rightarrow 0$), то модуль переміщення і шлях будуть збігатись.

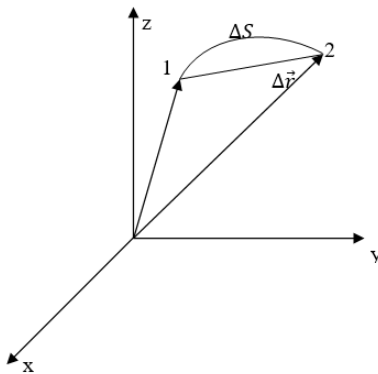


Рисунок 1.4 – Векторний метод опису руху

Використовуючи поняття миттєвої швидкості та миттєвого прискорення, можемо записати

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.10)$$

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.11)$$

Інтегруючи ліву і праву частини рівнянь (1.10) і (1.11), будемо матимемо

$$\int d\vec{v} = \int \vec{a}_M dt.$$

Якщо в початковий момент часу $t = 0$ початкова швидкість дорівнює v_0 , а через час $t - v$, то

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} a\vec{v} = \int_0^t \vec{a}_M dt.$$

Після інтегрування одержимо

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t \text{ або } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (1.12)$$

за умови, що $\vec{a} = \text{const}$.

Оскільки $d\vec{r} = \vec{v}dt$, можемо записати: $d\vec{r} = (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt$ або, інтегруючи $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt$,

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad (1.13)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \quad (1.13')$$

У рівняння (1.12) і (1.13) входять вектори, величини яких характеризуються не лише модулем, а й напрямком.

Векторний метод, зазвичай, застосовують для теоретичного опису руху.

1.2.2 Координатний метод опису руху

Під час руху матеріальної точки її координати з часом змінюються: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. Ці рівняння називають рівняннями руху. На підставі означення швидкості та прискорення можемо записати, що

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}; a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Вектор загальної швидкості та вектор загального прискорення будуть складати певний кут з осями координат.

Цей кут можна визначити за допомогою напрямних косинусів. Для осі Ox , наприклад, матимемо

$$\cos(\vec{v} \wedge \vec{x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \quad (1.14)$$

$$\cos(a^x) = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (1.15)$$

Для інших осей будуть аналогічні вирази. Закон зміни координат із часом для вісі Ox

$$dx = v_x dt; dv_x = a_x dt.$$

Інтегруючи ці рівняння, одержимо

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt;$$
$$v_x - v_{0x} = a_x t, \quad (1.16)$$

за умови

$$a_x = \text{const.}$$

Інтегруючи рівняння $dx = v_x dt$, матимемо

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt;$$
$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_x + a_x t) dt;$$
$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.17)$$

Якщо розглядати рух тіла в одному напрямку, то осьові індекси можна опустити, і тоді рівняння (1.16) і (1.17) можна записати у вигляді

$$v = v_0 + at, \quad (1.18)$$

$$x - x_0 = S; x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.19)$$

Отримані рівняння дають змогу розв'язати основне завдання механіки для випадків рівномірного та рівнозмінного руху. Для цього необхідно знати початкові умови (x_0 та v_0) та прискорення a .

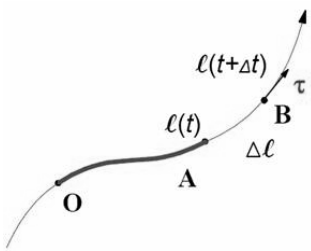
Забравши із рівняння (1.18) і (1.19) час руху (t), одержимо рівняння

$$v^2 - v_0^2 = 2aS. \quad (1.20)$$

Якщо $a = 0$, то $v = v_0$, і рух називають рівномірним, якщо $a = \text{const} \neq 0$, такий рух називають рівнозмінним.

1.2.3 Природний метод опису руху

Цим методом можна користуватися, якщо відома траєкторія руху матеріальної точки. У багатьох випадках за координату визь зручно взяти саму криву траєкторії.



Нехай рух відбувається вздовж кривої L (рис. 1.5). Виберемо точку відліку O і позитивний напрямок осі. Положення рухомої матеріальної точки на кривій однозначно визначається довжиною частини кривої, що з'єднує її з початком відліку O , та називається дуговою координатою точки (l). Отже, закон руху у природному методі задають у вигляді $l = l(t)$.

Рисунок 1.5 –
Природний спосіб
опису руху

Зміна положення точки за час Δt визначається приростом дугової координати $\Delta l = l(t + \Delta t) - l(t)$.

Швидкість у природному методі – це перша похідна дугової координати за часом

$$v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}. \quad (1.21)$$

Вектор швидкості виразимо за допомогою одиничного вектора $\tau = dr/dl$, який буде напрямлений за дотичною в будь-якій точці траєкторії

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dl}{dt} = \vec{\tau}v. \quad (1.22)$$

Прискорення матеріальної точки за означенням буде дорівнювати

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau}v) = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}v.$$

Нескладно довести [57], що вектор $d\vec{\tau}/dt$ ортогональний (перпендикулярний) вектору $\vec{\tau}$ і його абсолютне значення дорівнює $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n} \frac{v^2}{R}$, де \vec{n} – вектор, напрямлений за нормаллю до траєкторії руху матеріальної точки, R – радіус кривизни траєкторії. Отже, маємо

$$\vec{a} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \frac{v^2}{R}.$$

Рух матеріальної точки за довільною траєкторією можна подати у вигляді одночасного поступального руху вздовж дотичної до траєкторії зі швидкістю v та обертального руху з доцентровим прискоренням $a = \frac{v^2}{R}$.

1.2.4 Тангенціальне і нормальне прискорення

Розглянемо більш детально питання про напрямок, тобто орієнтацію прискорення щодо швидкості і траєкторії руху. Миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t завжди дотична до траєкторії руху. Це означає, що прискорення може бути спрямоване під будь-яким кутом до дотичної до траєкторії руху [1].

Будемо вважати, що матеріальна точка рухається за довільною траєкторією так, що її швидкість із часом змінюється як за напрямком, так і за величиною.

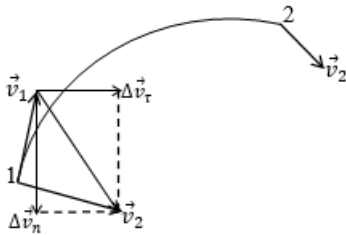


Рисунок 1.6 –
Пояснення нормального
та тангенціального
прискорення

Приведемо вектори \vec{v}_1 і \vec{v}_2 до спільного початку. Тоді $\Delta\vec{v}$ буде виражати зміну швидкості. Часто його зручно виражати у вигляді двох взаємно перпендикулярних векторів: $\Delta\vec{v}_\tau$ напрямлений за дотичною до траєкторії, $\Delta\vec{v}_n$ – по центру траєкторії,

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n, \quad (1.23)$$

якщо зміна швидкості відбувається за досить короткий проміжок часу, то, поділивши ліву і праву частини на цей час (1.23), одержимо

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}.$$

Замінюючи малі величини, можемо записати так:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}; \\ \vec{a} &= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \end{aligned} \quad (1.24)$$

\vec{a}_τ – напрямлений за дотичною до траєкторії і визначає зміну швидкості за величиною (модулем); $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$ – напрямлений за нормаллю до траєкторії, тобто до центра кривизни, і визначає зміну швидкості за напрямком.

Для визначення модуля повного прискорення справедливим буде співвідношення

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1.25)$$

1.3 Елементи кінематики обертального руху

1.3.1 Кутова швидкість і кутове прискорення

Тіло, яке обертається навколо осі, матеріальною точкою вважати не можна. Тому для опису його руху тверде тіло розбивають на нескінченну кількість матеріальних точок і до кожної з них застосовують закони динаміки. Але такий підхід є досить громіздким, і тому для спрощення розв'язання задач вводять фізичні величини, аналогічні величинам поступального руху.

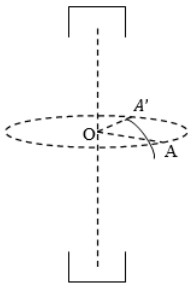


Рисунок 1.6 –
Основні
характеристики
обертального
руху

Будемо вважати, що довільне тверде тіло обертається навколо деякої закріпленої осі. Виберемо довільну точку А й опустимо перпендикуляр у точку О на вісь обертання (рис. 1.6).

Через деякий час Δt точка буде в новому положенні A' , повернувшись на кут $\Delta\varphi$, причому на такий самий кут повернуться всі точки, розташовані на радіусі OA , і взагалі всі точки твердого тіла. З вищезгаданого зрозуміло, що замість даного твердого тіла можна розглядати рух по колу з центром у точці O однієї матеріальної точки навколо деякої осі обертання.

Нехай матеріальна точка рухається по колу з радіус-вектором \vec{r} , у початковий момент часу її радіус \vec{r}_1 (див. рис. 1.6). Через деякий час Δt точка буде

в новому положенні з радіус-вектором \vec{r}_2 , повернувшись одночасно на кут $\Delta\varphi$ і виконавши переміщення $\Delta\vec{r}$.

Оскільки $\Delta\vec{r}$ – вектор, то формально кут повороту $\Delta\varphi$ теж можна вважати вектором, водночас повинно виконуватися співвідношення

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}]. \quad (1.26)$$

Співвідношення (1.26) визначає векторний добуток векторів $d\vec{\varphi}$ і $d\vec{r}$, такий добуток є вектором, напрям якого визначають за правилом правого гвинта.

У скалярному вигляді (1.26) можна записати так:

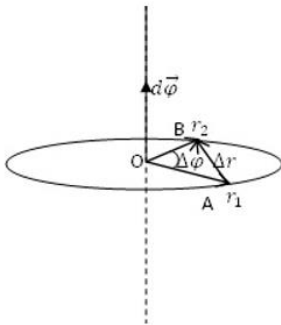


Рисунок 1.7 – Основні характеристики обертального руху

$$dr = d\varphi \cdot r \cdot \sin(d\varphi^r).$$

Або в цьому разі $dr = d\varphi r$ (оскільки $\sin 90^\circ = 1$).

Величина $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ буде визначати середню **кутову швидкість** руху, є величиною скалярною.

Вимірюють $[\omega] = \text{с}^{-1} = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Миттєву кутову швидкість визначають як

$$\vec{\omega}_M = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (1.27)$$

напрямок цієї швидкості визначають за правилом правого гвинта. Зазвичай точкою прикладання є центр обертання, і швидкість буде збігатися з віссю обертання.

Швидкість зміни кутової швидкості характеризується **кутовим прискоренням**. Миттєве кутове прискорення визначають як

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}_M}{dt}. \quad (1.28)$$

З (1.28) бачимо, що кутове прискорення співнапрявлене зі зміною кутової швидкості.

$$\text{Одиниця вимірювання } - [\varepsilon] = \text{с}^{-2} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

За рівномірного руху по колу справедливим буде співвідношення $\omega = \frac{2\pi}{T}$, де $T = \frac{1}{\nu}$; T – період обертання; ν – частота, тоді $\omega = 2\pi\nu$.

Використовуючи рівняння (1.27) і (1.28), у скалярному вигляді можна одержати рівняння руху матеріальної точки по колу.

Будемо розглядати рівнозмінний рух, тобто такий, за якого $\varepsilon = \text{const}$. Тоді із (1.28) матимемо

$$\omega_M = \varepsilon dt.$$

Інтегруючи ліву і праву частини, матимемо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt$$

$$\text{або} \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon t \quad \text{або} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (1.29)$$

З (1.27) маємо

$$d\varphi = \omega dt,$$

Враховуючи (1.29) та інтегруючи останнє, отримаємо

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt$$

або
$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt,$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

або
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.30)$$

На підставі рівнянь (1.29) і (1.30) часу руху одержимо рівняння

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi. \quad (1.31)$$

1.3.2 Лінійні і кутові величини і зв'язок між ними

Порівнюючи рівняння (1.29), (1.30) і (1.31) з аналогічними для лінійного руху, ми бачимо їхню повну аналогію з тією лише різницею, що лінійні характеристики руху замінені на кутові. Знайдемо співвідношення між лінійними і кутовими характеристиками обертального руху.

Для цього, використовуючи рівняння (1.26), поділивши ліву й праву частини цього рівняння на час руху dt , одержимо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{[d\varphi \cdot \vec{r}]}{dr},$$

$$\vec{v}_M = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]. \quad (1.32)$$

Диференціюючи рівняння (1.32) за часом, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}] + [\vec{\omega} \cdot \vec{v}]; \\ \vec{a} &= [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}] + [\vec{\omega} \cdot \vec{v}]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Оскільки ліва частина (1.33) є прискоренням, то у правій частині теж повинно бути прискорення.

Один із доданків буде виражати тангенціальне прискорення, інший – нормальне. Для з'ясування цього факту розглянемо напрямки кожного із добутоків правої частини

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}] + [\vec{\omega} \cdot \vec{v}]; \\ \vec{a} &= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \end{aligned}$$

Добуток $[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]$ буде співнапрявлений із вектором \vec{v} . Отже, це буде тангенціальне прискорення. Можемо записати

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]$$

або

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.34)$$

Тобто тангенціальне прискорення характеризує швидкість зміни швидкості й напрямлене за дотичною до траєкторії.

Добуток $[\vec{\omega} \cdot \vec{v}]$ буде напрямлений до центру в точку O на вісь обертання й буде виражати нормальне прискорення

$$a_n = \omega \cdot v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}. \quad (1.35)$$

1.4 Динаміка матеріальної точки

1.4.1 Перший закон Ньютона та його наслідки

Розділ механіки, який вивчає рух тіла або його зміну, вказуючи на причину змін, називається *динамікою*. В основі динаміки лежать три її закони, які є узагальненням багатоміліонного досвіду людей. Іноді до цих законів додають закон всесвітнього тяжіння, вважаючи його четвертим законом.

Закони Ньютона вперше були сформульовані ним у 1687 р. в роботі «Математичні начала натуральної філософії». Перший закон Ньютона (закон інерції) був установлений раніше Галілеєм, який дійшов висновку, що коли на дане тіло відсутня зовнішня дія, то воно рухається зі сталою швидкістю або перебуває у стані спокою. У формулюванні Ньютона він звучить так: «Будь-яке тіло продовжує утримуватися у своєму стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, поки прикладені до нього сили не примушують його змінити цей стан». У часи Ньютона панувало помилкове уявлення про абсолютний простір, тому в цьому формулюванні немає вказівки на те, щодо якої системи відліку вказаний рух розглядають. Відповідно до сучасних уявлень без вказівки на систему відліку цей закон просто не має сенсу, оскільки добре відомо, що рівномірний і прямолінійний рух тіла в одній системі відліку щодо іншої системи, яка рухається прискорено щодо першої, таким не буде. Зміст першого закону Ньютона зводиться до твердження, що існують такі

системи відліку, щодо яких виконується вказане вище твердження.

Системи відліку, у яких виконується перший закон Ньютона, називають інерціальними. Система, яка рухається із сталою швидкістю відносно інерціальної, теж буде інерціальною.

Поняття інерціальної системи відліку є абстракцією, оскільки у природі не існує абсолютно ізольованих тіл. Та чи інша система відліку може розглядатися як інерціальна лише наближено, залежно від умов і характеру досліджуваних явищ. Практично з великим ступенем точності можна вважати інерціальною геліоцентричну систему з початком координат на Сонці і осями координат, направленими на нескінченно віддалені зірки. Такий вибір зумовлений тим, що впливом на таку систему ззовні можна знехтувати. Чим іще характерні такі (ICB) системи відліку? У ICB постулюють виконання принципу відносності Галілея: у усіх системах відліку, що рухаються рівномірно і прямолінійно щодо системи нерухомих зірок, і, отже, один щодо одного, усі механічні явища протікають однаково, поля тяжіння мізерно малі. Отже, такі системи є інерціальними, оскільки в них справедливий закон інерції Ньютона: тіло, віддалене досить далеко від інших тіл, рухається щодо систем відліку рівномірно і прямолінійно. Усі ICB фізично еквівалентні, механічні закони формулюють однаково. Сформульований принцип відносності є постулатом, що виходить за межі експериментальної перевірки [15]. Отже, принцип відносності ґрунтується на припущенні, що існує безліч систем відліку з геометрією Евкліда, існує єдиний час і синхронізовані годинники, які його вимірюють. Просторово-часові співвідношення всіх ICB однакові і не відмінні один від одного. Принцип відносності констатує подібність характеру ходів механічних процесів у ICB і є

фізичним твердженням. Системи відліку, що рухаються щодо ІСВ з прискоренням, – *неінерціальні системи*.

Системи відліку, зв'язані із Землею, взагалі не інерціальні, оскільки Земля обертається навколо своєї осі та Сонця. Але в багатьох випадках Землю можна вважати інерціальною системою відліку. Ввівши поняття інерціальної системи відліку, перший закон Ньютона можна сформулювати так

Існують такі системи відліку, щодо яких тіло, що рухається поступально (перебуває у стані спокою), зберігає свою швидкість сталою (перебуває у спокої), якщо на нього не діють інші тіла або дія інших тіл скомпенсована.

Суть першого закону Ньютона полягає в тому, що він вказує на існування інерціальних систем відліку.

Явище природи, яке полягає у збереженні тілами їхньої швидкості незмінною (зокрема в стані спокою, коли $v = 0$), коли на них не діють інші тіла, називається *інерцією*. Тому перший закон Ньютона деколи називають законом інерції.

З першого закону Ньютона випливає важливий висновок. У законі явно простежується його зв'язок із властивостями простору: твердження про існування ІСВ еквівалентне твердженню про однорідність та ізотропність простору. Інакше кажучи, самі собою властивості простору такі, що вони не викликають зміни швидкості рухомого тіла ні за значенням, ні за напрямом.

1.4.2 Другий закон Ньютона

В інерціальних системах відліку довільне ізольоване тіло або матеріальна точка рухається рівномірно і прямолінійно. Тіло, на яке не діють інші тіла, називається *ізольованим*. Ізольованих (вільних) тіл у природі не існує. Будь-яке тіло завжди оточене іншими тілами, які в певний

спосіб діють одне на одне. Дію тіл одне на одне називають **взаємодією**. Що викликає рух тіла, а головне, що викликає зміну стану тіла – зміну його швидкості й напрямку руху? Згідно з Ньютоном «...прикладена сила є дія, здійснювана над тілом, щоб змінити його стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху». Якщо вдаватися до походжень поняття сили, то можна повернутися до часів Арістотеля, який вивчав причини зміни стану тіл [1, 2]. У сучасному розумінні силу розглядають як кількісну міру взаємодії тіл [5, 6]. Водночас передбачається, що в ІСВ завжди можна вказати джерело сили, а для розв'язування задач – визначити закон дії сили. Сила не є якоюсь самостійною сутністю, її створюють матеріальні тіла і вона залежить від цих тіл. Саме за допомогою сил тіла діють одне на одне, тобто взаємодіють. Сила водночас є кількісною мірою інтенсивності взаємодій. Уже в першому законі Ньютон дав оцінку дії сили: тільки сила може змінити стан спокою або рівномірного прямолінійного руху тіла. Що буде з тілом, якщо на це тіло діють сили, як це тіло рухатиметься – на це питання відповідає другий закон Ньютона.

Механічні взаємодії тіл можуть здійснюватися як безпосередньо внаслідок їхнього контакту, так і віддалено через поле, яке є посередником. Так, зокрема, під час ковзання тіла по похилій площині відбувається безпосередня контактна взаємодія тіла й похилої площини, а взаємодія Землі й Сонця відбувається на відстані через посередника взаємодії – гравітаційне поле.

Другий закон Ньютона встановлює кількісний зв'язок між прискоренням тіла, його масою і силами, що діють на тіло.

Маса тіла. Досліди доводять, що результат дії одного й того ж самого тіла на інші буде різним. Це проявляється в різному прискоренні тіл після дії взаємодії. Тобто кожному тілу притаманна особлива властивість у певний

спосіб реагувати на зовнішню дію. Ця властивість називається *інертністю*. У різних тіл інертність виявляється по-різному. Так, зокрема, якщо під дією однакової сили за один і той самий проміжок часу Δt зміна стану одного тіла відбувається повільніше порівняно з іншим тілом, тоді кажуть, що перше тіло є більш інертним, ніж друге. Отже, інертні властивості тіл різні, а тому необхідно вміти визначати їх кількісно. Кількісною мірою інертності є маса тіла (від лат. *massa* – шматок, брила). У цьому разі мова йде про *інертну масу*.

З дослідних даних відомо, що тіла взаємодіють між собою не тільки під час безпосереднього зіткнення, а й на відстані. Зазначена властивість тіл характеризується *гравітаційною масою*.

Експериментальні результати доводять, що інертна і гравітаційна маси пропорційні, а допускаючи похибку $\sim 10^{-12}$, їх можна вважати рівними (це твердження має назву *принципу еквівалентності*). У подальшому інертну та гравітаційну маси ми розрізняти не будемо.

Маса є первинним поняттям, і тому можна дати лише її якісне визначення. *Маса* – це фізична величина, яка є мірою інертності та мірою гравітації тіла.

Досліди доводять, що за невеликих швидкостей маса всього тіла дорівнює сумі мас окремих частин, з яких воно складається. Ця властивість називається адитивністю.

Крім того, маса залежить від швидкості руху тіла

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою; v – швидкість руху тіла; $c \approx 3 \times 10^8$ М/с – швидкість світла.

Маса пов'язана з енергією. Ця залежність подана рівнянням $E = mc^2$.

Отже, маса – це скалярна фізична величина, яка характеризує гравітаційні та інертні властивості тіл, а також визначає запас енергії в них.

Поняття сили. Часто під силою йдеться про дію одного тіла на інше внаслідок чого змінюється швидкість тіла, тобто виникає прискорення. Сила служить мірою взаємодії тіл (слабо, сильно), іноді дають таке означення: сила – це всяка причина, яка змінює імпульс тіла. Таке означення є чисто якісним.

Сила – це фізична величина, яка характеризує взаємодію тіл, причому:

– результат дії одного тіла на інше залежить від напрямку цієї дії, тобто сила має напрямок;

– внаслідок взаємодії тіло може не лише змінити швидкість свого руху (або (і) напрямок руху), а й змінити свою форму, тобто деформуватися.

Узагальнюючи вищезазначене, можна стверджувати, що **сила F** (у механіці) – це векторна фізична величина, яка є кількісною мірою інтенсивності механічної взаємодії тіл, унаслідок чого вони набувають прискорень або (і) змінюють свою форму та розміри. Джерелом сил у ІСВ є матеріальні тіла, які і взаємодіють між собою через сили.

Силу **F** вважають визначеною величиною, якщо:

- відоме числове значення сили;
- її напрямок у просторі;
- точка прикладання сили.

Пряма, вздовж якої діє сила, називається **лінією дії сили**. Якщо досліджуване тіло можна розглядати як абсолютно тверде тіло, то точкою прикладання сили є будь-яка точка на лінії дії сили в межах АТТ.

Дати кількісне визначення сили (не лише сили, а й маси, електричного заряду тощо) неможливо, оскільки зазначені фізичні величини є **первинними** поняттями фізики і тому не

мають формальних визначень. Ця ситуація з первинними поняттями у фізиці нагадує ситуацію з аксіомами в математиці. Перші (первинні поняття) не мають формальних визначень, а другі (аксіоми) – формальних доведень [38].

Як доводить дослід, під час взаємодії двох тіл різної маси виконується співвідношення

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1},$$

де m_1, m_2 – маси тіл, a_1, a_2 – їхнє прискорення. Це співвідношення дає можливість визначити масу тіла через еталон маси. Крім того, воно дає можливість визначити чисельно силу як величину $ma = F$. Силу вимірюють пружинним динамометром.

Сила – векторна величина. Вектор сили завжди має точку прикладання, тобто прикладений до точки, а не до тіла.

У природі спостерігаються різноманітні взаємодії між тілами (частинками), з яких на сучасному етапі наших знань можна виокремити чотири фундаментальні взаємодії, фундаментальні в тому розумінні, що їх не можна звести до жодних інших:

1) **гравітаційна взаємодія** притаманна для всіх тіл природи і не залежить від середовища, у якому взаємодіють тіла. Зазначена взаємодія є далекодієвою і не має кінцевого радіуса дії та є визначальною для існування і руху небесних тіл; її описує закон всесвітнього тяжіння;

2) **електромагнітна взаємодія** має характер як притягання, так і відштовхування та спостерігається між електрично зарядженими тілами (частинками). Цією взаємодією зумовлені сили міжмолекулярного і міжатомного типу. Вона є найпоширенішою взаємодією у природі, оскільки спостерігається в: мегасвіті (від грец. *megas* –

надвеликий); макросвіті (від грец. macros – великий) і мікросвіті (від грец. micros – маленький).

У механіці до зазначеної взаємодії зводяться сили пружності і сили тертя. Взаємодію між нерухомими зарядами описує закон Кулона, між рухомими – закон Ампера;

3) **ядерна (сильна) взаємодія** – це сила притягання між нуклонами в ядрі атома, яка є короткодієвою і не перевищує декількох фемтометрів;

4) **слабка взаємодія** є ще більш короткодієвішою взаємодією порівняно із сильною взаємодією й не перевищує декількох атометрів і проявляється між елементарними частинками, відіграючи важливу роль під час їхніх взаємних перетворень. Законами квантової механіки описують слабку взаємодію.

У механіці ми будемо розглядати сили тяжіння, сили тертя, пружності, які мають електромагнітний характер.

Якщо ми будемо послідовно діяти з однаковою силою на кілька тіл різної маси, то помітимо, що вони набуватимуть різних прискорень. Отже, можемо зробити висновок, що сила, яка діє на тіло, пропорційна прискоренню, яке вона викликає.

Тоді можемо записати

$$F = ma \quad (1.36)$$

або векторно

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.36')$$

Ці записи є математичними виразами другого закону Ньютона: **сила, що діє на тіло, прямо пропорційна масі тіла та прискоренню, яке надає ця сила.**

Рівняння у вигляді (1.36) іноді називають рівнянням руху. Проте таке формулювання закону не досить повне, оскільки не вказує, про яку силу йде мова (рис. 1.8).

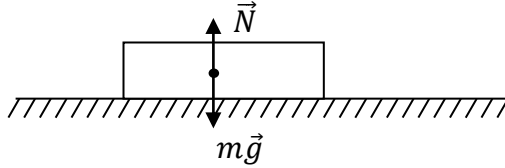


Рисунок 1.8 – До пояснення 2-го закону Ньютона

Більш повним буде таке.

Прискорення тіла, обумовлене дією на нього сили, прямо пропорційне рівнодійній всіх прикладених сил, обернено пропорційне масі тіла й напрямлене так, як і рівнодійна сила $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Другий закон Ньютона виконується лише в інерціальних системах відліку.

Вважаючи, що $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, то, підставивши у (1.36), маємо

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

величина $\vec{p} = m\vec{v}$ називається **імпульсом тіла**.

Тоді сила дорівнює зміні імпульсу тіла

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.37)$$

або
$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (1.38)$$

Тобто зміна імпульсу тіла дорівнює зміні імпульсу сили.

1.4.3 Третій закон Ньютона

Під час розгляду третього закону Ньютона звернемося до будь-якого досліду, у якому взаємодіють два тіла. Можемо зробити висновок, що в підсумку обидва тіла або деформуються, або набувають прискорення, або те й інше одночасно. Тобто процес взаємодії має взаємний характер. На підставі цього третій закон можна сформулювати так.

Тіла діють одне на одне із силами, напрямленими вздовж однієї прямої, рівними за абсолютним значенням і протилежними за напрямом.

Або кожній дії є рівна протидія, що математично можна записати

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.39)$$

Незважаючи на математичну простоту запису, цей закон є досить змістовним.

Щодо третього закону Ньютона треба зауважити: 1) сили мають взаємний характер, тобто виникають парами, поділ сил на діючу і протидіючу є умовним; 2) ці сили мають однакову природу; 3) рівнодійної сили немає, оскільки сили прикладені до різних тіл.

Закони Ньютона сформульовані для інерціальних систем відліку і, як і інші закони, є узагальненням дослідних фактів, які перевіряють, але не виводять.

В основне рівняння динаміки входить як змінна величина прискорення. Звідси випливає, що під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої, рівняння динаміки не змінюються, тобто є інваріантними.

З механічного погляду це означає, що всі інерціальні системи відліку еквівалентні між собою.

Цей факт закладений у принципі відносності Галілея і формулюється так.

Жодними механічними дослідями в середині даної системи відліку не можна встановити, перебуває система у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.

1.4.4 Перетворення Галілея

Розглянемо дві системи відліку K і K' , які рухаються одна щодо одної зі швидкістю v_0 .

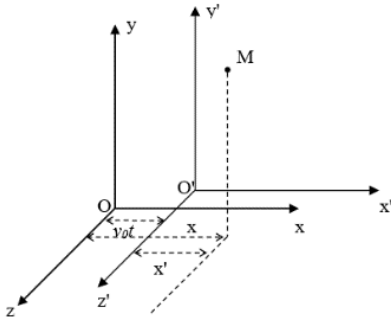


Рисунок 1.9 – Пояснення перетворень Галілея

Будемо вважати, що в початковий момент часу їхні вісі координат збігаються. Розглянемо координати точки M у системі K і K' , через деякий час t , коли K' зміститься вздовж вісі x .

Оскільки в початковий момент часу вісі координат збігаються, то ми можемо записати, що

$$x = x',$$

$$z = z',$$

$$x = x' + v_0 t,$$

$$t = t'.$$

Ці чотири рівняння називають *перетвореннями Галілея*. Вони справедливі, коли початкова швидкість тіла v_0 набагато менша від швидкості світла c .

Диференціюючи ці рівняння по часу, отримаємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_0$$

або
$$v_y = v'_y v_z = v'_z v_x = v'_x + v_0.$$

Розглядаючи рух у одному напрямку, у векторному вигляді матимемо

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \quad (1.40)$$

Диференціюючи (1.40) за часом, одержимо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt}$$

або
$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

Тобто прискорення будь-якого тіла в усіх системах відліку, які рухаються рівномірно і прямолінійно одна щодо одної, буде однаковим.

Рівняння (1.40) відоме як класичний закон додавання швидкостей. Його можна сформулювати так.

Швидкість тіла в нерухомій системі дорівнює сумі швидкості тіла в рухомій системі та швидкості рухомої системи щодо нерухомої.

1.5 Динамічні закономірності. Принцип причинності у класичній механіці

1.5.1 Основне завдання механіки

Основне завдання механіки полягає у знаходженні положення рухомого тіла в будь-який момент часу. Якщо розглядати це завдання більш конкретно, то механіка ставить і розв'язує два завдання: 1) за відомим рухом тіл обчислити сили, які діють на них; 2) за заданими силами визначити характер руху тіла.

Задачі першого типу порівняно прості й зводяться до обчислення прискорення матеріальних точок, з яких складається система. Знаючи масу, можна визначити сили, що діють на тіло чи матеріальну точку.

Задачі другого типу є більш складними і є основними в механіці.

Суть цих задач зводиться до такого: якщо відомо силу F та масу m , то треба знайти характер руху тіла, тобто $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Така задача може бути розв'язана з використанням принципу причинності, тобто, знаючи початкові умови, необхідно визначити параметри матеріальної точки через час t . Такими умовами є значення величини: \vec{F} , m , $\vec{v}_{(t=0)}$, $r_{t=0}$. Завдання полягає у знаходженні $\vec{r}(t)$.

Цю задачу потрібно розв'язувати за допомогою рівнянь другого порядку, які можна записати для осі x , наприклад:

$$\frac{ma^2x}{dt^2} = F_x.$$

Аналогічні рівняння можна записати для y , z .

Кожне із таких рівнянь еквівалентне двом, тобто

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad (1.41)$$

або
$$m \frac{dx}{dt} = P_x. \quad (1.42)$$

Отже, використавши динамічні закономірності (другий закон Ньютона) і принцип причинності (початкові умови), можна розв'язати основне завдання механіки.

1.5.2 Принципи класичної механіки та її обмеження

В основі механіки Ньютона лежать уявлення про простір і час, пов'язані із законами Ньютона. Сформулюємо ці уявлення [4, 7, 14, 27].

1. Простір підпорядкований геометрії Евкліда, має три виміри і всі системи відліку є Евклідовими.

2. Час існує незалежно від простору, тобто він є абсолютним. Водночас, час пов'язаний із простором законами руху.

3. Розміри твердих тіл однакові в різних системах відліку. Відстань між двома точками визначають відомою формулою $l = (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) + (z_2^2 - z_1^2)$.

4. Ця величина завжди позитивна, є інваріантом, тобто однакова в усіх системах відліку.

5. Діє закон інерції Галілея – Ньютона, згідно з яким тіло, яке не зазнає дії з боку інших тіл, рухається рівномірно і прямолінійно. Підтверджене існування інерціальних систем відліку, у яких діє принцип відносності Галілея і І закон Ньютона: у всіх системах відліку, що рухаються рівномірно й прямолінійно одна щодо одної, усі механічні явища за однакових початкових умов відбуваються однаково.

У таких системах відліку виконуються перетворення Галілея, що виражають просторово-часовий зв'язок будь-яких подій у різних інерціальних системах. Існує безліч систем відліку з геометрією Евкліда, у яких усі механічні явища відбуваються однаково.

6. Виконується принцип далекодії: взаємодії тіл поширюються миттєво, тобто з нескінченно великою швидкістю. Наприклад, гравітаційна сила, що діє на матеріальну точку 1, згідно із законом всесвітнього тяжіння, залежить тільки від положення матеріальної точки 2.

Ці уявлення відповідали всій сукупності експериментальних даних, що були тоді. Успішний розвиток механіки також є підтвердженням цих уявлень.

У процесі розвитку інших розділів фізики (оптики, електродинаміки) виникло питання: чи поширюється принцип відносності Галілея на інші явища? Досягнення фізики ІХХ–ХХ століть довели, що уявлення про абсолютний простір, абсолютний час, миттєвість поширення взаємодії є наближеними, апроксимацією реальних властивостей простору-часу, похибки якої лежать за межами можливостей експериментів епохи Ньютона.

Одне з таких явищ – поширення світла, яке відбувається по-різному в різних системах відліку. Низкою експериментів, зокрема дослідами Майкельсона – Морлі [4, 6, 15], було доведено, що швидкість світла не залежить ні від швидкості джерела, ні від швидкості приймача (детектора) світла. Потім Максвелл узагальнив теоретично результати багатьох експериментів (Ампера, Фарадея, Кулона) і запропонував рівняння, що описують рух електромагнітного випромінювання, які підтверджували існування електромагнітних хвиль і певну швидкість їхнього поширення. Пізніше ці хвилі були відкриті експериментально. Виявилось, що їхня швидкість збігається з багаторазово до цього виміряною і добре відомою швидкістю світла. Проте ці рівняння виявилися не інваріантними перетвореннями Галілея: швидкість світла повинна була змінюватися під час переходу з однієї ІСВ в іншу. Були й інші експерименти, що виявили суперечності експериментальних даних і теоретичних пояснень у межах ньютонівських уявлень [17, 26]. Розв'язання цієї проблеми було отримане в теорії відносності Ейнштейна. Розглянемо частину цієї теорії, так званої спеціальної теорії відносності (СТВ). Термін

«спеціальна» підкреслює ті обставини, що ця теорія розглядає явища в інерціальних системах відліку.

1.5.3 Принцип відносності Ейнштейна

Постулати СТВ. На підставі результатів численних експериментів, проведених у ХХ столітті, вчені дійшли висновку про скінченну величину швидкості світла і взаємодій. Гранична швидкість частинок у прискорювачах, космічних променях збігається із швидкістю світла у вакуумі. На сьогодні неодноразово виміряна швидкість світла дорівнює $c = 299\,792\,458 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Доведено, що швидкість поширення фундаментальної взаємодії або швидкість сигналу не перевершує швидкості світла $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Оскільки інерціальні системи відліку повинні бути пов'язані з якими-небудь фізичними тілами або частинками, то зрозуміло, що жодна із систем не може рухатися щодо будь-якої іншої зі швидкістю, що перевищує швидкість світла c .

Ейнштейном була створена СТВ, що сприяло перегляду початкових положень класичної фізики, передусім уявлень про властивості простору й часу. Як вихідні позиції СТВ Ейнштейн взяв два постулати або принципи, які підтверджують результати експериментальних досліджень [1, 4, 6, 26]:

- принцип відносності;
- незалежність швидкості світла від швидкості джерела.

Перший постулат – це узагальнення принципу відносності Галілея на будь-які фізичні процеси: усі фізичні явища відбуваються однаково в усіх інерціальних системах відліку за однакових початкових умов; усі закони природи і рівняння, що їх описують, інваріантні, тобто не змінюються під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до

іншої. Інакше кажучи, усі інерціальні системи відліку еквівалентні (не відрізняються) за своїми фізичними властивостями; жодним дослідом не можна в принципі виділити жодну з них як переважну.

Другий постулат стверджує, що швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості джерела та швидкості спостерігача, однакова за всіма напрямками і в усіх інерціальних системах відліку. Отже, швидкість світла має особливе положення у природі, вона не змінюється під час переходу від однієї ІСВ до іншої, є інваріантом.

Тепер звернемося до питання про просторово-часові співвідношення між цими подіями в різних ІСВ.

У ньютонівській механіці, як відомо, просторові співвідношення (тобто координати події) між різними подіями залежать від системи відліку і пов'язані перетвореннями Галілея, а часові співвідношення не залежать від системи відліку, тобто час вважають абсолютним часом, що однаково протікає у усіх ІСВ. Насправді одночасність (і перебіг часу) також є поняттям відносним. Час набуває сенсу тоді, коли вказано, до якої системи відліку це поняття належать. Отже, події, одночасні в одній системі відліку, не є одночасними в іншій системі відліку. Тобто одночасність теж є поняттям відносним – час у різних системах відліку плине неоднаково.

1.6 Робота. Енергія. Потужність

1.6.1 Енергія – універсальна міра руху та взаємодії

У фізиці енергією називають фізичну величину, яка є однозначною функцією стану системи, що характеризує певний набір параметрів. Коли мова йде про механічну енергію, стан системи характеризують параметри:

координата та імпульс (швидкість). В інших випадках параметрами можуть бути температура та об'єм (теплова енергія), напруженості електричного та магнітного полів (електромагнітна енергія) тощо. Якщо хоча б один із цих параметрів змінюється, система переходить в інший стан. Будь-якому переходу системи з одного стану в інший завжди відповідає строго певна зміна енергії. Якщо система після послідовного кількаразового переходу в різні стани повернулася в початковий стан, то загальна зміна її енергії дорівнює нулю. Система, яка не зазнає зовнішніх впливів, тобто елементи якої взаємодіють лише між собою і не взаємодіють з іншими талами, має назву замкненої або ізольованої. Енергія замкненої системи стала незалежно від того, які процеси відбуваються всередині неї. Це твердження відоме як закон збереження енергії.

Зміну енергії тіла чи системи тіл вимірюють роботою, яку може виконати тіло в даних умовах, тобто механічна робота є мірою зміни механічної енергії тіла $A = \Delta E$.

Розрізняють два види механічної енергії: кінетична E_k та потенціальна E_p . Повною механічною енергією системи називається сума її кінетичної та потенціальної енергії.

У сучасній фізиці енергія є одним із найважливіших фундаментальних понять. Енергія кількісно характеризує рух і взаємодію усіх видів матерії: у фізичних процесах механічний рух може перетворюватися на тепловий; тепловий рух, зі свого боку, може передаватися від одного тіла іншому; на теплову може перетворюватися й електромагнітна форма руху. У будь-яких фізичних процесах енергія не виникає і не зникає, а перетворюється з одного виду на інший. Поняття енергії пов'язує в єдине ціле всі явища природи.

Енергія будь-якої системи однозначно залежить від параметрів стану системи. У класичній механіці зазвичай

вважають, що енергія системи змінюється безперервно і може набувати довільних значень.

Механічний рух характеризується імпульсом і енергією. Імпульс описує динамічний стан руху, а енергія кількісно характеризує рух з урахуванням можливості переходу його з однієї форми в іншу.

У процесах взаємодії тіл між ними відбувається обмін енергією. Кількісною мірою зміни енергії взаємодійних тіл є робота. Робота сили, прикладеної до даного тіла, є однією з форм передавання енергії і дорівнює кількості переданої енергії. Повну зміну енергії будь-якого тіла можна виміряти роботою, яку могло б виконати це тіло, якби передало всю свою енергію іншому тілу.

1.6.2 Робота і потужність

Іноді рух тіла зручно описувати, користуючись поняттям роботи, енергії і потужності. Введемо ці поняття.

Будемо вважати, що деяка матеріальна точка рухається за довільною кривою під дією сили F , напрямленої під кутом α до переміщення dr . Водночас переміщення dr можна вважати нескінченно малим, щоб сила F була незмінною.

Тоді величина

$$dA = F dr \cos \alpha \quad (1.43)$$

буде виражати елементарну роботу dA сили F на переміщенні dr . Або

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad (1.44)$$

чи
$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (1.45)$$

У рівняннях (1.43) і (1.45) позначення dA означає не зміну роботи, а те, що ця робота є елементарною.

З рівняння (1.45) бачимо, що робота є скалярною величиною.

Крім того, робота виконується, якщо \vec{F} і $d\vec{r}$ одночасно не дорівнюють нулю.

Якщо хоча б один зі співмножників дорівнює нулю, то і робота дорівнює нулю. Робота може бути більшою за нуль:

$(A > 0)$, коли $\alpha < 90^\circ$;

$dA = 0$, коли $\alpha = 90^\circ$;

$dA < 0$, коли $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Тому, згадуючи про роботу, необхідно вказувати, яка сила цю роботу виконує.

На підставі рівняння (1.43) можемо записати одиницю роботи $[A] = 1\text{Н} \cdot 1\text{м} = 1\text{Дж}$.

Одна й та ж сама робота може бути виконана за різні проміжки часу. Для характеристики роботоздатності машин і механізмів вводять поняття потужності.

Потужність – це фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі, виконаній за одиницю часу

$$N = \frac{dA}{dt},$$

$$[N] = \frac{1\text{Дж}}{1\text{с}} = 1\text{Вт}.$$

За умови руху тіла вздовж довільної траєкторії сила може змінюватися. Тоді робота на кінцевій ділянці траєкторії буде дорівнювати сумі робіт на елементарних ділянках, тобто таких, де сила є незмінною.

Математично запишемо

$$A = \int_L (\vec{F} \cdot d\vec{r}),$$

тобто робота дорівнює криволінійному інтегралу вектора сили \vec{F} вздовж шляху L .

Якщо роботу виконують кілька сил, то загальна робота буде дорівнювати сумі робіт, які виконує кожна сила

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

У разі сталої сили, яка діє на матеріальну точку, можемо записати

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Потужність у цьому разі можна обчислити так:

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.46)$$

Зважаючи на рівняння $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, а також те, що $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, і $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$, матимемо

$$dA = \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{v} dt \text{ або } dA = \vec{v} d\vec{p}.$$

Інтегруючи у скалярному вигляді, отримаємо

$$A = \int v dp = \int v d(mv)$$

або

$$A = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1.47)$$

Величина

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.48)$$

є кінетичною енергією матеріальної точки.

Рівняння (1.47) можна записати $A_{1,2} = K_2 - K_1$.

Тобто робота всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну точку, дорівнює приросту кінетичної енергії цієї точки.

Згідно зі співвідношеннями (1.47) і (1.48) можна дати таке означення кінетичної енергії: кінетична енергія матеріальної точки є мірою її механічного руху, її вимірюють роботою, яку може здійснити ця точка під час її гальмування до повної зупинки. Якщо робота $A > 0$, то над матеріальною точкою виконують роботу зовнішні сили і її кінетична енергія збільшується. За $A < 0$ матеріальна точка віддає свою кінетичну енергію, виконуючи роботу проти зовнішніх сил.

Якщо згадати про роботу системи матеріальних точок, то необхідно розуміти, що приріст кінетичної енергії зумовлений як роботою зовнішніх, так і внутрішніх сил системи. Усі сили в макроскопічній механіці можна поділити на консервативні і неконсервативні.

Сили, робота яких не залежить від форми шляху під час переходу матеріальної точки з одного положення в інше, а визначається лише положенням цих точок у просторі, називають консервативними. Інакше кажучи, сили, робота яких за замкненим контуром дорівнює нулю, називаються консервативними. Усі сили, які не є консервативними, називаються неконсервативними.

До таких сил насамперед належать так звані дисипативні сили.

Дисипативні сили – це сили, повна робота яких за будь-яких рухів у замкнутій системі завжди від’ємна. Прикладом таких сил є сили тертя.

Якщо на систему або в системі діють лише консервативні сили, для такої системи можна ввести поняття потенціальної енергії. Положення матеріальної точки у просторі визначається її координатами. У початковий момент часу ці координати можна вважати нульовими.

Тоді робота, яку виконують сили під час переходу матеріальної точки з даного положення в нульове, буде визначати потенціальну енергію.

Потенціальна енергія – це частина механічної енергії системи, яка визначається взаємними положеннями матеріальних точок (конфігурацією системи) і характером сил взаємодії між ними.

Оскільки робота консервативних сил не залежить від форми траєкторії, то потенціальна енергія є функцією лише координат матеріальної точки. Потенціальна енергія, як і кінетична, є величиною відносною. Потенціальна енергія може бути визначена з точністю до деякої сталої величини.

Якщо матеріальна точка рухається з положення 1 у положення 2, то виконана одночасно робота може бути записана у вигляді

$$A = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (1.49)$$

де Π_1 – потенціальна енергія в положенні 1; Π_2 – потенціальна енергія в положенні 2 або $A = (\Pi_2 - \Pi_1)$. Тобто робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії.

На підставі означень кінетичної і потенціальної енергії бачимо, що роботу й енергію вимірюють в однакових одиницях – джоулях.

На відміну від кінетичної енергії, потенціальна енергія може бути як додатною, так і від’ємною (кінетична енергія

завжди додатна). Числове значення і знак потенціальної енергії залежать від вибору умовного нульового положення системи.

На підставі рівняння (1.48) і (1.49) можемо записати, що

$$dK = -d\Pi$$

або
$$d(K + \Pi) = 0, \quad (1.50)$$

де величина $(K + \Pi) = E$ є повною механічною енергією.

Повна механічна енергія системи складається з кінетичної та потенціальної енергій і дорівнює їхній сумі.

Механічна енергія системи залежить від її стану, тобто визначається координатами, швидкостями і масами всіх матеріальних точок, з яких складається система.

Рівняння (1.50) виражає математичний запис закону збереження механічної енергії, який може бути записаний так:

$$K + \Pi = \text{const.}$$

Для частинки, що перебуває в полі консервативних сил, повна механічна енергія є величиною сталою.

Потенціальна енергія тіла в полі сил тяжіння поблизу поверхні Землі. Силове поле сил тяжіння однорідне, у кожній його точці на тіло масою m діє стала сила $F = mg$, напрямлена вниз по вертикалі до поверхні Землі, і потенціальну енергію системи «тіло – Земля» визначають за формулою

$$\Pi = -\int F dx = -Fx + C. \quad (1.51)$$

Потенціальну енергію тіла на поверхні Землі вважатимемо рівною нулю і визначимо її на висоті h над поверхнею і на дні шахти глибиною h' .

Спрямуємо вісь OX у напрямі силового поля і сумістимо початок координат із поверхнею Землі. За прийнятою умовою $\Pi = 0$ за умови $x = 0$. З (1.51) знаходимо $C = 0$ і вираз потенціальної енергії в будь-якій точці поля

$$\Pi = -mgx.$$

Звідси при $x = -h$ визначаємо потенціальну енергію тіла над поверхнею Землі

$$\Pi_h = mgh$$

і на дні шахти за умови $x = h'$

$$\Pi_{h'} = -mgh'.$$

Різниця потенціальних енергій у цих двох точках поля

$$\Pi_h - \Pi_{h'} = mg(h + h').$$

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла.

Потенціальну енергію може мати не тільки система тіл, що взаємодіють, а й окреме пружно деформоване тіло. Нехай стержень завдовжки l і площею поперечного перерізу S жорстко закріплений одним кінцем, а до другого кінця прикладена за нормаллю до поперечного перерізу зовнішня сила F , під дією якої стержень видовжується (або стискається). Водночас в об'ємі стержня виникають сили пружності, які протидіють зовнішній силі. Якщо зовнішня сила за величиною дорівнює результуючій силі пружності ($F = -F_{\text{пр}}$), то її робота перетворюється на потенціальну енергію деформованого стержня. Вважатимемо, що

потенціальна енергія недеформованого стержня дорівнює нулю. Спрямуємо вісь ОХ у напрямі зовнішньої сили F і сумістимо початок координат із кінцем недеформованого стержня. Потенціальна енергія пружної деформації стержня може бути визначена із співвідношення

$$\Delta\Pi = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (1.52)$$

Тоді, згідно з нашою умовою,

$$\Pi = - \int_0^{\Delta l} F_{\text{пр}} dx = - \int_0^{\Delta l} F dx. \quad (1.53)$$

Отже, визначивши зовнішню силу як функцію деформації x із узагальненого закону Гука $\sigma = E\varepsilon$, за умови відносної деформації $\varepsilon = \Delta l/l$ потенціальна енергія пружно деформованого стержня

$$\Pi = \frac{E\varepsilon^2}{2} V, \quad (1.54)$$

де $V = Sl$ – об'єм стержня; E – модуль пружності матеріалу.

1.7 Динаміка системи матеріальних точок

1.7.1 Замкнуті системи. Закон збереження імпульсу

Законами Ньютона зручно користуватися під час розв'язування основного завдання механіки для однієї або кількох матеріальних точок, але якщо ми маємо систему, яка складається з n матеріальних точок, то розв'язування такого завдання за допомогою лише законів Ньютона непросто, і в такому разі зручно користуватися законами збереження.

Ізольованою, або замкненою системою вважають систему, яка віддалена від інших тіл настільки, що інші тіла ніяк не впливають на дану систему, але в самій системі може відбуватися взаємодія тіл чи матеріальних точок.

Замкнута система – це абстракція, оскільки будь-яка реальна система тією чи іншою мірою зазнає зовнішньої дії.

Будемо вважати, що сили, які діють усередині замкненої системи, є внутрішніми \vec{F}^i , а сили які діють на дану систему, – зовнішніми \vec{F}^e .

Раніше третій закон Ньютона ми записали для двох тіл чи матеріальних точок, що взаємодіють. Цей закон можна розширити і для системи, яка складається із n матеріальних точок. Водночас будемо виходити з того, що взаємодія матеріальних точок зводиться до попарної.

Запишемо цей закон для довільної кількості матеріальних точок.

Будемо вважати, що сила \vec{F}_{ik} – це сила, з якою i -та матеріальна точка діє на k -ту, а \vec{F}_{ki} – це сила, з якою k -та матеріальна точка діє на i -ту матеріальну точку.

Тоді згідно з третім законом Ньютона можемо записати

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki},$$

або
$$\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0.$$

Ці рівняння можна записати так:

$$\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i + \dots + \vec{F}_n^i = 0, \quad (1.55)$$

де верхній індекс i означає, що на дану матеріальну точку діють внутрішні сили, нижній індекс вказує номер матеріальної точки, на яку діє сила.

Будемо вважати, що на систему діють і зовнішні сили $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots$

На основі другого закону Ньютона можемо записати рівняння руху для кожної матеріальної точки у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n) = \vec{F}_1^i + \vec{F}_1^e;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \vec{F}_2^i + \vec{F}_2^e \text{ тощо.}$$

Додаючи почленно ліву і праву частину рівнянь, одержимо (на підставі рівняння (1.55))

$$\frac{dp_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \dots + \vec{F}_n^e \text{ або } \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e, \quad (1.56)$$

де $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ – імпульс усієї системи, а \vec{F}^e – сума зовнішніх сил, які діють на систему або головний вектор зовнішніх сил.

Словами (1.56) можна сформулювати так: **швидкість зміни імпульсу системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил.**

Рівняння (1.56) можна записати у вигляді

$$d\vec{P} = \vec{F}^e dt. \quad (1.57)$$

Зміна імпульсу системи дорівнює зміні імпульсу головного вектора зовнішніх сил.

Це твердження відоме як теорема про зміну імпульсу системи. Рівняння (1.57) іноді записують у проєкціях на осі координат.

На вісь Ox , наприклад, матимемо $dP_x = F_x^e dt$.

Аналогічно можна записати і для інших осей координат.

Якщо система замкнута $\vec{F}^e = 0$, то рівняння (1,57) можна записати так:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \vec{p} = const. \quad (1.58)$$

Цей математичний запис є виразом закону збереження імпульсу, який можна сформулювати так: **імпульс замкненої системи є величиною сталою.**

У багатьох випадках система може бути не замкнутою, але проекція одного із векторів зовнішніх сил на одну з осей координат може дорівнювати нулю.

Тоді в цьому разі закон збереження виконується у проєкціях на дану вісь.

Наприклад, на вісь Ox цей закон запишуть $p_x = const$.

1.7.2 Центр мас. Рух центра мас

У багатьох випадках під час розгляду руху системи матеріальних точок теорему про зміну імпульсу й закон збереження імпульсу зручніше використовувати в іншому вигляді, а саме – ввести поняття центра мас системи.

Центром мас системи (іноді інерції) називається така уявна точка, радіус-вектор \vec{R} якої виражається через радіус-вектори точок $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ співвідношенням

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (1.59)$$

Центр мас, зазвичай, позначають буквою C . Тоді останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\vec{R}_c = \sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i, \quad (1.60)$$

тобто центр мас системи – це точка, у якій би зібралися всі точки замкнутої системи під дією сил взаємного

притягання, за умови, що в деякий момент часу вони були нерухомими.

Диференціюючи рівняння (1.60) за часом, отримаємо

$$M \frac{d\vec{R}_i}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots \Leftrightarrow M\vec{v}_c = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots \quad (1.61)$$

$$\vec{p} = m\vec{v}_c. \quad (1.62)$$

Останнє рівняння словами можна сформулювати так: **імпульс замкненої системи дорівнює добутку маси системи на швидкість центра мас.**

Диференціюючи це рівняння, одержимо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_c}{dt},$$

тоді
$$\vec{F}^e = M \frac{d\vec{v}_c}{dt}. \quad (1.63)$$

Зовні рівняння (1.63) схоже на другий закон Ньютона для матеріальної точки і є математичним записом теореми про рух центра мас, яку можна сформулювати так.

Центр мас системи матеріальних точок рухається так, як рухалася б матеріальна точка з масою, що дорівнює масі всієї системи, на яку діє сила, яка дорівнює головному вектору зовнішніх сил, котрий діє на всі матеріальні точки системи.

Якщо $\vec{F}^e = 0$, то

$$\frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_c = const.$$

Теорему про рух центра мас можна записати і у проєкціях на відповідні вісі координат, причому потрібно пам'ятати, що за відсутності зовнішніх сил центр мас рухається рівномірно й прямолінійно.

1.7.3 Рух тіл змінної маси

У природі трапляється рух тіл, маса яких із часом змінюється (ракети, транспорт тощо). Другий закон Ньютона для опису руху таких систем застосовувати не можна, оскільки він сформульований для руху тіл зі сталою масою. Для опису руху таких тіл скористаємося теоремою про зміну імпульсу системи. У систему будемо задіювати, як саме тіло, так і частинки, які до нього додають або від нього віднімають.

Найбільш наочно рух тіл змінної маси можна розглядати на прикладі польоту ракети.

Будемо вважати, що в момент часу t , $m(t)$ – маса ракети, $v(t)$ – її швидкість, відповідно імпульс ракети – $m\vec{v}$.

Через деякий час dt маса і швидкість зміняться на величину dm і $d\vec{v}$ відповідно.

Будемо вважати, що $dm < 0$, тоді кількість руху (імпульс) будуть $(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$.

До цієї кількості руху необхідно додати кількість руху газів, які вилітають із ракети $dm_{\text{газів}} \cdot \vec{v}_{\text{газів}}$.

Застосовуючи теорему про зміну кількості руху, одержимо

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{\text{r}}\vec{v}_{\text{r}} - m\vec{v} = \vec{F}^e dt.$$

Розкриваючи дужки, отримаємо

$$md\vec{v} + m\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm_{\text{r}}\vec{v}_{\text{r}} - m\vec{v} = \vec{F}^e dt.$$

Зробивши перетворення, відкидаючи одночасно доданки другого порядку малості, одержимо рівняння

$$md\vec{v} - \vec{v}_{\text{відн.}} dm = \vec{F}^e dt,$$

де $\vec{v}_{\text{відн.}} = \vec{v}_\Gamma - \vec{v}$.

Крім того, в останньому виразі враховано, що

$$dm + dm_\Gamma = 0, \frac{md\vec{v} - \vec{v}_{\text{відн.}} dm}{dt} = \vec{F}^e,$$

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = \vec{F}^e + \frac{\vec{v}_{\text{відн.}} dm}{dt}, \quad (1.64)$$

$$\vec{F}_p = \frac{\vec{v}_{\text{відн.}} dm}{dt} - \text{реактивна сила.}$$

Варто зазначити, що напрямок реактивної сили протилежний швидкості газів, які вилітають, а отже, збігається з напрямком руху ракети.

Рівняння (1.64) відоме як рівняння Мещерського, яке описує рух тіла змінної маси.

Якщо в цьому рівнянні вважати $\vec{F}^e = 0$, то

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}_{\text{відн.}} dm}{dt}$$

або

$$\frac{d\vec{v}}{\vec{v}_{\text{відн.}}} = \frac{dm}{m},$$

зважаючи, що \vec{v} і $\vec{v}_{\text{відн.}}$ протилежно напрямлені, то у проєкції на напрямок руху можна записати

$$dv = -v_{\text{відн.}} \frac{dm}{m}.$$

Одержимо

$$V = -V_{\text{відн}} \ln m + C.$$

Сталу інтегрування C одержимо з таких міркувань. Нехай у початковий момент часу швидкість ракети $V_0 = 0$, а її маса – m_0 . Тоді

$$0 = -V_{\text{відн}} \ln m_0 + C$$

або
$$C = V_{\text{відн}} \ln m_0.$$

Матимемо
$$V = -V_{\text{відн}} \ln m + V_{\text{відн}} \ln m_0$$

або
$$V = V_{\text{відн}} \ln \frac{m_0}{m}.$$

У підсумку отримаємо

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{V}{V_{\text{відн}}}}.$$

Це рівняння відоме як формула Ціолковського. Вона дозволяє розраховувати запас палива під час польоту ракет.

1.7.4 Застосування законів збереження імпульсу та енергії до аналізу пружного і непружного ударів

Удар – це короткочасна взаємодія тіл, які рухаються зі швидкостями, різними за напрямом, унаслідок якого різко змінюється їхній стан руху. У процесі взаємодії відбувається досить швидкий перерозподіл енергії між тілами, що взаємодіють, у такий спосіб, що кожне з тіл матиме іншу енергію, ніж до удару. У фізиці розглядають два граничних

типи ударів: пружний і непружний, але такий поділ є ідеалізацією.

Пряма, яка збігається з нормаллю до поверхні тіл, що взаємодіють, у точці їхнього дотику, називається лінією удару. Якщо лінія удару проходить через центри мас тіл, то удар називається центральним. Таким можна вважати удар двох кульок. Якщо два тіла до удару рухаються по лінії удару, то такий удар називається прямим. В іншому разі удар буде непрямым.

Прямий центральний удар є абсолютно непружним, якщо швидкості тіл, що взаємодіють, у підсумку будуть однаковими, тобто тіла після взаємодії будуть рухатися разом.

Після удару тіла будуть деформовані. Оскільки швидкості тіл до удару різні, то на початку процесу удару деформації обох тіл будуть змінюватися досить швидко. Одночасно будуть виникати значні сили взаємодії між тілами, які перешкоджатимуть деформації. Під дією цих сил швидкості тіл будуть змінюватися доти, поки не стануть однаковими. До цього моменту часу деформації досягнуть максимального значення і вони припиняться. Одночасно перетворяться на нуль сили взаємодії між тілами, і швидкість змінюватися не буде.

Починаючи з даного моменту часу обидва тіла будуть максимально деформованими, будуть рухатися зі сталою швидкістю.

Будемо вважати, що тіло масою m_1 рухається зі швидкістю \vec{v}_1 , а m_2 зі швидкістю \vec{v}_2 . Після удару вони будуть рухатися зі швидкістю \vec{u} . Оскільки під час удару виникають лише внутрішні сили, то вони не можуть змінити загальну кількість руху. Можна записати

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}. \quad (1.65)$$

Рівняння можна записати у скалярному вигляді, зважаючи на знаки швидкості

$$\vec{u} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.66)$$

Звідси випливає, що швидкість \vec{u} буде напрямлена в бік більшого mv . Можливі випадки

$$m_1 v_1 = m_2 v_2: u = 0;$$

v_1 і $v_2 < v$ напрямлені в одну сторону, то і u буде напрямлена так само $v_2 < u < v_1$;

$$m_1 = m_2 = m: u = \frac{m(v_1 + v_2)}{2m} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Сумарна кінетична енергія K після удару буде меншою, ніж до удару K_0 , оскільки частково витратиться на деформацію, тобто в підсумку перетвориться на теплову.

$K = K_0 - A_d$. На підставі загальних міркувань можемо знайти роботу деформації $A_d = K_0 - K$,

$$\text{де } K_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}; K = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

Тоді одержимо

$$A_d = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) u^2}{2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2,$$

де $\mu = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}$ називається зведеною масою.

Водночас можливі варіанти,
якщо $v_2 = 0$, то $K_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$,

$$A_d = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = K_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2};$$

$$K = K_0 - A_d = K_0 - K_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = K_0 \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = \\ = K_0 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right);$$

Порівнявши роботу деформації і кінетичну енергію, після деформації бачимо:

Якщо $m_2 > m_1$, то $A_d > K$.

Якщо $m_1 > m_2$, то $A_d < K$.

Отже, щоб у разі непружного удару отримати більшу роботу деформації A_d , необхідно, щоб маса тіла, яке перебуває у стані спокою, була більшою, ніж маса тіла, яке завдає удар. Якщо необхідно, щоб $K > A_d$, то навпаки.

1.7.5 Закон збереження енергії для системи матеріальних точок

Повна механічна енергія системи тіл або системи матеріальних точок складається з кінетичної і потенціальної енергії тіл або матеріальних точок, які входять у дану систему $E = K + П$.

Для знаходження механічної енергії системи необхідно знайти значення координат і швидкостей матеріальних точок, які входять у систему. Ці величини будуть повністю визначати стан системи в даний момент часу і називаються параметрами системами. Для вільної матеріальної точки таких параметрів шість: три координати (x, y, z) і три проєкції швидкості на осі координат.

Можемо стверджувати, що механічна енергія системи є функцією параметрів системи, які визначають стан її механічного руху.

Розглянемо систему, яка складається із n -числа матеріальних точок, на які діють консервативні, неконсервативні й зовнішні сили.

Для i -ї матеріальної точки рівняння руху можна записати у вигляді

$$m : \frac{dv_i}{dt} = \vec{F}_i^k + \vec{F}_i^{\text{HK}} + \vec{F}_i^e, \quad (1.67)$$

де \vec{F}_i^k – сумарна консервативна сила, яка діє на i -ту матеріальну точку; \vec{F}_i^{HK} – сумарна неконсервативна сила; \vec{F}_i^e – зовнішня сила.

Кожна із точок системи за час dt буде здійснювати переміщення $dr_1, dr_2, dr_3, \dots, dr_n$.

Домножимо рівняння (1.67) скалярно на відповідне переміщення. Маємо

$$m_i \frac{dv_i}{dt} d\vec{r}_i = \vec{F}_i^k d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{\text{HK}} d\vec{r}_i + \vec{F}_i^e d\vec{r}_i. \quad (1.68)$$

Вважаючи, що $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt \Leftrightarrow m(\vec{v}_i dv_i) = dk_i$, бачимо, що ліва частина рівняння (1.68) виражає зміну кінетичної енергії i -ї матеріальної точки системи. Права частина рівняння (1.68) є сумою елементарних робіт відповідних сил з переміщення i -ї матеріальної точки.

Тобто $dk_i = dA_i^k + dA_i^{\text{HK}} + dA_i^e$. Записавши рівняння для кожної матеріальної точки системи і додавши їх, матимемо

$$\sum_{i=1}^n dk_i = \sum_{i=1}^n dA_i^k + \sum_{i=1}^n dA_i^{\text{HK}} + \sum_{i=1}^n dA_i^e.$$

Зважаючи, що

$$\sum_{i=1}^n dk_i = dk \sum_{i=1}^n dA_i^k = -d\Pi; \quad \sum_{i=1}^n dA_i^{Hk} = dA^{nk}; \quad \sum_{i=1}^n dA_i^e,$$

одержимо

$$d(K + \Pi) = dE = dA^{HK} + dA^e. \quad (1.69)$$

Рівність (1.69) виражає закон зміни механічної енергії системи матеріальних точок.

Зміна механічної енергії системи дорівнює роботі, яку здійснюють внутрішні неконсервативні й зовнішні сили.

Якщо система замкнута, то $dA^e = 0$, а отже,

$$d(K + \Pi) = dE = dA^{HK}. \quad (1.70)$$

Робота внутрішніх сил системи завжди призводить до зменшення енергії механічної системи (до дисипації енергії). Дисипацію енергії можна пояснити тим, що робота внутрішніх неконсервативних сил пов'язана з перетворенням механічного руху на інші види руху матерії. Якщо система замкнута і в ній діють лише консервативні сили, то $dE = 0$, а отже, $d(K + \Pi) = const$.

У замкненій системі, у якій діють лише консервативні сили, механічна енергія є величиною сталою.

Відбувається перетворення кінетичної енергії на потенціальну і навпаки, але відсутнє перетворення механічної енергії на інші види енергії. Цей закон є одним

із фундаментальних законів і міститься в більш загальному вигляді, а саме: у законі збереження і перетворення енергії.

Використовуючи закон збереження механічної енергії, можна встановити умови рівноваги тіла чи системи тіл.

Оскільки $E = K + \Pi$, то за умови руху $E > \Pi$, у стані спокою $E = \Pi$, оскільки одночасно $K = 0$.

Будемо вважати, що деяка матеріальна точка рухається без тертя по вказаній поверхні на рисунку. Якщо зобразити залежність потенціальної енергії як функцію координати x , то матимемо аналогічну криву (рис. 1.10).

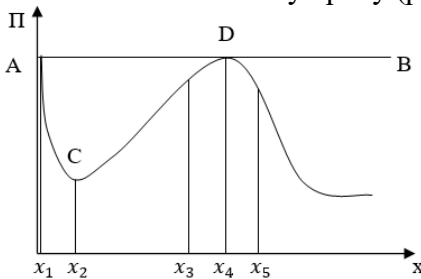


Рисунок 1.10 – Потенціальна енергія рухомого тіла

Будемо вважати, що АВ зображує повну механічну енергію E матеріальної точки.

Якщо відомий графік залежності $\Pi(x)$, то з графіка можна знайти потенціальну й кінетичну енергію.

Вигляд кривої $\Pi(x)$ дозволяє вказати

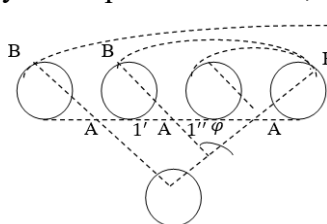
характер руху за заданого значення повної енергії E . Рух на ділянках $x_5 > x > x_3$ неможливий, оскільки одночасно $\Pi > E$, що не має фізичного змісту. Ця ділянка називається потенціальним бар'єром. Тіло може рухатися в межах x_1 до x_3 і такий рух називається фінітним (обмеженим), і від $x > x_5$, такий рух називається інфінітним (необмеженим).

За умови $x_3 > x > x_1$ тіло міститься в потенціальній ямі, з якої вибратися заважають бар'єри зліва і справа. У точці С матимемо мінімум потенціальної енергії, що відповідає стану стійкої рівноваги, у точці D маємо максимум потенціальної енергії, що відповідає стану нестійкої рівноваги.

1.8 Механіка твердого тіла

1.8.1 Тверде тіло як система матеріальних точок. Абсолютно тверде тіло. Поступальний і обертальний рух твердого тіла. Миттєві осі обертання. Поняття про ступені вільності і зв'язків

Раніше було згадано про поступальний і обертальний рух матеріальної точки, так само може рухатися й будь-яке



тверде тіло. Під абсолютно твердим тілом йдеться про систему матеріальних точок, відстань між якими з часом не змінюється. Будь-який

Рисунок 1.11 – Поступальний та обертальний рух тіла

рух твердого тіла може розглядатися як накладання двох рухів –

поступального й обертального.

Якщо тіло рухається із положення 1 у положення 2 щодо деякого полюса O' , то цей рух може бути здійснений кількома способами. Обертанням на кут φ тіла з положення 1 у положення 2 або з положення 1' у положення 1'' поступально, а з положення 1'' у положення 2 обертально на той самий кут φ . Очевидно, з положення 1 у положення 2 рух тіла можна здійснити багатьма способами, але водночас рух буде здійснюватися лише поступальний та обертальний на кут φ . Тому можемо записати

$$d\vec{S} = d\vec{S}_{\Pi} + d\vec{S}_{\text{об}},$$

поділивши обидві частини рівності на час руху, запишемо

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}',$$

де \vec{v}_0 – однакова для всіх точок швидкість поступального руху, \vec{v}' – різна для різних точок швидкість обертального руху. Тобто плоский рух твердого тіла можна подати як суму поступального руху зі швидкістю \vec{v}_0 і обертального з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

Як приклад розглянемо рух циліндра по горизонтальній поверхні. Рух такого циліндра можна розглядати щодо осей O , O' і O'' . Щодо осі O цей циліндр буде рухатися поступально зі швидкістю \vec{v}_0 і обертально з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Цей рух можна розглядати як

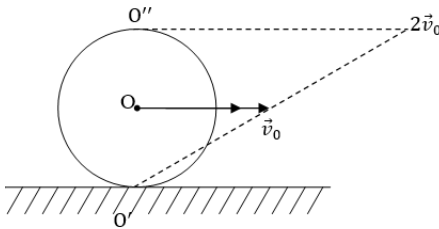


Рисунок 1.12 – Рух циліндра по горизонтальній поверхні

поступальний зі швидкістю \vec{v}'' щодо осі O'' та обертальний зі

швидкістю $\vec{\omega}$ навколо цієї самої осі або розглядати як рух навколо вісі O' лише з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Для будь-якої точки, яка міститься у твердому тілі з радіус-вектором \vec{r} , її лінійна швидкість може бути записана

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}].$$

Оскільки $\vec{v}' = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, можна розглядати рух твердого тіла як обертання навколо деякої осі, яка називається миттєвою. Ця вісь може проходити або через тіло, або розташовуватися зовні від нього. Для вказаного нами циліндра миттєва вісь проходить через O' , причому

положення цієї осі змінюється як у площині, так і по циліндру.

Під час руху матеріальної точки для характеристики її положення у просторі необхідно знати три координати x , y , z . Це означає, що матеріальна точка має три *ступені вільності*. Якщо розглядати рух кульки, підвішеної на нитці, то цей рух буде обмежений підвісом, тому кулька матиме два ступені вільності. Якщо тіло рухається в одному напрямку (наприклад по спиці), то для характеристики його положення необхідно знати одну координату, тобто воно матиме один ступінь вільності.

Система з n матеріальних точок матиме $3n$ ступені вільності, але якщо на такі матеріальні точки накласти зв'язки, то число ступенів вільності буде зменшуватись. Під час обмеження руху твердого тіла, воно може мати один, два тощо ступенів вільності.

1.8.2 Динаміка обертального руху твердого тіла. Момент сили. Момент інерції. Момент імпульсу матеріальної точки. Закон збереження моменту імпульсу матеріальної точки

Рух твердого тіла загалом можна описувати законами кінематики й динаміки поступального руху, але такий підхід є досить громіздким, оскільки тверде тіло є системою матеріальних точок, для кожної з яких необхідно скласти відповідні рівняння. Якщо розглядати обертальний рух твердого тіла, то зручно користуватися характеристиками обертального руху, причому на результат обертального руху впливає не тільки зовнішня сила, а й точка її прикладання та розподіл маси тіла щодо осі обертання.

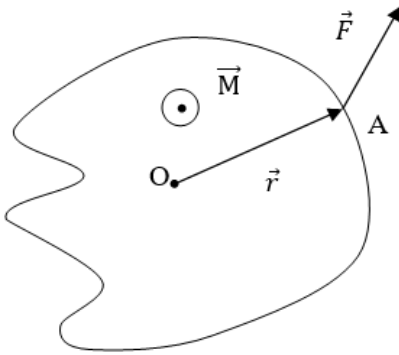


Рисунок 1.13 – Момент сили

Введемо низку нових характеристик для матеріальних точок.

Будемо вважати, що на деяку матеріальну точку А діє сила \vec{F} , радіус-вектор якої \vec{r} щодо осі обертання О. Очевидно, що радіус-вектор \vec{r} і сила \vec{F} будуть лежати в одній площині.

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] \quad (1.71)$$

називається *моментом сили* щодо точки (полюса) О. Причому модуль моменту сили $M = rF \sin(\vec{r} \cdot \vec{F})$.

Момент сили – величина векторна й визначається за правилом правого гвинта або правилом векторного добутку. Він напрямлений вздовж вісі обертання.

$$[M] = \text{м} \cdot \text{Н} \neq \text{Дж}.$$

Аналогічно вводять поняття моменту імпульсу матеріальної точки щодо деякого полюса О.

Момент імпульсу матеріальної точки щодо полюса О дорівнює векторному добутку радіус-вектора \vec{r} точки, який проведений із центра О, на її імпульс $\vec{P} = m\vec{v}$. Тобто

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{P}]. \quad (1.72)$$

Для розв'язку багатьох задач динаміки обертального руху важливим є поняття моменту інерції матеріальної точки. За означенням, *момент інерції* I матеріальної точки – це фізична величина, що чисельно дорівнює

добутку маси матеріальної точки на квадрат відстані матеріальної точки до осі обертання. Тобто

$$I = mr^2. \quad (1.73)$$

Як бачимо з означення, момент інерції матеріальної точки є величиною скалярною $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Диференціюючи рівняння (1.72) за часом, одержимо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{dr}{dt} \cdot \vec{P} \right] + \left[r \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} \right]. \quad (1.74)$$

Перший доданок у (1.74) дорівнює нулю, оскільки $\frac{dr}{dt} = \vec{v} \vec{v} = m\vec{v}$ як добуток двох колінеарних (однаково напрямлених) векторів. У другому доданку $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, тоді рівняння (1.74) матиме вигляд

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] = \vec{M}. \quad (1.75)$$

Це рівняння відоме як *рівняння моментів*, які можна сформулювати так: **похідна за часом моменту імпульсу матеріальної точки щодо нерухомого полюса O дорівнює моменту діючої сили (сил) щодо того самого полюса або зміна моменту імпульсу матеріальної точки дорівнює зміні моменту сили матеріальної точки**, що математично можна записати так: $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Цей висновок можна поширити і на систему матеріальних точок, тоді останнє рівняння матиме вигляд

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e, \quad (1.76)$$

де \vec{M}^e – момент зовнішніх сил. Якщо зовнішні сили відсутні, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, тобто $\vec{L} = \text{const}$, що і виражає закон збереження моменту імпульсу, який можна сформулювати так: у замкнутій системі момент імпульсу є величиною сталою.

Цей закон є одним із фундаментальних законів фізики, найбільш поширеним і застосовним, зокрема в ядерній фізиці. Можуть бути випадки, що момент зовнішніх сил загалом не дорівнює нулю, але проєкція моменту сил на одну з осей координат дорівнює нулю, тоді закон застосовують у проєкціях на осі координат.

Іноді під час визначення моменту сили зручно користуватися поняттям плеча сили. Плече сили – це найкоротша відстань d від осі обертання тіла до точки прикладання або лінії дії сили F . Момент сили визначають як величину, що чисельно дорівнює добутку сили на плече $\vec{M} = \vec{F}d$.

1.8.3 Пара сил

Парою сил називають дві рівні за величиною, але протилежні за напрямом сили ($\vec{F}' = -\vec{F}$) з паралельними лініями дії, які, однак, не збігаються. Відстань d між лініями дії сили називають *плечем пари*. Рівнодійної пара сил не має, оскільки ці сили прикладені до різних точок, але пара сил створює певний обертальний момент.

Визначимо обертальний момент пари сил.

Нехай маємо тіло, яке може обертатися навколо точки O , під дією пари сил \vec{F} і \vec{F}' .

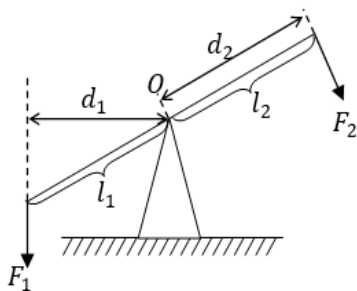
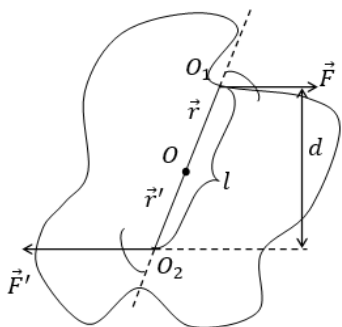


Рисунок 1.14 –
Моменти сил

сил можемо записати

$$\vec{M}_1 = [\vec{r} \cdot \vec{F}], M_1 = rF \sin \alpha = \frac{l}{2} F \sin \alpha;$$



$$\otimes \vec{M}_1$$

$$\otimes \vec{M}_2$$

Рисунок 1.15 – Напряма
моментів сил

Вважатимемо, що вісь обертання проходить через середню точку між точками прикладання сил перпендикулярно до площини, у якій лежать сили. Точка прикладання O буде ділити відстань l між O_1 і O_2 навпіл. З точки O до точки прикладання сил проведемо відповідні радіус-вектори \vec{r} та \vec{r}' . Тоді відповідні моменти

$$\vec{M}_2 = [\vec{r}' \cdot \vec{F}'],$$

$$M_2 = r'F' \sin \alpha' = \frac{l}{2} F' \sin \alpha' = \frac{l}{2} F \sin \alpha.$$

У загальному вигляді можемо записати, що $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$. На підставі рисунка (1.15) бачимо, що моменти сил напрямлені однаково. Тобто

$$M = M_1 + M_2 = \frac{l}{2} F \sin \alpha + \frac{l}{2} F \sin \alpha = lF \sin \alpha = Fd.$$

Звідси момент пари дорівнює добутку сили на плече пари.

Характерним для пари сил є те, що момент щодо будь-якої осі, перпендикулярної до площини пари сил, не залежить від площини осі всередині тіла.

1.8.4 Основний закон динаміки обертального руху. Обчислення моменту інерції твердого тіла

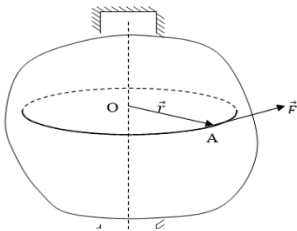


Рисунок 1.16 –
До пояснення
моменту інерції тіла

Розглянемо рух довільного твердого тіла навколо деякої нерухомої осі. Будемо вважати, що такий рух навколо осі відбувається під дією сили \vec{F} , прикладеної в деякій точці А твердого тіла, з радіус-вектором \vec{r} .

Для вказаної матеріальної точки щодо осі обертання можемо записати, що момент імпульсу дорівнює $L = r m v$.

Зважаючи, що $v = \omega r$, то $L = r^2 m \omega$, оскільки кутова швидкість однакова для всіх матеріальних точок $\omega = \text{const}$, то, додаючи моменти імпульсів усіх матеріальних точок, можемо записати

$$L = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Величина $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ є *моментом інерції* твердого тіла щодо осі обертання.

Тоді для моменту імпульсу можемо записати

$$L = I \omega. \quad (1.77)$$

Диференціюючи (1.77) за часом, одержимо

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (I \omega) = M. \quad (1.78)$$

Згідно з (1.76) рівняння (1.78) виражає основний закон динаміки обертального руху, який можна сформулювати так: **похідна моменту імпульсу твердого тіла за часом щодо нерухомої осі дорівнює моменту зовнішніх сил щодо цієї осі.**

Якщо у (1.78) $I = const$, то будемо матимемо

$$I \frac{d\omega}{dt} = M$$

або
$$I\varepsilon = M. \quad (1.79)$$

Рівність (1.79) виражає основний закон динаміки обертального руху.

У векторному вигляді $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$. Бачимо, що кутове прискорення співнаправлене з моментом зовнішніх сил.

Якщо тіло неоднорідне (густина в різних точках різна), то для обчислення моменту інерції дане тіло уявно розбивають на нескінченну кількість матеріальних точок, однорідних за масою. На підставі цього

$$dI = r^2 dm \text{ або } I = \int r^2 dm.$$

Для диска та циліндра момент інерції визначають за формулою $I = \frac{mr^2}{2}$, де m – маса; r – радіус циліндра або диска.

Якщо тіло обертається навколо деякої осі, й водночас рухається поступально, то його кінетична енергія дорівнює сумі кінетичної енергії обертального та поступального рухів

$$K = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Часто закон збереження моменту імпульсу записують у вигляді

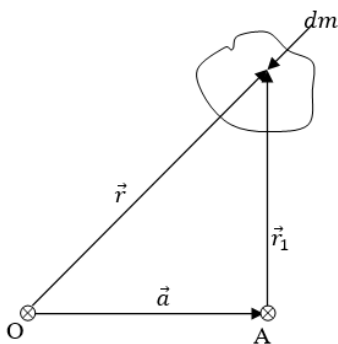
$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 = \dots$$

або $I \omega = \text{const.}$

З цього виразу випливає, що в разі збільшення моменту інерції тіла I його кутова швидкість ω зменшується.

Поставимо завдання знайти момент інерції тіла щодо різних осей обертання, які паралельні між собою.

Будемо вважати, що осі обертання проходять через осі O і A , перпендикулярно до площини дошки. Розіб'ємо деяке тверде тіло на елементарні маси dm (рис. 1.17). Проведемо до однієї з таких мас відповідні радіус-вектори з осей обертання \vec{r} і \vec{r}_1 . Вектор між ними позначимо через \vec{a} . Тоді у векторному вигляді можемо записати



$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{a}.$$

Застосувавши теорему косинусів, можемо записати

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{r})dm.$$

Домноживши ліву й праву частину на dm і взявши інтеграл, одержимо

$$\int \vec{r}_1^2 dm = \int r^2 dm + \int a^2 dm - \int 2(\vec{a} \cdot \vec{r})dm.$$

Рисунок 1.17 –
Виведення теореми
Гюйгенса – Штейнера

Інтеграл зліва дорівнює моменту інерції точки щодо осі А. Перший інтеграл справа – щодо осі О.

$I_A = I_O + ma^2 - 2m(a \cdot R_c)$, де R_c – радіус-вектор центра мас.

Якщо одна з осей, наприклад вісь О, проходить через центр мас, то $R_c = 0$, і тоді можемо записати

$$I_A = I_c + ma^2, \text{ де } I_c \equiv I_O. \quad (1.80)$$

Рівність (1.80) є математичним записом теореми Гюйгенса – Штейнера: **момент інерції тіла щодо довільної осі дорівнює моменту інерції тіла щодо паралельної осі, що проходить через центр мас плюс добуток маси тіла на квадрат відстані між осями.**

Розглянемо приклад розрахунку моменту інерції для різних тіл.

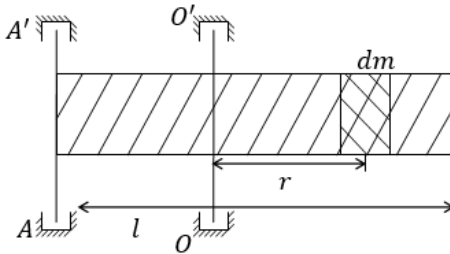


Рисунок 1.18 – Розрахунок моменту інерції

Нехай масмо однорідний стержень довжиною l і масою m , яка рівномірно розподілена по всій довжині так, що $\rho = \frac{m}{l}$ виражає лінійну

густину тіла.

Визначимо момент інерції цього стержня щодо осі OO' , що

проходить через його середину й осі AA' , що проходить через кінець стержня.

Розіб'ємо уявно цей стержень на нескінченно малі маси dm , довжина яких dr , і будемо вважати, що вони розташовані на відстані r від осі обертання. Як бачимо, відстань r буде змінною щодо осі OO' . Можна записати

$$I = 2 \int r^2 dm.$$

Але $dm = \rho dr$.

Тоді $I = 2 \int_0^l r^2 \rho dr$,

$$I = 2\rho \frac{l^3}{24}.$$

Оскільки $\rho \cdot l = m$, то $I_0 = \rho \frac{l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}$.

Знайдемо момент інерції стержня щодо осі AA' , яка проходить через кінець стрижня. Міркуючи аналогічно, одержимо

$$I_A = \int_0^l r^2 \rho dr = \rho \frac{l^3}{3},$$

$$I_A = \frac{ml^2}{3}.$$

Знайдемо момент інерції щодо осі AA' , використовуючи теорему Гюйгенса – Штейнера

$$I_A = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Розглянемо аналогії між механікою обертального та поступального руху.

№ пор.	Поступальний рух	Обертальний рух
1	$d\vec{r}$ – переміщення	$d\vec{\varphi}$ – кутове переміщення
2	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – лінійна швидкість	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – кутова швидкість
3	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ – прискорення	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – кутове прискорення
4	m – маса тіла	I – момент інерції
5	$\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс тіла	$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$ – момент імпульсу
6	\vec{F} – сила	$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$ – момент сили
7	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
8	$m\vec{a} = \vec{F}$ – основне рівняння поступального руху	$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$ – основне рівняння обертального руху
9	$d\vec{A} = \vec{F}d\vec{r}$ – робота під час поступального руху	$d\vec{A} = \vec{M}d\vec{\varphi}$ – робота під час обертального руху
10	$K = \frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху

Вивчивши поступальний і обертальний рух твердого тіла, можемо одержати умови рівноваги твердого тіла.

Основні рівняння динаміки обертального й поступального руху можна записати так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \text{ i } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Це фактично рівняння поступального й обертального рухів. Кожне з цих рівнянь еквівалентне трьом у проекціях на осі координат. За рівноваги одночасно необхідно виконувати такі умови:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum M_{ix} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \sum M_{iy} = 0,$$

$$\sum F_{iz} = 0 \quad \sum M_{iz} = 0.$$

Під час виконання перших трьох умов тіло не буде рухатися поступально, а під час виконання інших – обертально.

Можливі такі види рівноваги:

1) стійка; 2) нестійка; 3) байдужа.

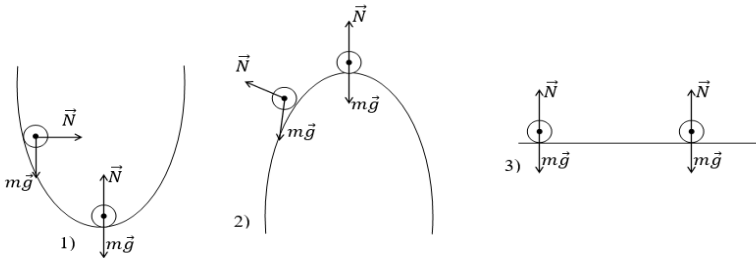


Рисунок 1.19 – Стійка, нестійка та байдужа рівновага

У положенні 1 тіло перебуває у стані стійкої рівноваги. За незначного відхилення від положення рівноваги будуть виникати сили, які повертають тіло до положення рівноваги (це рівнодійна $m\vec{g}$ і \vec{N}).

За нестійкої рівноваги за умови незначного відхилення від положення рівноваги будуть виникати сили, які віддаляють тіло від положення рівноваги.

У разі байдужої рівноваги за умови незначного відхилення тіла від цього положення жодних суттєвих змін у перерозподілі енергії не відбувається.

У положенні стійкої рівноваги в замкнутій системі потенціальна енергія буде $\sum M_{ix} = 0$ $\sum M_{ix} = 0$ – мінімально можливою для даного тіла.

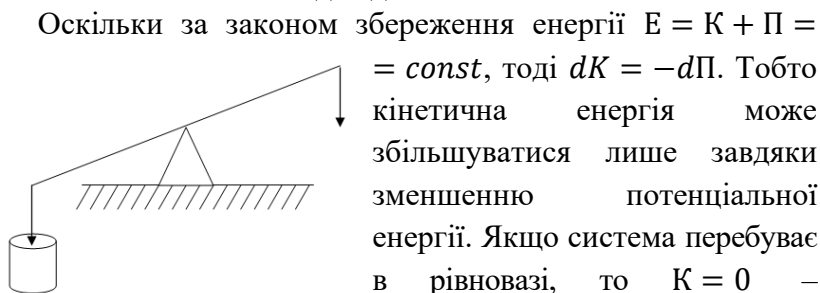


Рисунок 1.20 –
Пояснення взаємних
перетворень енергії
в замкнутій системі

Оскільки за законом збереження енергії $E = K + \Pi = const$, тоді $dK = -d\Pi$. Тобто кінетична енергія може збільшуватися лише завдяки зменшенню потенціальної енергії. Якщо система перебуває в рівновазі, то $K = 0$ – положення рівноваги тіла, яке зазнає дії сили тяжіння. Сила тяжіння завжди прикладається до центра мас і повинна проходити через точку опори тіла. Лише в цьому разі сила тяжіння і сила опору будуть урівноважені.

1.8.5 Вільні осі обертання твердого тіла. Гіроскопи

Досі ми розглядали обертання твердого тіла щодо закріпленої осі. Під час обертання положення осі обертання з часом залишається незмінним завдяки наявності точок опору. Такий факт не є обов'язковим. Іноді вісь обертання тіла залишається незмінною сама собою, такі осі називають *вільними*. Водночас відсутні зовнішні сили, які утримують вісь незмінною. Такі осі

характерні, наприклад, під час кочення циліндра по горизонтальній поверхні.

Вісь обертання буде вільною, якщо вона проходить через центр мас тіла і якщо сума моментів сил, що діють на тіло, яке обертається щодо центра мас, буде дорівнювати нулю.

Теорія та досліди доводять, що в будь-якого твердого тіла є три взаємно перпендикулярні осі обертання, які перетинаються в центрі мас тіла. Для симетричних однорідних тіл положення геометричних осей симетрії збігається з вільними осями обертання (наприклад, куля, паралелепіпед, куб тощо). Якщо тверде тіло обертається навколо однієї з вільних осей і відсутній момент зовнішніх сил, то орієнтація осі у просторі не буде змінюватися з часом. Такий стан буде стійким, якщо під час відхилення від положення рівноваги будуть з'являтися сили, які повертають тіло в положення рівноваги. Досліди й теорія доводять, що найбільш стійким є обертання тіла навколо осі з максимальним моментом інерції.

Властивості вільних осей зберігати свою орієнтацію у просторі досить широко використовують у техніці.

Розглянемо рух гіроскопа. *Гіроскоп* – це однорідне, масивне тіло, яке здійснює досить швидкий обертальний рух навколо осі симетрії, яка є вільною. Гіроскопами можна вважати різні махові колеса, шківні різних машин тощо.

Однією із характерних особливостей гіроскопа є те, що вісь обертання у просторі залишається незмінною. Для вільного зрівноваженого гіроскопа момент сили тяжіння, що діє на нього, щодо центра мас дорівнює нулю. Оскільки ця сила прикладена до центра мас, то сила тяжіння не може змінити орієнтацію осі обертання гіроскопа, як і інші сили, якщо їхній момент інерції щодо центра мас гіроскопа дорівнює нулю.

Це випливає з такого: оскільки $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, то за умови $\vec{M} = 0$, $\vec{L} = \text{const}$, тобто $I\vec{\omega} = \text{const}$, а отже, за умови $I = \text{const}$, $\vec{\omega} = \text{const}$, тобто кутова швидкість залишається незмінною.

Іноді момент прикладеної зовнішньої сили до гіроскопа щодо центра мас не дорівнює нулю, але проміжок дії сили нескінченно малий. У таких випадках, якщо гіроскоп обертається досить швидко, то його вісь залишається практично незмінною у просторі. Водночас виникає лише слабкий рух навколо попереднього напрямку осі. Таке явище називається *нутацією*. Оскільки $d\vec{L} = \vec{M}dt$, за умови $dt \rightarrow 0$, матимемо $d\vec{L} = 0$, тоді $\vec{\omega} = \text{const}$.

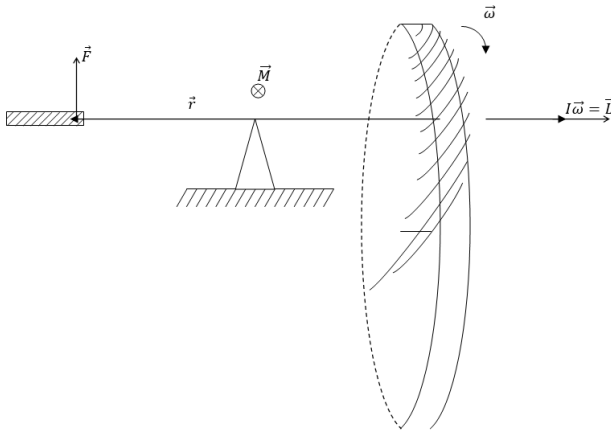


Рисунок 1.21 – Гіроскоп

Гіроскопу притаманна ще одна властивість. Якщо на вісь гіроскопа, що обертається, подіяти силою, момент якої не дорівнює нулю, то його вісь буде повертатися в напрямку, перпендикулярному до напрямку дії сили і кутової швидкості обертання $\vec{\omega}$.

1.9 Сили тертя і сили пружності

1.9.1 Сили тертя. В'язке тертя. Формула Стокса. Закони сухого тертя. Тертя спокою і тертя ковзання

Досліди доводять, що будь-яке тіло, яке рухається по поверхні іншого чи в іншому середовищі з часом зупиняється. Це означає, що на нього з боку інших тіл діє сила, напрямлена проти швидкості руху, ця сила називається *силою тертя* (точніше силою опору).

Тертям називають тангенціальні взаємодії між дотичними тілами, що виникають під час їхнього відносного переміщення. Сили тертя виявляються під час відносного зміщення тіл чи частинок середовища, що дотикаються, і спрямовані проти вектора відносної швидкості тангенціально до поверхні дотику. Водночас завжди відбувається нагрівання тіл, що дотикаються.

Тертя, яке виникає під час відносного переміщення дотичних тіл, називається зовнішнім або сухим.

Тертя, що виникає в разі відносного руху частинок одного й того самого тіла або частинок речовини, називається внутрішнім або в'язким. Воно характерне для рідин або газів.

Зовнішнє тертя поділяють на тертя спокою (статичне) та руху (кінематичне).

Статичне виникає між взаємно нерухомими тілами. А кінематичне виникає за відносного руху тіл, що дотикаються.

Крім того, серед зовнішнього тертя розрізняють такі: тертя ковзання, тертя кочення і тертя обертання.

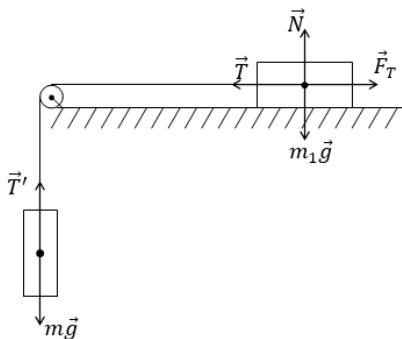


Рисунок 1.22 – Рівнодійна сил

Щоб виміряти силу тертя, що діє на тіло масою m , до нього прикладають відому силу такої величини, щоб тіло рухалося рівномірно (рис. 1.22). Оскільки нитка нерозтяжна, то сили натягу \vec{T} і \vec{T}' будуть однакові за величиною.

У реальних рухах завжди виникають сили більшої чи меншої величини, а тому, складаючи рівняння руху тіла, завжди необхідно враховувати, крім інших сил, і силу тертя

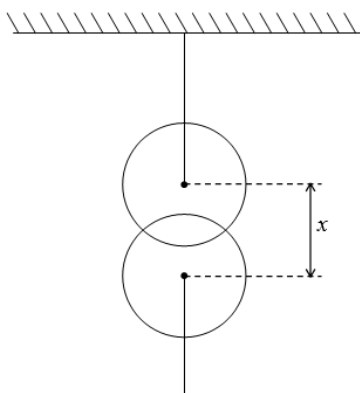
$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$


Рисунок 1.23 – Пояснення в'язкого тертя

Вантаж масою m підбирають таким, щоб тіло рухалося рівномірно. Можемо записати динамічні рівняння руху для кожного вантажу

$$m_1 a = \vec{T}' - F_T = 0, \quad m a = m g - \vec{T}' = 0, \quad \text{тоді } \Leftrightarrow F_T = m g.$$

Розглянемо в'язке тертя, одночасно звернемося до такого дослідів. Нехай маємо два паперових диски, розміщені паралельно один над одним на деякій

невеликій відстані x . Нижній диск може обертатися навколо своєї осі з деякою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Якщо нижній диск привести в обертальний рух зі швидкістю $\vec{\omega}$,

то через деякий час верхній диск почне обертатися з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$, яка буде меншою, ніж $\vec{\omega}$. Це означає, що на верхній диск подіяла сила тертя.

Ньютон експериментально встановив, що

$$F_T = \eta \left(\frac{dv}{dx} \right) S,$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя; $\frac{dv}{dx}$ – градієнт швидкості; а S – площа поверхні, на яку діє сила. Градієнт – це зміна деякої величини в певному напрямку. Розмірність: $[\eta] = \frac{\text{Нс}}{\text{м}^2}$.

Під час руху тіл у рідинах або в газах, крім сили тертя, виникають так звані сили опору середовища, величина яких може значно перевищувати сили тертя. Однак загалом дію сил тертя та сил опору називають просто силою тертя.

За малих швидкостей руху сила опору пропорційна швидкості, тобто $F = -k_1 v$, де k_1 – коефіцієнт пропорційності, а знак «-» вказує на те, що сила напрямлена проти швидкості руху.

За великих швидкостей $F = -k_1 v^2$.

За надзвукових швидкостей $F = -k_1 v^3$. Величина швидкості переходу від лінійної до квадратичної залежності визначається властивостями середовища. Для тіл сферичної форми, що рухаються у в'язких середовищах із невеликими швидкостями, для розрахунку сил тертя використовують формулу

$$F = 6\pi r \eta v,$$

яка відома як *формула Стокса*, де r – радіус кульки; η – коефіцієнт в'язкості, v – швидкість руху кульки.

1.9.2 Сухе тертя

Сили тертя, що діють між дотичними поверхнями, називають *силами сухого тертя*. Сили сухого тертя діють як під час руху тіл одне щодо одного, так і за відносного спокою. Характерною особливістю цих сил, яка відрізняє їх від рідкого тертя, є те, що за умови зменшення відносної швидкості до нуля, сили сухого тертя на нуль не перетворюються, а дорівнюють деякій сталій величині, яка називається *тертям спокою*. Якщо на одне тіло вздовж поверхні його дотику з іншими, зовні жодна сила не діє, то сила тертя спокою одночасно дорівнює нулю. У міру зростання величини зовнішньої сили буде зростати і протилежно напрямлена їй сила тертя спокою, і якщо сума цих сил буде рівна нулю, то тіло в рух не прийде.

Тобто сила тертя спокою є величиною неоднозначною. Зі зміною зовнішньої сили відповідно змінюється й сила тертя спокою так, щоб зрівноважити зовнішню силу, але сила тертя спокою може змінювати свою величину до деякого максимального значення. Це означає, що тіло буде залишатися у спокої доти, доки зовнішня сила не стане

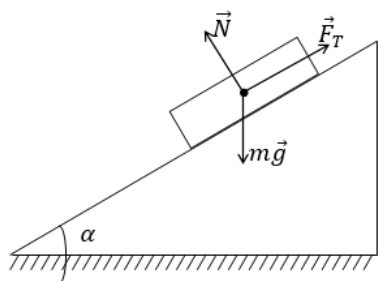


Рисунок 1.24 – Сила тертя

більшою, ніж деяка максимальна сила \vec{F}_{max} . Тільки-но зовнішня сила стане більшою, виникне рух одного тіла по поверхні іншого.

Величина сил сухого тертя як за відносного спокою, так і під час руху, залежить від матеріалу, стану їхніх дотичних поверхонь, а

також від величини сили нормального тиску одного тіла на інше.

Вплив указаних фактів на величину сил сухого тертя експериментально досліджували Амонтон і Кулон. Їхні дослідження були сформульовані так.

Величина сил тертя, що діють між двома даними тілами, не залежить від площі їхнього дотику та пропорційна силі нормального тиску

$$F_T = \mu N,$$

де N – сила нормального тиску.

Експериментально коефіцієнт тертя можна визначити за допомогою похилого трибометра. Підбираємо кут нахилу такий, щоб тіло рухалося рівномірно, тоді рівняння руху (другий закон Ньютона) можна записати у вигляді

$$ma = -F_T + mg \sin \alpha,$$

$$F_T = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

і

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = 0.$$

Звідси $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ (за рівномірного руху).

1.9.3 Тертя кочення

Досліди доводять, що і під час кочення тіл із часом зменшується швидкість як поступального, так і обертального руху, але одночасно виникають не сили тертя ковзання, а інші сили. Під час кочення відбувається деформація обох тіл, що взаємодіють. Оскільки зменшується швидкість руху тіла \vec{v} , то це означає, що на тіло повинна подіяти деяка сила F_T , яка повинна збільшити

лінійну швидкість обертання \vec{v}' , але цього не спостерігається. Ми спостерігаємо зменшення як \vec{v} , так і \vec{v}' . Це означає, що, крім сили F_t , є ще й сила F_n , яка зменшує швидкість \vec{v}' . Причому сили F_t і F_n є результатом розкладу сили нормального тиску \vec{N} на дві складові. Сила \vec{N} напрямлена під час кочення не вертикально, а під деяким кутом, оскільки поверхні тіл деформуються. Тобто виникають горизонтальна складова F_t , що сповільнює горизонтальний рух тіла, і вертикальна складова F_n , що зменшує лінійну швидкість його обертального руху.

Силу тертя кочення можна визначити експериментально.

Один із методів полягає в такому: за допомогою деякої сили F приводять у рівномірний рух циліндр, тоді розраховують силу F_t і F_n . Оскільки рух рівномірний, то $F_t = F$. Знаходячи ці сили, можемо записати, що

$$F = mg \frac{S}{R},$$

де R – радіус циліндра; S – зміщення сили нормального тиску від вертикалі внаслідок деформації. Як бачимо з

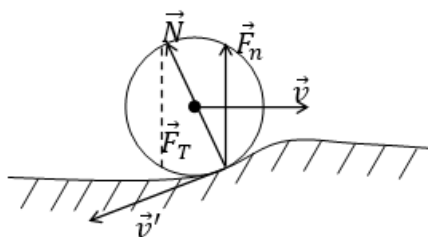


Рисунок 1.25 – Тертя кочення

останнього виразу, сила тертя кочення за величиною прямо пропорційна силі тяжіння й обернено пропорційна радіусу тіла, що рухається

обертально. Коефіцієнтом пропорційності є величина $S \ll R$, яка

називається коефіцієнтом тертя ковзання. Як бачимо, величина S розмірна $[S] = \text{м}$.

Оскільки, $\frac{S}{R} \ll \mu$, то сила тертя ковзання буде набагато більшою, ніж сила тертя ковзання F_t .

1.10 Елементи механіки рідин і газів

1.10.1 Тиск у рідинах і газах. Закон Паскаля. Закон Архімеда

У твердих тілах атоми й молекули здійснюють коливальні рухи навколо положень рівноваги. Водночас середня відстань між молекулами твердих тіл за сталої температури залишається постійною, унаслідок чого тверді тіла зберігають свою форму. Для деформації твердих тіл до них треба прикласти немалі сили.

У рідинах і газах немає настільки сильного зв'язку між молекулами, як у твердих тілах. Унаслідок хаотичного руху молекул їхнє розміщення одна щодо одної буде довільним. Тому рідини й гази – це фізичні тіла, які, не маючи певної форми, набувають форми тієї посудини, у якій вони містяться.

На відміну від газів, у рідинах, незважаючи на хаотичний рух молекул, середня відстань між сусідніми молекулами залишається майже незмінною. Отже, рідини – це фізичні тіла без конкретної форми, але з майже незмінним об'ємом, який називають власним. Рідини завжди обмежені певними поверхнями, які відділяють їх від твердих тіл або газів. Поверхню, що відділяє рідину від газу, називають вільною. Наявність вільних поверхонь у рідин дає їм можливість за певних умов утворювати

краплини. Тому рідини іноді називають краплинними середовищами.

Газоподібні тіла обмежені або поверхнями рідин, або поверхнями твердих тіл. Вони не мають власного об'єму. Якщо до поверхні деякого об'єму рідини або газу прикладена незначна сила, то її дія призведе до переміщень одних частин щодо інших. Тому за звичайних умов рідини або газу не чинять опору за умови зміни форми, але чинять опір у разі зміни об'єму.

Для задач механіки відмінності між рідинами й газами, за винятком особливих випадків руху, неістотні. Тому під словом рідини в цьому розділі йтиметься як про краплинні рідини, так і газу. У деяких випадках розрізнятимемо краплинні (які не піддаються стисканню) і газоподібні рідини.

Розділ механіки, у якому вивчають стан рівноваги і руху рідини під дією зовнішніх сил, називають *гідроаеромеханікою*. Гідроаеромеханіка поділяється на гідроаеростатику і гідроаеродинаміку. Гідроаеростатика вивчає рівновагу рідин і газів. У стані рівноваги напруження в рідинах і газах завжди нормальні до поверхонь, на які вони діють.

У механіці рідини й газу розглядають як суцільні середовища. *Суцільним* називають середовище, яке безперервно розподілене у просторі та має властивість плинності. Водночас не враховують молекулярну будову середовища. Це означає, що будь-який елемент об'єму рідини або газу містить дуже велике число молекул. Цей елемент об'єму малий порівняно з усім об'ємом рідини або газу, але його розміри великі порівняно з міжмолекулярними відстанями. Плинність суцільного середовища зумовлена рухом його молекул. Виділимо всередині рідини довільний елементарний об'єм і розглянемо сили, які діють на нього.

Їх можна поділити на внутрішні й зовнішні. Внутрішні сили зумовлені взаємодією частинок рідини в елементарному об'ємі. Оскільки вони взаємно урівноважуються, то їх урахувати не будемо. Зовнішні сили зумовлені дією сусідніх елементів, сили тяжіння тощо.

Зовнішні сили поділяють на об'ємні (масові) та поверхневі сили. Об'ємні сили – це сили, що діють на елементарні об'єми, у яких міститься певна маса рідини чи газу. До них належать сили тяжіння, сили інерції. Поверхневі сили – це такі сили, які діють на поверхню, що обмежує елементарний об'єм.

Для зміни об'єму рідини або газу необхідна дія зовнішніх сил. В інерціальній системі відліку на тіло, що вільно падає, діють сили тяжіння, але зміни об'єму не виникає. Якщо ж діють поверхневі сили, то деформації виникають завжди. Це вказує на те, що в разі зміни об'єму рідини або газу в них виникають пружні сили, дія яких однакова за значенням і протилежна за напрямом дії зовнішніх сил. Дія пружних сил у рідинах і газах виявляється в тому, що окремі їхні елементарні об'єми діють один на одного або на тіла, з якими вони межують. Якщо рідина перебуває у спокої, то її елементарні об'єми не змінюють взаємного розташування.

Величину, яка дорівнює відношенню сили, що діє нормально на елемент поверхні, до її площі, називають *тиском*, тобто

$$p = \frac{dF}{dS}. \quad (1.81)$$

Тиск – величина скалярна і для заданої точки рідини або газу не залежить від орієнтації площини dS . За одиницю тиску в СІ вибраний паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/1 м}^2$).

Залежно від величини тиску користуються різними його одиницями вимірювання. Тиск, вищий від атмосферного, вимірюють в атмосферах і в міліметрах ртутного стовпа, у техніці тиск вимірюють технічними атмосферами.

Для рідин і газів, які перебувають у рівновазі, виконується **закон Паскаля**: *тиск у будь-якій точці рідини або газу, які перебувають у спокої, однаковий в усіх напрямках і передається в усіх напрямках однаково.*

Для обґрунтування закону Паскаля застосовують принцип тверднення, який у межах цього посібника розглядати не будемо.

Закон Паскаля лежить в основі роботи гідравлічних пресів і підйомників, гідравлічних і пневматичних гальм в автомобілях та інших механізмах.

Гідростатичний тиск рідини залежить від густини рідини ρ та висоти її стовпа і не залежить від форми посудини, у якій міститься рідина. Якщо тиск на вільну поверхню нерухомої рідини p_0 , то гідростатичний тиск рідини на глибині h буде

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (1.82)$$

Для вимірювання гідростатичного тиску застосовують прилади, які називають *манометрами*. Найпростіший тип манометра являє собою U-подібну трубку, один кінець якої з'єднується з посудиною, у якій вимірюють тиск, другий – з атмосферою або запаяний, і повітря з нього відкачане. За різницею рівнів рідин у колінах манометра визначають тиск у посудині. Для вимірювання великих тисків застосовують металеві манометри, у яких металева пружна трубка приєднується до резервуара, у якому вимірюють тиск. У разі зміни тиску змінюється конфігурація трубки. Її зміна фіксується за допомогою стрілки чи іншого

показчика тиску. Низькі й високі тиски вимірюють приладами, дія яких ґрунтується або на залежності електричного опору манганінової дротини від тиску, або на залежності електричних властивостей кварцових пластинок від тиску (п'єзоелектричний ефект). Манометри складаються з чутливого елемента й елемента, який силу тиску перетворює на іншу величину, зручну для вимірювання. За типом чутливого елемента манометри поділяють на рідинні, механічні, поршневі, електричні, теплові, радіоактивні та інші.

У зв'язку з тим, що на різних рівнях у рідині або газі тиски різні, на занурене в рідину або газ тіло діє виштовхувальна сила. Якщо рідину, обмежену поверхнею, вилучити і на її місце помістити будь-яке тіло такого самого об'єму, то на нього діятиме напрямлена вертикально вгору така сама рівнодійна, або виштовхувальна сила. Отже, ми приходимо до відомого **закону Архімеда**: *на будь-яке тіло, занурене в рідину (газ), діє з боку рідини (газу) виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини (газу)*. Ця сила напрямлена вертикально вгору і прикладена до центра мас витісненого об'єму рідини. Якщо рідина перебуває у стані невагомості, то зміна тиску, зумовлена силою тяжіння, зникає, а з нею зникає і виштовхувальна сила.

Закон Архімеда використовують для оцінювання плавучості та стійкої рівноваги суден. Розміщення центра плавучості визначає рівновагу тіл, що плавають у рідинах. Для рівноваги тіла, зануреного в рідину, необхідно, щоб вага тіла дорівнювала вазі витісненої ним рідини, а центр плавучості лежав на одній вертикалі з центром мас самого тіла.

1.10.2 Рівняння Бернуллі. Реакція рідини, що витікає

Гідродинаміка – розділ гідромеханіки, у якому вивчається рух нестисливих рідин і взаємодія їх із твердими тілами. Завдання гідродинаміки полягає в тому, щоб знайти співвідношення, які дають можливість за величинами сил описати стан руху рідини або за станом руху рідини знайти сили, що діють.

Рух рідини або газу можна вивчати двома методами. У першому вивчають рух кожної частинки рідини окремо. Він вимагає визначення кінетичних характеристик руху (переміщення, швидкість, прискорення) частинок рідини під час переміщення їх у просторі та часі. Такий метод вивчення стану руху рідини запропонував французький математик Ж. Лагранж (1736–1813) і називається він методом *Лагранжа*. Виведення законів руху рідини за методом Лагранжа пов'язане із значними математичними труднощами, тому на практиці користуються іншим методом. Спостерігають не за рухом кожної частинки рідини, а в потоці рідини виділяють фіксований елементарний об'єм і вивчають, що відбувається з плином часу в кожній точці виділеного об'єму. Такий метод вивчення стану руху рідини розробив видатний математик і фізик Л. Ейлер (1707–1783), тому називається він методом *Ейлера*. Водночас відзначають не про швидкості та прискорення частинок рідини, а про швидкість і прискорення потоку рідини.

Вивчаючи рух рідини, користуються ідеалізованим об'єктом або рідиною, яку називають *ідеальною*, тобто рідиною, яка абсолютно нестислива і повністю позбавлена внутрішнього тертя.

Потік рідини або газу називають *стаціонарним*, якщо його швидкість в усіх точках простору з часом не змінюється. Для полегшення аналізу руху рідини або газу

користуються лініями і трубками течії. Під лінією течії йдеться про лінію, дотична до якої в кожній точці збігається з вектором швидкості v . Лінія течії і траєкторія руху частинки загалом не збігаються. Траєкторія вказує шлях тієї самої частинки за весь час її руху. Лінія ж течії характеризує напрям руху нескінченної множини частинок, які в даний момент часу розташовані на лінії. Тільки за умови стаціонарного потоку рідини або газу лінії течії збігаються з траєкторіями руху частинок. У разі нестаціонарних потоків такого збігу немає.

Частину рідини, обмежену лініями течії, називають *трубкою течії*. Усі частинки, що містяться всередині трубки течії, не виходять за межі трубки і жодна з частинок, що перебувають за межами трубки течії, не проникає в неї. Трубку течії можна уявити як трубку з жорсткою бічною поверхнею, якою протікає рідина. Якщо поперечний переріз трубки течії малий, то можна вважати, що швидкість рідини для всіх точок заданого перерізу однакова.

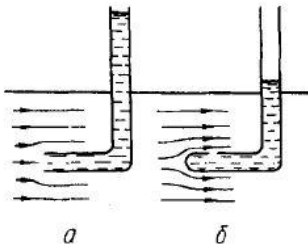


Рисунок 1.26 – Трубка Піто (а) та зонд (б) для вимірювання тиску всередині рідини

З використанням вищезазначених методів встановлений зв'язок між тиском і швидкістю стаціонарного руху ідеальної рідини. Для будь-якого перерізу трубки течії виконується умова

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = const. \quad (1.83)$$

Рівняння (1.83) є *рівнянням Бернуллі* для стаціонарного потоку ідеальної рідини. У рівнянні Бернуллі тиск p називають статичним. Його вимірюють за

допомогою манометричних трубок із перерізом, паралельним лінії течії. Для вимірювання складової тиску $\rho v^2/2$, зумовленого рухом рідини, застосовують трубки з перерізом, перпендикулярним до лінії течії. Цю складову називають динамічним тиском, а суму $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh$ називають повним тиском, або повним натиском. Для його вимірювання користуються трубкою Піто. Це зігнута манометрична трубка, яку розміщують у рухомій рідині так, що її відкритий край повернутий назустріч течії рідини (рис. 1.26 а). Для вимірювання статичного тиску p користуються зондом. Він відрізняється від трубки Піто тим, що його передня частина, повернута назустріч потоку рідини, запаяна, а в боковій стінці є невеликий отвір (рис. 1.26 б). На практиці трубку Піто і зонд суміщають в одному приладі, який називають трубкою Прандтля.

Експериментально доведено, що рівняння Бернуллі можна застосувати і для реальних рідин, в'язкість яких невелика, а також для газів, швидкість руху яких значно менша від швидкості поширення в них звуку.

Оскільки сума тиску й динамічного натиску в потоці рідини стала, то у струмені тиск завжди менший, ніж у нерухомій рідині. За великих швидкостей тиск може стати меншим від атмосферного. Це явище застосовують у пульверизаторах, карбюраторах, водоструминних насосах та в інших приладах.

За достатньої швидкості течії тиск повітря у звуженій частині трубки буде менший від атмосферного. Унаслідок цього рідина піднімається по вертикальній трубці вгору, оскільки тиск над її верхнім кінцем менший від атмосферного, що діє на вільну поверхню рідини в посудині. За умови подальшого збільшення швидкості повітря у звуженій частині горизонтальної трубки рідина

піднімається вище від верхнього перерізу вертикальної трубки, захоплюється струменем повітря і розпилюється. Подібні явища спостерігаються в карбюраторі. Повітря під час засмоктування в циліндр двигуна внутрішнього згоряння рухається звуженим каналом, у який входить трубка. Кінець цієї трубки міститься в рідкому паливі. Звуження каналу зумовлює зниження тиску, унаслідок чого рідке паливо піднімається по трубці і розпилюється повітрям.

1.10.3 Рух в'язкої рідини. В'язкість. Формула Пуазенля

На відміну від ідеальних рідин, у реальних рідинах під час руху одних шарів рідини щодо інших діють сили, дотичні до поверхонь їхнього дотику. Ці сили називають *силами в'язкого тертя* або *силами в'язкості*. Уявно потік рідини можна поділити на нескінченну кількість прошарків. У разі відносного переміщення на кожен із прошарків діють сили: з боку прошарку, швидкість якого більша, діє сила на прошарок, швидкість якого менша. Напрямок цієї сили збігається з напрямком руху рідини.

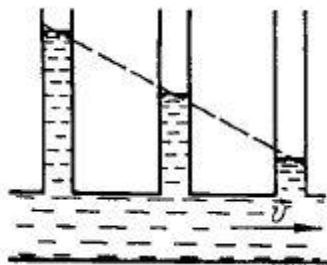


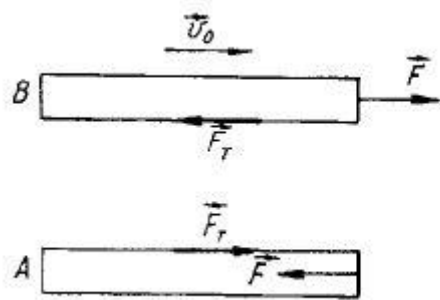
Рисунок 1.27 – Рух рідини у трубці

З боку прошарку, швидкість руху якого менша, на прошарок, що рухається з більшою швидкістю, діє сила, напрямлена у протилежний бік від руху рідини, тобто вона цей прошарок гальмує.

Наявність сил в'язкості, що діють у рухомій рідині, підтверджують дослідні дані. Так, під час руху рідини в горизонтальній

трубі сталого перерізу рівні рідини в манометричних трубках, згідно із законом Бернуллі, повинні бути однакові. Насправді ж, тиск рідини у трубі спадає в напрямі її руху (рис. 1.27). Для того, щоб рух рідини у трубі був стаціонарним, на її кінцях треба підтримувати сталу різницю тисків, сила яких зрівноважує сили внутрішнього тертя. Зовнішні сили під час переміщення рідини у трубі виконують роботу, яка йде на подолання сил в'язкого тертя. В'язке тертя в рухомій рідині значно ускладнює опис її руху. Так, під час стаціонарного руху в'язкої рідини швидкість течії в різних точках поперечного перерізу неоднакова. Шар рідини, що безпосередньо прилягає до стінок труби, «прилипає» до неї, залишаючись практично нерухомим. З віддаленням від стінок труби швидкість руху прошарків рідини зростає.

Для з'ясування закономірностей, яким підлягають сили в'язкого тертя, розглянемо такий дослід. У рідину помістимо дві пластини, лінійні розміри яких значно перевищують відстань між ними (рис. 1.28). Вважатимемо, що нижня пластина А нерухома, а верхня пластина В



рухається щодо нижньої зі швидкістю u_0 . Щоб пластина В рухалася зі сталою швидкістю, на неї повинна діяти певна сила F . Оскільки пластина рухається без прискорення, то

Рисунок 1.28 – Сили в'язкого тертя на неї у протилежному напрямі до руху діє рівноважна сила, яка є силою в'язкого тертя, тобто $F_T = -F$. Виявляється, щоб

нижня пластина перебувала у спокої, до неї треба прикласти також силу F , але протилежну за напрямом.

І. Ньютон експериментально встановив, що сила пропорційна площі пластини S , швидкості v_0 і обернено пропорційна відстані між пластинами d , тобто

$$F = \eta S \frac{v^2}{d}, \quad (1.84)$$

де η – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи й стану рідини. Його називають *динамічним коефіцієнтом внутрішнього тертя* або *коефіцієнтом в'язкості* чи просто в'язкістю.

Формула (1.84) справджується не тільки за умови, що одна з пластин перебуває у спокої, вона діє і тоді, коли обидві пластини рухаються рівномірно, але з різними швидкостями. Отже, формула (1.84) матиме вигляд

$$F = \eta S \frac{dv}{dx}. \quad (1.85)$$

З формули (1.85) можна встановити фізичний зміст коефіцієнта в'язкості: як бачимо, $\eta = F$ за умови $S = 1$ і $dv/dx = 1$, тобто коефіцієнт в'язкості чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю площі рухомих шарів рідини за умови градієнта швидкості, що дорівнює одиниці. Одиницею в'язкості у СІ є паскаль-секунда (Па · с).

Висловлені в цьому параграфі міркування однаковою мірою стосуються як рідин, так і газів. Відмінність виявляється лише в тому, що коефіцієнт в'язкості для рідин зменшується з підвищенням температури, а для газів, навпаки, зростає з підвищенням температури.

Розглянемо стаціонарний потік рідини в горизонтальній циліндричній трубі сталого перерізу, радіус якої R . Знайдемо закон зміни швидкості із зміною відстані r від

осі труби. Виділимо у трубі циліндричний об'єм рідини радіуса r і завдовжки l (рис. 1.29). Вісь симетрії циліндра збігається з віссю труби. На основи циліндра діють сили тиску, рівнодійна яких збігається з напрямом течії,

$$F = (p_1 - p_2)\pi r^2. \quad (1.86)$$

На бічну поверхню циліндра діє сила тертя, що матиме вигляд

$$F_T = \eta S \frac{dv}{dx} = \eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr}, \quad (1.87)$$

де $S = 2\pi r l$ – площа бічної поверхні циліндра.

Для стаціонарного потоку $F = F_T$, тобто

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = 2\pi\eta l \frac{dv}{dr}. \quad (1.88)$$

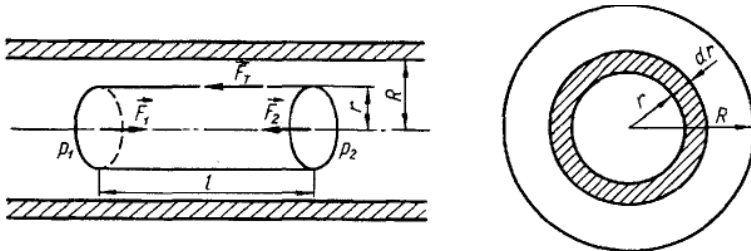


Рисунок 1.29 – Зміна швидкості із зміною відстані r від осі труби

Оскільки швидкість руху рідини з віддаленням від осі труби зменшується, то $\frac{dv}{dr} < 0$ і рівняння (1.88) перепишемо так:

$$(p_1 - p_2)r = -2\eta l \frac{dv}{dr}. \quad (1.89)$$

Звідси маємо

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr. \quad (1.90)$$

Проінтегрувавши цей вираз, маємо

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \quad (1.91)$$

Сталу інтегрування визначаємо з граничних умов. Для $r = R$ $v = 0$, тоді

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Вираз (1.91) набуває вигляду

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (1.92)$$

Максимальну швидкість має рідина на осі труби, тобто

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (1.93)$$

На підставі виразу (1.93) формулу (1.92) можна записати

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (1.94)$$

Отже, у разі віддалення від осі труби швидкість v змінюється за параболічним законом.

Визначимо об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз труби за проміжок часу t . Уявно

поперечний переріз труби поділимо на концентричні кільця, ширина яких dr (рис. 1.29). Площа кільця $dS = 2\pi r dr$. За час t через таке кільце протікає об'єм рідини

$$dV = v t dS = 2\pi r v t dr. \quad (1.95)$$

На підставі (1.92) вираз (1.95) перепишемо у вигляді

$$dV = \frac{(p_1 - p_2)\pi t}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr. \quad (1.96)$$

Проінтегрувавши вираз (1.96), дістаємо

$$V = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \pi t \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \pi t \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right),$$

а за одиницю часу

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (p_1 - p_2). \quad (1.97)$$

Формулу (1.97) називають *формулою Пуазейля*. З цієї формули випливає, що об'єм рідини, яка протікає через трубу за умови сталого перепаду тисків, пропорційний четвертому степеню радіуса труби й обернено пропорційний довжині труби та в'язкості рідини.

Формула справедлива тільки для ламінарних потоків рідини. *Ламінарним* називають такий потік, за якого частинки рідини рухаються вздовж прямолінійних траєкторій, паралельних осі труби.

Формула Пуазейля покладена в основу експериментальних методів визначення в'язкості рідин і газів. До турбулентних потоків формула Пуазейля непридатна.

1.11 Коливання і хвилі

1.11.1 Рух тіл під дією пружних і квазіпружних сил. Вільні коливання лінійного гармонічного осцилятора. Диференціальне рівняння власних коливань і його розв'язок

Будь-яка фізична система, яка здійснює коливання навколо положення рівноваги, називається *осцилятором*. Найпростішим осцилятором можна вважати матеріальну точку, яка здійснює рух вздовж деякої прямої. За умови такого руху вздовж однієї прямої положення матеріальної точки можна характеризувати однією координатою x (y , z), і потенціальну енергію Π можна характеризувати однією координатою $\Pi = \Pi(x)$.

Якщо фізична система має положення стійкої рівноваги, то одночасно її потенціальна енергія буде мінімальною. У момент початку відліку положення матеріальної точки можемо вважати $\Pi = 0$.

За незначних відхилень від положення рівноваги $\Pi = \frac{kx^2}{2}$.

Тоді сила, що діє на дану фізичну систему, може бути записана у вигляді

$$F = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -kx.$$

Знак « \rightarrow » вказує на протилежний напрямок сили і зміщення.

Сили, які описує останнє рівняння, називаються *квазіпружними*. Властивості цих сил полягають у такому: 1) вони напрямлені до положення рівноваги; 2) модулі їх пропорційні величині відхилення від положення рівноваги.

Сила, яка повертає математичний маятник у положення рівноваги, є квазіпружною. Сила, яка повертає пружинний маятник, є пружною за природою.

Щоб гармонічний осцилятор здійснював коливання, йому необхідно надати певний запас енергії. Якщо в початковий момент часу системі надана потенціальна енергія, то повна енергія $E = \Pi (K = 0)$.

Під час проходження положення рівноваги $E = K (\Pi = 0)$. У подальшому повна енергія буде дорівнювати у крайній точці – потенціальній, у разі повернення – кінетичній, але в будь-який момент часу (закон збереження енергії) $E = K + \Pi = \text{const}$, якщо сил опору не враховувати.

Запишемо рівняння коливань осцилятора для випадку відсутності зовнішніх сил.

Матимемо $ma = F = -kx$,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.98)$$

або $mx'' + kx = 0 (m\ddot{x} + kx = 0); \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, (1.99)

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Рівняння (1.98)–(1.99) є диференціальними рівняннями вільних коливань осцилятора.

Їхнім розв'язком є рівняння виду

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.100)$$

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.101)$$

де x – зміщення осцилятора від положення рівноваги в будь-який момент часу; A – найбільше відхилення від

положення рівноваги (амплітуда); ω_0 – фаза; φ_0 – початкова фаза, яка визначає положення матеріальної точки в момент початку відліку часу; $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза, яка визначає положення матеріальної точки в будь-який момент часу.

Коливання, які відбуваються за таким законом, називаються вільними, тобто сил тертя одночасно ми не враховуємо (іноді називають власними).

У тому, що (1.100) і (1.101) є розв'язками, ми можемо впевнитися, підставивши відповідні величини у рівняння (1.99).

1.11.2 Енергія гармонічного осцилятора

Кінетичну та потенціальну енергії ми можемо записати для гармонічного осцилятора у вигляді

$$E = K + \Pi = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2};$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \omega;$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{mA^2 \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \frac{kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \\ &+ \frac{\omega^2 mA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)) = \frac{kA^2}{2}. \end{aligned}$$

З останнього рівняння бачимо, що повна енергія пропорційна квадрату амплітуди коливань гармонічного осцилятора.

1.11.3 Математичний маятник

Розглянемо коливання фізичного і математичного маятників. *Математичний маятник* – це ідеалізована система у вигляді матеріальної точки, підвішеної на нерозтяжну і невагому нитку.

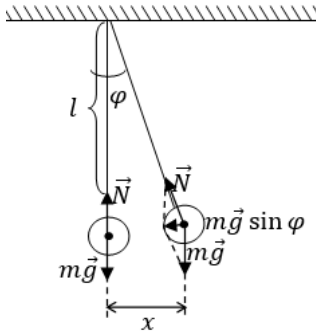


Рисунок 1.30 –
Математичний маятник

У разі відхилення кульки від положення рівноваги на деякий кут φ на неї діють сили: тяжіння $m\vec{g}$ і натягу \vec{N} . Рівнодійна сил $m\vec{g} \sin \varphi$ відіграє роль квазіупругої (повертальної) сили. У разі малих кутів, тобто таких, що $\sin \varphi \approx \varphi \approx \frac{x}{l}$, рівняння руху можна записати у вигляді

$$ma = -mg \sin \varphi,$$

де знак «-» вказує на протилежний напрямок зміщення і сили

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \frac{x}{l}, \quad (1.102)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (1.103)$$

Розв'язком цього рівняння є функція виду

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

або

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

У цьому можна впевнитися після підстановки x у рівняння (1.102).

Період коливання можна записати на підставі (1.103) з рівняння

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.104)$$

Рівняння (1.104) визначає період коливань математичного маятника.

Як бачимо із рівнянь (1.103) і (1.104), циклічна частота і період коливань математичного маятника не залежать від амплітуди A і маси m , а залежать лише від довжини маятника l і прискорення вільного падіння g , яке, зі свого боку, залежить від географічної широти.

1.11.4 Фізичний маятник

Фізичний маятник – це абсолютно тверде тіло, яке може здійснювати коливання навколо нерухомої осі, що не збігається з центром тяжіння.

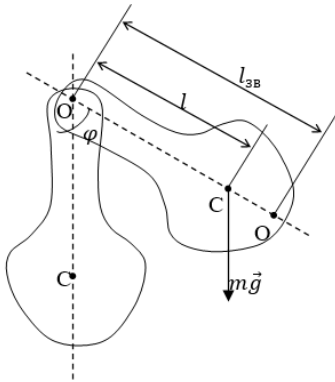


Рисунок 1.31 –
Фізичний маятник

Якщо відхилити фізичний маятник від положення рівноваги на деякий кут φ , то буде виникати поворотальний момент маятника в положення рівноваги.

Такий маятник виникає і в математичному маятнику.

Величина моменту буде дорівнювати $M = mgl \sin \varphi$, де $l = OC$ – довжина фізичного маятника.

Застосовуючи основний закон динаміки обертального руху, можемо записати

$$I\varepsilon = -mg \sin \varphi, I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi,$$

зважаючи, що $\sin \varphi \approx \varphi$, отримаємо

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi$$

або
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgl}{I} \varphi,$$

або
$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (1.105)$$

де
$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}.$$

Розв'язком рівняння (1.105) є функція

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Період коливань можна записати у вигляді

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (1.106)$$

Як бачимо з рівняння (1.106), частота й період коливань фізичного маятника залежать від його маси, довжини і моменту інерції.

Порівнюючи (1.103) та (1.106) між собою, бачимо, що періоди будуть збігатися, якщо $l_{зв} = \frac{I}{ml}$, де $l_{зв} = l_{\text{мат.м.}}$. Величина $l_{зв}$ називається *зведеною довжиною* фізичного

маятника. Зведена довжина фізичного маятника дорівнює такій довжині математичного маятника, за якої періоди коливань їх збігаються. Точку O , що лежить на прямій OC на відстані $l_{зв}$, називають *центром гойдання* фізичного маятника. Якщо підвісити маятник у центрі гойдання, то період коливань не зміниться. Ці точки називаються *взаємно оборотними*.

Необхідно зауважити, що характер всіх інших видів коливань і умови їхнього виникнення залежать від характеру власних коливань, характерних для даної системи.

1.12 Згасальний гармонічний осцилятор

1.12.1 Диференціальне рівняння згасальних коливань і аналіз його розв'язку, рівняння руху, коефіцієнт згасання, аперіодичний рух

Будь-який реальний рух зазнає зовнішньої дії, тобто відбувається дисипація енергії, і коливання стають згасальними. Процес дисипації можна характеризувати силою, що виникає у процесі сталого руху й напрямлена протилежно до нього. Цю силу, незалежно від її природи, називають *силою опору* або силою тертя.

У разі незначного відхилення від положення рівноваги

$$F_r = -\vec{r}v = -r \frac{dx}{dt},$$

де r – коефіцієнт опору.

Тоді рівняння згасальних коливань можна записати у вигляді

$$ma = -kx = r \frac{dx}{dt} \text{ або } m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (1.107)$$

Рівняння (1.107) є диференціальним рівнянням згасальних коливань, його можна записати

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\text{де } 2\beta = \frac{r}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Розв'язком буде функція виду

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $A = A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасальних коливань;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота згасальних коливань, де β – коефіцієнт згасання.

За умови $\beta \rightarrow 0$, $\omega = \omega_0$ коливання будуть незгасальними.

Період згасальних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Характерною особливістю згасальних коливань є те, що для будь яких двох амплітуд, розділених у часі одним періодом, їхнє відношення залишається сталим протягом всього процесу коливань.

Якщо в момент часу (t) амплітуда згасальних коливань $A_t = A_0 e^{-\beta t}$, а в момент часу ($t + T$) їхня амплітуда дорівнює $A_{t+T} = A_0 e^{-\beta(t+T)}$, то, поділивши першу рівність на другу, одержимо

$$\frac{A_t = A_0 e^{-\beta t}}{A_{t+\tau} = A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = D = \text{const},$$

де величина D називається *декрементом згасання*.

Швидкість згасання можна характеризувати й логарифмічним декрементом згасання. *Логарифмічний декремент згасання* (λ) – це логарифм відношення амплітуд, що відповідають моментам часу, які відрізняються один від одного на один період

$$\lambda = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A_0 \exp(-\beta t)}{A_0 \exp(-\beta(t+T))}\right) = \beta T.$$

Крім того, для характеристики згасання часто користуються часом, протягом якого амплітуда зменшується в e -разів. Цей час називають часом релаксації (зменшення, послаблення). Тоді маємо

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t}, A_2 = A_0 e^{-\beta(t+T)}.$$

Поділивши перше рівняння на друге, матимемо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}};$$

звідки
$$e^{\beta\tau} = e \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Отже, коефіцієнт згасання β обернено пропорційний часу релаксації.

За умови $\beta \rightarrow \infty$, а реально раніше, рух системи втрачає риси коливального руху.

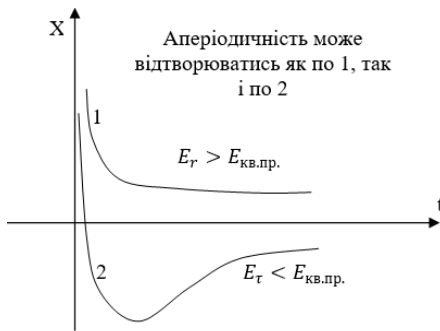


Рисунок 1.32 – Пояснення аперіодичності руху

За умови $\beta = \omega_0 \Rightarrow T \rightarrow \infty$. У цьому разі коефіцієнт β називається критичним. Це означає, що система, виведена із положення рівноваги, буде повільно повертатися до нього, використовуючи майже всю потенціальну енергію на подолання сил тертя. Такий рух систем називається

аперіодичним, якщо зобразити залежність $x(t)$ графічно, то матимемо таку залежність (рис. 1.32).

У техніці для збільшення згасання застосовують так звані демпферні пристрої (амортизатори в автомобілі, ресори).

1.12.2 Вимушені коливання

Будь-які реальні коливання за відсутності зовнішньої дії є згасальними, оскільки енергія коливальної системи витрачається на подолання сил тертя (опору). Щоб коливання були незгасальними, коливальну систему необхідно поповнювати енергією, тобто подіяти періодичною силою, рівною за величиною силі опору, яка має назву *вимушувальної сили* $F = F_0 \cos \omega t$.

Тоді рівняння таких коливань можна записати у вигляді

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t;$$

$$m\ddot{x} = -kx - rx + F_0 \cos \omega t.$$

Поділивши ліву й праву частини рівняння на m , одержимо

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (1.108)$$

Рівняння (1.108) є неоднорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку. Розв'язок такого рівняння можна подати у вигляді

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

де $x_1(t)$ є розв'язком однорідного рівняння (без правої частини), $x_2(t)$ – частинний розв'язок однорідного рівняння.

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$;

$$x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

де A – амплітуда вимушених коливань; φ – зсув фаз між зміщенням і вимушувальною силою.

Щоб упевнитися, що $x_1(t)$ і $x_2(t)$ є розв'язками, необхідно зробити підстановку в рівняння (1.108).

Зсув фаз між зміщенням і вимушувальною силою зумовлений тим, що, крім неї, на систему діє сила опору. Розв'язуючи ці рівняння, одержимо

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Тобто бачимо, що амплітуда вимушених коливань пропорційна амплітуді вимушувальної сили F_0 .

Якщо $\omega_0 \gg \omega$, то матимемо

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{K}.$$

Тобто в цьому разі амплітуда вимушених коливань приблизно дорівнює статичному зміщенню, яке може створити постійна сила F_0 .

Якщо частоту ω збільшувати, то $\omega_0^2 - \omega^2$ буде зменшуватися, а амплітуда збільшуватися. Якщо $\omega = \omega_0$, то амплітуда теоретично повинна зрости до нескінченості, оскільки в будь-якій системі є згасання, то амплітуда може зростати до деякого максимального значення. Її можна знайти з умови мінімуму під коренем у знаменнику. Така частота називатиметься резонансною. Знайдемо її

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2) \cdot \omega_{\text{рез}} + 8\beta^2 \omega_{\text{рез}} = 0.$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Тоді резонансна амплітуда буде дорівнювати

$$\begin{aligned} A_{\text{рез}} &= \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 - 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \\ &= \frac{F_0}{m2\beta} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2 - 2\beta^2}}, \end{aligned}$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Підставляючи значення різної частоти у вираз для амплітуди, одержимо рівняння результуючої амплітуди

$$A_{\text{рез}} = \frac{F}{2\beta m \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}}.$$

Отримаємо таку залежність, водночас $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, тобто зі збільшенням β максимум кривої знижується і зміщується вправо за частотою. Явище різкого збільшення амплітуди коливань за умови, що частота власних коливань збігається з частотою вимушеної сили, називається *резонансом*.

1.13 Пружні хвилі

1.13.1 Поширення хвиль. Хвильовий рух. Фронт хвилі. Поперечні й поздовжні хвилі

Колівання, що виникають у будь-якій точці середовища, не залишаються локалізованими в місцях їхнього збудження. Вони поширюються в середовищі зі скінченною швидкістю. Їхнє поширення зумовлене взаємодією між частинками середовища. Якщо взаємозв'язок між частинками середовища здійснюють сили пружності, які виникають унаслідок деформації середовища під час передавання коливань від однієї частинки до іншої, то такі хвилі називають *пружними*. До них належать звукові, сейсмічні та інші хвилі.

Процес поширення коливань у просторі називають *хвилею* або хвильовим процесом. Напрямок поширення хвилі називають променем. Залежно від напрямку коливання частинок середовища щодо напрямку поширення хвиль їх поділяють на поперечні і поздовжні. *Поперечними* називають хвилі, у яких частинки коливаються в

перпендикулярному до променя хвилі напрямі. Хвилі, у яких частинки коливаються в напрямі їхнього поширення, називають *повздовжніми*.

У поперечних хвилях відбувається зсув шарів середовища одного щодо іншого. Пружні сили, які протидіють відносному зміщенню шарів, виникають лише у твердих тілах. У газах і рідинах такі сили не виникають, а тому поперечні хвилі в них не поширюються.

У повздовжніх хвилях ділянки середовища зазнають стиснення і розтягу по чергово, водночас змінюється їхній об'єм. Але завжди виникають сили, які протидіють зміні об'єму, причому це характерно для твердих тіл, рідин і газів, а тому повздовжні хвилі можуть поширюватися в усіх трьох середовищах.

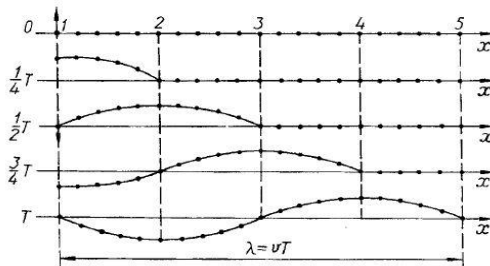


Рисунок 1.33 – Схема поширення поперечної хвилі у пружному середовищі

Номерами 1, 2, 3 тощо позначено частинки, які розміщені на відстанях чверть хвилі одна від одної. Нехай у момент часу $t = 0$ усі точки середовища перебувають у положенні рівноваги, але точка 1 набуває прискорення вгору. За чверть періоду точка 1 досягне крайнього верхнього положення. У разі відхилення частинки 1 від положення рівноваги зазнаватимуть відхилень від положення рівноваги і сусідні частинки. Унаслідок

інертності вони приходять у рух не раптово, а з деяким запізненням. За чверть періоду точка 1 досягне крайнього верхнього положення, і саме тоді почне зміщуватися від положення рівноваги частинка 2. За другу чверть періоду точка 1 буде проходити положення рівноваги, рухаючись униз. Точка 2 досягне амплітудного положення вгорі, а точка 3 тільки почне зміщуватися вгору від положення рівноваги. За третю чверть періоду точка 1 досягне нижнього амплітудного положення. Точка 2 повернеться до положення рівноваги. Точка 3 досягне верхнього амплітудного положення, а точка 4 почне зміщуватися від положення рівноваги вгору. За наступну чверть періоду, тобто через період, точка 1 повернеться до положення рівноваги, тобто в те положення, яке було в момент часу $t = 0$. Точка 2 зміститься в нижнє амплітудне положення, точка 3 саме тоді проходитиме положення рівноваги і рухатиметься вниз. Точка 4 досягне амплітудного положення вгорі, а точка 5 тільки почне рухатися вгору. Так і надалі передаватимуться коливання від точки до точки.

На рисунку 1.34 зображена схема поширення поздовжньої хвилі для п'яти моментів часу через кожную чверть періоду. Усі міркування, що стосуються поведінки частинок у поперечній хвилі, можна поширити на рух частинок у поздовжній хвилі за умови, що зміщення вгору або вниз замінюються на зміщення вправо або вліво.

Фізика вивчає різні за своєю природою хвилі: механічні, електромагнітні тощо. Але під час опису хвилі мають досить багато спільного, а тому можуть бути вивчені на прикладі механічних хвиль. Якщо взаємодія між частинками середовища здійснюється частинками пружності від передавання коливань від одних частинок до інших, то такі частинки називаються пружними (звукові, ультразвукові, сейсмічні).

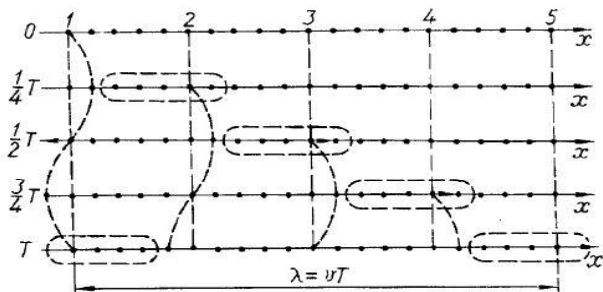


Рисунок 1.34 – Схема поширення поздовжньої хвилі

У хвиль на поверхні рідини (поверхневі хвилі) передавання коливань відбувається силами поверхневого натягу і силами тяжіння. Щоб хвилі поширювались, необхідно мати джерело хвиль. Оскільки коливання від частини до частини передаються не миттєво, здійснюючи водночас коливання з різними фазами, то поверхня, якою поширюється хвиля, має вершини і впадини.

Необхідно пам'ятати, що частинки середовища не переміщуються з поширенням хвилі, а здійснюють коливання навколо своїх положень рівноваги з деяким періодом T .

Швидкість передавання коливального руху від частинки до частинки зумовлює швидкість поширення хвилі та називається *фазовою швидкістю*.

Множина точок середовища, які мають однакову фазу у даний момент часу, називається *хвильовою поверхнею*.

Площина, дотична до хвильової поверхні в даний момент часу, називається *фронтом хвилі*. За фронтами хвиль виділяють: плоскі, сферичні, циліндричні.

Швидкість хвилі може бути визначена з рівняння

$$v = \frac{c}{T}, v = \lambda \nu,$$

де λ – довжина хвилі (відстань між двома точками, які здійснюють коливання в однаковій фазі); T – період коливань; ϑ – частота коливань.

Швидкість поширення хвилі можна виразити через характер середовища

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де ρ – густина середовища; E – модуль Юнга.

Для поперечних хвиль швидкість поширення визначається рівнянням

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

1.13.2 Рівняння плоскої хвилі. Хвильове рівняння. Енергія хвилі, потік енергії. Вектор Умова

Установимо залежність між зміщенням різних середовищ для будь-якого моменту часу. Будемо вважати, що джерело хвиль здійснює коливання за законом

$$\xi = A \cos \omega t.$$

Точка, яка розташована на відстані від джерела, буде здійснювати коливання за тим самим законом, але пізніше на час

$$\tau = \frac{x}{v},$$

де v – швидкість хвилі.

А тому зміщення точки в момент часу t буде таким, як і зміщення джерела хвиль $t - \tau = t - \frac{x}{v}$.

Можемо записати, що

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = A \cos w(t - \tau) = A \cos(t - \frac{x}{v}) \\ \xi = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{T} \frac{x}{v}\right) = A \cos\left(wt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\ \xi = A \cos(wt - kx) \text{ де, } k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{array} \right. \quad (1.109)$$

Якщо зобразити графічно ξ від x , то маємо

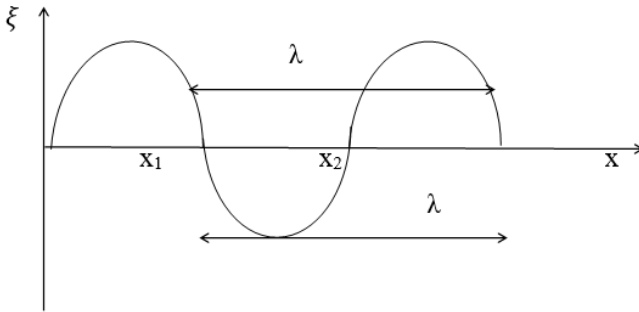


Рисунок 1.35 – Виведення хвильового рівняння

Ксі (ξ) – це відхилення джерела коливань від положення рівноваги в будь-який момент часу; x – координата хвилі в цей момент часу; A – амплітуда коливань; k – хвильове число.

Продиференціюємо рівняння (1.109), спочатку двічі за часом, а потім двічі за координатою. Матимемо

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -Aw^2 \cos w\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{-Aw^2}{v^2} \cos w\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Поділимо перше рівняння на друге, одержимо

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Отримане диференціальне рівняння називається хвильовим. Воно описує поширення незгасального хвильового процесу в середовищі.

Під час проходження хвилі в середовищі вона переносить певну енергію, оскільки у хвильовому процесі відбувається передавання імпульсу від однієї точки середовища до іншої.

Виділивши у хвилі нескінченно малий об'єм dV , енергію цього об'єму можна записати у вигляді

$$dE = \rho dVA^2\omega^2\cos(\omega t - kx).$$

Звідси бачимо, що енергія елементарного об'єму хвилі пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди, квадрату частоти. Для об'ємної густини матимемо

$$W = \frac{dE}{dV} = \rho dVA^2\omega^2\cos(\omega t - kx).$$

Через одиничний поперечний переріз за одиницю часу буде проходити та енергія, яка міститься в об'ємі паралелепіпеда з довжиною, що чисельно дорівнює швидкості хвилі.

$$I = Wv = \frac{1}{2} (\rho V)A^2\omega^2.$$

Величина I називається *інтенсивністю* хвилі, або *густиною потоку енергії*. Оскільки швидкість величина векторна, то очевидно, що й інтенсивність теж можна

вважати векторною величиною. Тоді останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\vec{I} = \vec{W} \cdot \vec{v}.$$

Ця величина називається *вектором Умова*. Вектор Умова завжди спрямований у напрямі поширення хвилі.

1.13.3 Принцип Гюйгенса. Когерентні хвилі. Інтерференція хвиль. Утворення стоячої хвилі

Під час поширення хвилі в певному середовищі може спостерігатися її відхилення від прямолінійного поширення, а також посилення чи послаблення в певних точках середовища. Перше явище називається *дифракцією*, друге – *інтерференцією*. Ці явища характерні для всіх видів хвиль.

Якщо хвилі поширюються від різних джерел, то для них характерний принцип незалежності, який є проявом принципу суперпозиції. Згідно з принципом Гюйгенса точка, до якої дійшла хвиля, є вторинним джерелом хвиль.

Явище інтерференції може спостерігатися для певного виду хвиль – когерентних хвиль.

Когерентні хвилі – це хвилі, які мають однакову частоту й однакову фазу або стали різницю фаз. Поняття когерентних хвиль є абстракцією. Отримання когерентних хвиль є завданням досить складним. Наприклад, в оптиці їх отримують поділом світлового променя на два.

Нехай маємо два когерентні джерела, які здійснюють коливання за законом

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kr_1),$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t - kr_2),$$

$$\xi_1 + \xi_2 = 2A \cos k \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \cos \omega t - \frac{k_1 + k_2}{2},$$

$r_2 - r_1$ – різниця ходу променів. Результат додавання буде залежати від величини

$$A_p = 2A \cos k \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right).$$

Залежно від цієї амплітуди матимемо в точці або максимум або мінімум. Максимум, матимемо у тих точках, де $\left| \cos k \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \right| = 1$,

коли
$$\left| k \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \right| = n\pi = k \frac{\Delta}{2},$$

$\Delta = r_2 - r_1$ – різниця ходу. Тоді

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta}{2} = 1,$$

звідки
$$\Delta = n\lambda = 2n \frac{\lambda}{2}.$$

Отже, максимум матимемо в тих точках, де різниця ходу хвиль дорівнює парному числу півхвиль.

Коли
$$\left| \cos k \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \right| = 0,$$

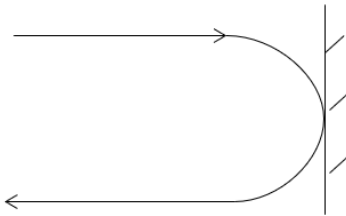
у цих точках матимемо мінімум. Після розв'язку одержимо

$$\Delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Одним із видів когерентних хвиль є так звані *стоячі хвилі*. Стоячі хвилі в чистому вигляді можна отримати за

допомогою накладання біжучої й відбитої хвилі. Механізм утворення стоячої хвилі залежить від властивостей середовища: відбивання чи пропускання хвиль. Ця властивість характеризується величиною ρv , де ρ – густина середовища; v – швидкість поширення хвилі в ньому.

Якщо $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, то хвилі з першого середовища проходять друге середовище. Відбивання хвилі відсутнє.



Якщо $\rho_2 v_2 > \rho_1 v_1$, то відбувається відбивання зі зміною фази на протилежну, тобто на π , під час цього відзначають, що відбувається втрата півхвилі.

Рисунок 1.36 –
Відбивання хвилі

Якщо ж навпаки $\rho_2 v_2 < \rho_1 v_1$, то відбувається відбивання без зміни фази, тобто без втрати півхвилі.

Нехай маємо падаючу й відбиту хвилі, рівняння яких відповідно

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx).$$

Додаючи, маємо

$$\xi_1 + \xi_2 = 2A \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Це рівняння описує нерухомі у просторі синусоїдальні коливання частинок середовища з різною, але сталою для кожної точки амплітудою.

У точках, де $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm k\pi$, амплітуда коливань досягає найбільшого значення $2A$, вони називаються *пучностями* стоячої хвилі. Координати пучностей: $x_{\text{п}} = \pm k\lambda/2$, де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

У точках, де $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, амплітуда коливань дорівнює нулю. Ці точки називають *вузлами* стоячої хвилі. Координати вузлів

$$x_{\text{в}} = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Відстань між сусідніми вузлами і пучностями $\frac{\lambda}{2}$, де λ — довжина біжучої хвилі.

1.14 Елементи акустики

1.14.1 Природа звуку. Швидкість звуку

Пружні хвилі, що поширюються в суцільних середовищах, називають *звуковими*. До звукових хвиль належать хвилі, частоти яких лежать у межах сприймання органами слуху. Людина сприймає звуки тоді, коли на її органи слуху діють хвилі з частотами від 16 Гц до 20 000 Гц. Пружні хвилі, частота яких менша від 16 Гц, називають інфразвуковими, а хвилі, частота яких лежить в інтервалі від $2 \cdot 10^4$ до $1 \cdot 10^9$ Гц, — ультразвуковими.

Розділ фізики, у якому вивчають звукові хвилі (збудження, поширення, сприймання та взаємодія їх із речовиною середовища), називають *акустикою*. Викладені в попередніх розділах загальні закономірності коливальних і хвильових видів механічного руху можна застосувати

й до вивчення акустичних явищ. Низка спеціальних питань, пов'язаних з особливостями сприймання звуку, його технічним застосуванням, зумовила виділення акустики як окремого розділу фізики.

Акустика поділяється на загальну й прикладну. У загальній акустиці розглядають теоретичні та експериментальні аспекти утворення й поширення звукових, ультразвукових та інфразвукових хвиль, а також взаємодію їх із речовиною. Здебільшого цей розгляд проводять у припущенні, що амплітуди коливань незначні. Це дає можливість користуватися лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними. Хвилі великих амплітуд, які виникають під час вибухів, горіння тощо, описують нелінійними диференціальними рівняннями. Це призвело до розвитку *нелінійної акустики*. Прикладна акустика поділяється на фізіологічну, архітектурну, музичну, гідроакустичну тощо.

Вимірювання швидкості звуку у твердих тілах, рідинах і газах вказують на те, що швидкість не залежить від частоти коливань або довжини звукової хвилі, тобто для звукових хвиль не характерна дисперсія. Явище дисперсії спостерігають під час поширення ультразвукових хвиль у багатоатомних газах і органічних рідинах. Обмежимося вивченням поширення звукових хвиль у середовищах, у яких дисперсії немає.

У твердих тілах можуть поширюватися поздовжні та поперечні хвилі, швидкість поширення яких знаходять відповідно за формулами

$$v_{\text{поз}} = \sqrt{E/\rho}; v_{\text{поп}} = \sqrt{G/\rho}, \quad (1.110)$$

де E – модуль Юнга; G – модуль зсуву.

Варто зазначити, що швидкість поширення поздовжніх хвиль у твердих тілах майже вдвоє більша від швидкості поширення поперечних хвиль. Неоднаковість швидкостей поздовжніх і поперечних хвиль у твердих тілах покладена в основу роботи сейсмографів, за допомогою яких визначають епіцентри землетрусів, вивержень тощо.

У рідинах і газах можуть поширюватися тільки поздовжні хвилі. Швидкість звуку в рідинах визначають за формулами

$$v = \sqrt{k/\rho} = \sqrt{1/(\beta\rho)}, \quad (1.111)$$

де k – модуль об'ємного стиску; β – адіабатний коефіцієнт об'ємного стиску. Залежність швидкості звуку в рідинах від температури визначається переважно залежністю коефіцієнта об'ємного стиску. Так, для води коефіцієнт об'ємного стиску зменшується з підвищенням температури, і, відповідно, швидкість звуку збільшується. Для решти рідин коефіцієнт об'ємного стиску збільшується з підвищенням температури і, відповідно, швидкість звуку зменшується. Швидкість звуку в рідинах залежить від наявності в них домішок. Так, швидкість звуку у прісній воді за умови 17°C – 1 430 м/с, а у морській воді – 1 510 м/с.

1.14.2 Поширення звукових хвиль. Інтенсивність звуку

Область середовища, у якому поширюються звукові хвилі, називають *звуковим полем*. Під час поширення хвиль ділянки середовища зазнають періодичних деформацій. Поширення поздовжніх хвиль супроводжується відповідними змінами тиску на величину Δp порівняно з його середнім значенням у деформованому середовищі.

Під час поширення звукових хвиль відбувається перенесення енергії в напрямі поширення хвилі. Перенесення енергії хвилями характеризують густиною потоку енергії, який в акустиці називають інтенсивністю, або силою звуку. *Інтенсивність*, або сила звуку – це енергія, що переноситься за одиницю часу через одиницю площі поверхні в перпендикулярному до неї напрямі.

Існує взаємозв'язок між звуковим тиском Δp та інтенсивністю звуку I й швидкістю його поширення, який визначається виразом

$$I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho v}. \quad (1.112)$$

де Δp_0 – амплітуда акустичного тиску; ρv – акустичний опір середовища.

Отже, інтенсивність звуку прямо пропорційна квадрату амплітуди акустичного тиску й обернено пропорційна акустичному опору середовища.

Щоб визначити інтенсивність звуку, користуються диском Релея. Цей диск зі слюди має діаметр 2–5 мм і товщину 0,02–0,03 мм. Його підвішують на тонкій кварцовій нитці під кутом 45° до напрямі поширення звукових хвиль. У звуковому полі на диск діють сили, які намагаються повернути його перпендикулярно до напрямі швидкості руху частинок у хвилі, що швидко змінюються як за напрямом, так і за величиною. Унаслідок симетрії картини обтікання диска зміна напрямі швидкості частинок не призводить до зміни напрямі обертального моменту, що діє на диск. Цей момент пропорційний квадрату амплітуди швидкості частинок у хвилі. За величиною кута обертання диска знаходять обертальний момент. За його величиною визначають амплітуду

швидкості частинок у хвилі, а потім амплітуду звукового тиску. На основі добутих даних за формулою (1.112) обчислюють інтенсивність звуку.

У процесі поширення звукових хвиль у будь-якому реальному середовищі відбувається їхнє загасання. Амплітуда коливань частинок середовища монотонно зменшується зі збільшенням відстані від джерела звуку. Однією з основних причин, що зумовлює загасання хвиль, є дія сил внутрішнього тертя на частинки середовища за умови їхніх відносних рухів. На подолання цих сил безперервно витрачається механічна енергія коливального руху, що переноситься хвилею. Ця енергія перетворюється на енергію хаотичного теплового руху молекул і атомів середовища. Оскільки енергія хвилі пропорційна квадрату амплітуди коливань частинок середовища, то під час поширення хвиль від джерела звуку разом із зменшенням запасу енергії коливального руху зменшується й амплітуда коливань.

1.14.3 Джерела звуку

Будь-яке тіло, що міститься у пружному середовищі і коливається із звуковою частотою, є джерелом звуку. У струнних інструментах джерелом звуку є струна, з'єднана з корпусом інструмента; у свистках, духових трубах, у голосовому органі людини джерелом звуку є певний об'єм повітря. У гучномовцях телефона звук випромінює поверхня пружної пластини (мембрана), що коливається.

Струнами називають тверді тіла, поперечними розмірами яких можна знехтувати порівняно з їхніми довжинами. Якщо елементу струни, закріпленої з обох кінців, надати імпульс, перпендикулярний до її напрямку, то він поширюватиметься вздовж струни. Імпульс зміщений,

що виникнуть у деякій точці струни, дійде до її кінця, відіб'ється й пошириться до другого кінця струни, де знову відіб'ється.

Унаслідок накладання падаючої та відбитої хвиль виникає стояча хвиля, вузлами якої будуть кінці струни. З цього випливає, що вздовж натягнутої струни, кінці якої закріплено нерухомо, можуть утворюватися стоячі хвилі тільки таких довжин, щоб вздовж довжини струни l вкладалося ціле число півхвиль, тобто коли

$$l = n \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.113)$$

Довжинам хвиль, що визначаються умовою (1.114), відповідають частоти

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2l}, \quad (1.115)$$

де v – фазова швидкість поширення хвилі у струні, яка залежить від сили натягу струни та її лінійної густини.

Коливання з частотою $\nu = v/(2l)$ називають основним тоном струни. Усі інші частоти можливих коливань струни, кратні частоті основного тону, називають обертонами.

Оскільки струни мають малі розміри, то вони не можуть генерувати в навколишньому повітрі потужні звукові хвилі. Тому в музичних інструментах струни натягують на деки (плоскі дерев'яні пластинки) або дерев'яні ящики, здатні резонувати на частоті струни. Випромінювання звуку під час цього відбувається з великої поверхні резонатора.

У повітряному стовпі, що міститься у трубі довжиною l , кінці якої відкриті й не перешкоджають руху частинок повітря, також утворюються стоячі хвилі. На відміну від попереднього випадку, на кінцях труби містяться пучності

стоячих хвиль. Частоти коливань визначаються також умовою (1.115).

У повітряному стовпі, що міститься у трубі довжиною l , один кінець якої відкритий, а другий закритий, можуть також утворитися стоячі хвилі. На закритому кінці труби будуть вузли, а на відкритому кінці – пучності. Із цього випливає, що стоячі хвилі утворюються, коли в довжині труби вкладається непарне число чвертей довжин хвиль, тобто коли

$$l = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.116)$$

Цим довжинам хвиль відповідають частоти коливань

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = (2n - 1) \frac{v}{4l}. \quad (1.117)$$

На рисунку 1.37 зображено стоячі хвилі для випадків: а) натягнутої струни; б) повітряного стовпа, відкритого з обох кінців; в) повітряного стовпа, закритого з одного кінця. В усіх випадках $n = 1, 2, 3$.

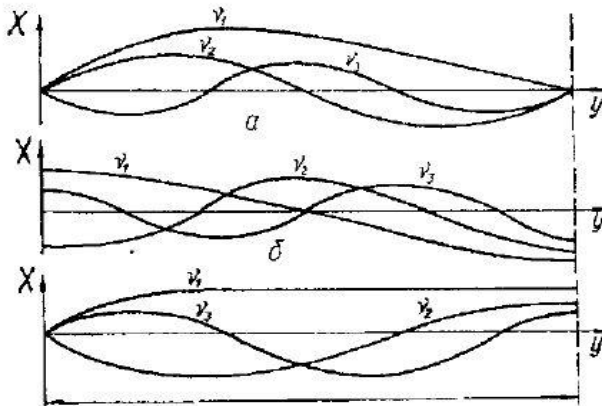


Рисунок 1.37 – Стоячі хвилі

Мембрана – гнучка тонка плівка, яка внаслідок розтягання зовнішніми силами має пружність. Від мембран необхідно відрізнити пластинку, пружні властивості якої залежать від її товщини та речовини, з якої вона виготовлена. Прикладами мембран є шкіра, натягнута на барабан, тонка металева фольга, що відіграє роль рухомої обклашки конденсаторного мікрофона.

Після припинення дії джерела звуку у приміщенні розсіяний звук не зникає раптово. Це пояснюється відбиванням звукових хвиль від стін приміщення. Час, протягом якого після припинення дії джерела звук повністю зникає, називають *часом реверберації*. Умовно вважають, що час реверберації дорівнює проміжку часу, протягом якого інтенсивність звуку зменшиться в мільйон разів.

Час реверберації – це важлива характеристика акустичних властивостей концертних залів, кінозалів, аудиторій та ін. У разі значного часу реверберації мова й музика звучать досить голосно, але невиразно. У разі малого часу реверберації мова та музика звучать слабо й глухо. Тому в кожному конкретному випадку добиваються оптимальних акустичних характеристик приміщень.

Механізм створення звуків людиною в загальних рисах такий. Голосові зв'язки, розташовані в нижній частині горла, здійснюють коливання. Власні частоти порожнини рота регулюються розміщенням язика губ і зубів. Порожнина резонує й забезпечує необхідну інтенсивність звуку.

1.14.4 Ефект Доплера

Швидкість поширення звукових хвиль у середовищах не залежить від руху джерела й приймача звуку. Дослід доводить, що коли джерело та приймач звуку нерухомі щодо середовища, у якому поширюються звукові хвилі, то частота звуку, яку генерує джерело, дорівнює частоті, яку

реєструє приймач. Зовсім інша картина, коли джерело звуку і приймач перебувають у русі щодо середовища, у якому поширюється звук. Водночас частота звуку, яку реєструє приймач, відрізняється від частоти звуку, що генерує джерело. Зміна частоти звуку, що сприймається під час відносного руху джерела та приймача звуку, називається *ефектом*, або *явищем Доплера*. Розглянемо спочатку випадок, коли джерело звуку нерухоме щодо середовища, у якому поширюються звукові хвилі. Якщо частота коливань звуку ν_0 , швидкість його поширення в середовищі v , то довжина звукової хвилі $\lambda = v/\nu_0$. Під час руху приймача зі швидкістю v' до джерела вздовж лінії, що їх сполучає, швидкість поширення звуку щодо приймача дорівнюватиме $v + v'$. Оскільки довжина звукової хвилі одночасно не змінюється, то за одиницю часу до рухомого приймача прийде більша кількість хвиль, ніж до нерухомого. Частота коливань, яку реєструє рухомий приймач, буде дорівнювати

$$\nu' = \frac{v+v'}{\lambda} = \nu_0 \frac{v+v'}{v} = \nu_0 \left(1 + \frac{v'}{v}\right). \quad (1.118)$$

Звідси випливає, що приймач, який рухається до джерела звуку, реєструє більшу частоту, ніж частота коливань джерела звуку. Якщо приймач звуку віддаляється від нерухомого джерела звуку зі швидкістю v' , то швидкість звукових хвиль щодо приймача буде $v - v'$. Приймач звуку реєструватиме водночас меншу частоту, ніж та, яку генерує джерело звуку, а саме:

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v'}{v}\right). \quad (1.119)$$

Розглянемо випадок, коли джерело звуку рухається вздовж лінії, що сполучає джерело та приймач звуку, зі швидкістю u щодо середовища, а приймач звуку нерухомий. Коли джерело звуку наближається до приймача, то за час, що дорівнює періоду коливань джерела звуку, хвиля пошириться на відстань vT до приймача звуку. За цей самий час джерело звуку в тому самому напрямі переміститься на відстань uT . Довжина хвилі під час цього

$$\lambda' = vT - uT = (v - u)T.$$

Оскільки швидкість звуку щодо приймача залишається v , то приймач реєструє частоту

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v-u)T} = \nu_0 = \frac{1}{1-\frac{u}{v}}, \quad (1.120)$$

тобто реєструє більшу частоту, ніж частота звуку джерела.

У разі віддалення джерела звуку від приймача довжина хвилі

$$\lambda' = (v + u)T,$$

і приймач реєструє частоту меншу, ніж частота звуку джерела, а саме:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu_0 \frac{1}{1+\frac{u}{v}}. \quad (1.121)$$

Якщо джерело і приймач звуку рухатимуться одночасно, то довжина хвилі та швидкість поширення їх щодо приймача звуку змінюватимуться. Водночас частота, яку реєструє приймач,

$$v' = v_0 \frac{1 \pm \frac{v'}{v}}{1 \mp \frac{u}{v}} = v_0 \frac{v \pm v'}{v \mp u}. \quad (1.122)$$

Знак «плюс» у чисельнику виразу відповідає випадку, коли приймач наближається до джерела звуку; знак «мінус» – коли віддаляється. У знаменнику знаки стоять навпаки, тобто знак «мінус» вказує на наближення джерела до приймача звуку, а знак «плюс» – на віддалення його від джерела звуку.

Якщо приймач або джерело звуку рухається не вздовж прямої, що їх сполучає, то ефект Доплера визначається проєкціями швидкостей руху на напрям цієї прямої.

Зауважимо, що всі швидкості, які входять до формули (1.122), визначаються щодо того середовища, у якому поширюється звук. Ефект Доплера спостерігається і для електромагнітних хвиль.

1.14.5 Ультразвук та його застосування

Як уже зазначалося, пружні хвилі, частоти яких лежать в інтервалі від $2 \cdot 10^4$ Гц до 10^9 Гц, називають ультразвуком. Хвилі, частоти яких належать інтервалу від 10^9 до 10^{13} Гц, називають *гіперзвуком*. Увесь діапазон частот ультразвукових хвиль умовно поділяють на три піддіапазони: ультразвукові хвилі низьких ($2 \cdot 10^4$ – 10^5 Гц), середніх (10^5 – 10^7 Гц) і високих частот (10^7 – 10^9 Гц). Кожен із цих піддіапазонів характеризується своїми специфічними особливостями генерування, приймання, поширення та застосування.

За фізичною природою ультразвукові хвилі такі, як і звукові будь-якої довжини. Проте внаслідок більш високих частот ультразвук має низку специфічних особливостей під час його поширення. У зв'язку з тим, що довжини ультразвукових хвиль досить малі, характер їхнього

поширення визначається, насамперед, молекулярними властивостями речовини. Характерною особливістю поширення ультразвуку в багатоатомних газах та в рідинах є існування інтервалів довжин хвиль, у межах яких виявляється залежність фазової швидкості поширення хвиль від їхньої частоти, тобто спостерігають дисперсію звуку. У цих інтервалах довжин хвиль також відбувається значне поглинання ультразвуку. Тому під час поширення його в повітрі відбувається більш значне його згасання, ніж звукових хвиль. У рідинах і твердих тілах (особливо монокристалах) згасання ультразвуку значно менше. Тому область застосування ультразвуку середніх і високих частот належить переважно до рідин і твердих тіл, а в повітрі та в газах застосовують тільки ультразвук низьких частот.

Ще одна особливість ультразвуку – це можливість одержання великої інтенсивності навіть за умови порівняно невеликих амплітуд коливань, оскільки за певної амплітуди густина потоку енергії пропорційна квадрату частоти. Поширення ультразвукових хвиль великої інтенсивності супроводжується нелінійними ефектами. Так, під час поширення плоских ультразвукових хвиль у рідинах і твердих тілах, для яких коефіцієнт поглинання незначний, синусоїдальна хвиля перетворюється на ударну хвилю пілкоподібної форми, поглинання якої значно більше, тобто відбувається нелінійне поглинання.

Поширення ультразвукових хвиль у газах і рідинах супроводжується рухом середовища в напрямі поширення хвилі. Такий рух називають *акустичною течією*, її швидкість залежить від в'язкості середовища, інтенсивності ультразвуку та його частоти.

До важливих нелінійних явищ, що виникають під час поширення інтенсивних ультразвукових хвиль у рідинах, належить *акустична кавітація*. Це явище полягає в тому,

що під час випромінювання в рідину інтенсивних звукових хвиль з амплітудою звукового тиску, яка перевищує деяку величину, протягом півперіодів розріджень виникають кавітаційні бульбашки. Під час їхнього «захлопування» протягом півперіодів стискання створюються короткочасні імпульси тиску, які здатні руйнувати навіть досить міцні матеріали. Інтенсивність, що відповідає пороговому значенню амплітуди звукового тиску, за якої виникає явище кавітації, залежить від природи рідини, частоти звуку, температури та інших чинників.

Для одержання ультразвукових хвиль застосовують різні пристрої, які можна поділити на дві групи: механічні й електромеханічні. Механічні джерела ультразвуку – це повітряні та рідинні свистки й сирени. Основними випромінювачами ультразвуку є електромеханічні джерела, здатні перетворювати електричні коливання на механічні. До них належать електродинамічні, п'єзоелектричні та магнітострикційні випромінювачі.

Ультразвукові методи для отримання інформації ґрунтуються на відбиванні й розсіюванні ультразвукових хвиль на межах між різними середовищами. Ці методи дають можливість здійснювати ультразвукову локацію.

У зв'язку з тим, що ультразвукові хвилі поглинаються у воді майже в 1 000 разів слабше, ніж у повітрі, напрямлені пучки ультразвукових хвиль широко застосовують у гідроакустиці для сигналізації гідролокації під водою. Застосування ультразвукових хвиль у гідроакустиці має важливе значення, оскільки це єдиний вид хвиль, який поширюється на великі відстані у природних водних середовищах. За допомогою імпульсних ультразвукових ехолотів визначають глибину моря чи океану, виявляють косяки риб. За допомогою гідролокаторів виявляють підводні човни, айсберги та ін.

РОЗДІЛ 2 МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

2.1 Основи молекулярно-кінетичної торії (МКТ)

2.1.1 Основні поняття молекулярної фізики

В основі МКТ лежать твердження про те, що всі речовини складаються з атомів і молекул, які перебувають у безперервному хаотичному русі і можуть взаємодіяти між собою. Ця взаємодія може відбуватися як у вигляді притягання, так і у вигляді відштовхування. Залежність потенціальної енергії взаємодії молекул від відстані можна зобразити кривою, наведеною на (рис. 2.1).

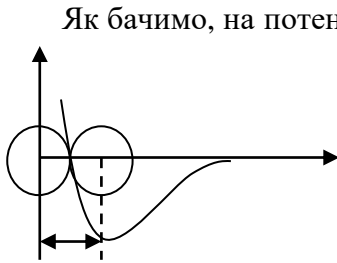


Рисунок 2.1 –
Залежність
потенціальної енергії
взаємодії молекул
від відстані

Як бачимо, на потенціальній кривій є точка мінімуму – це означає, що в цій точці сили притягання і відштовхування урівноважуються. Відстань d , за якої ці сили врівноважуються, беруть за діаметр молекул. Як демонструє залежність, сили притягання переважають сили відштовхування, а відстань між молекулами r стає більшою за діаметр молекул. Коли $r > (3..4)d$, силами взаємодії можна знехтувати, на малих відстанях будуть переважати сили відштовхування. Молекули складаються з атомів. *Атом* – це найменша частинка речовини, яка зберігає властивості даного хімічного елемента. Кількість атомів у природі відносно невелика, на сьогодні відомо не набагато більше за 100 видів атомів, і лише 92 з них трапляються в природі, а інші – одержані штучними методами. Атом, зі свого

боку, складається з більш дрібних частинок, однак для пояснення з погляду будови молекулярної фізики внутрішню будову атома не розглядають.

Молекула – це найменша частинка, що зберігає властивості речовини. У природі трапляється безліч різних речовин, кожна з яких складається з однакових молекул. Деякі речовини мають атомарну будову, наприклад: метали, атомарні гази тощо.

У цих випадках поняття атомів і молекул збігаються. Оскільки розміри і маса молекул досить малі, то зручніше їхню масу виражати не в кілограмах, а в атомних одиницях маси (m_0). Атомна одиниця маси – це величина, що дорівнює $1/12$ маси Вуглецю C^{12} , чисельне значення $m_0 = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, у системі СІ кількість речовини вимірюють одиницею, яка має назву моль.

Моль – це кількість речовини, яка містить, скільки структурних елементів, скільки атомів міститься в 0,012 кг Вуглецю C^{12} . Число атомів в 0,012 кг Вуглецю C^{12} стале, а отже, і число структурних елементів в одному молі буде однаковим, це число називається числом Авогадро, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. Маса одного моля величини називається молярною, а її розмірність – кг/моль. Масу одного моля можна знайти, помноживши масу молекули даної речовини на число Авогадро ($\mu = m \cdot N_A$), або, поділивши масу всієї речовини на число молів ($\mu = m/\nu$). З означення молярної маси і числа Авогадро випливає, що число молів речовини можна знайти, поділивши масу даної речовини на масу одного моля,

$$(\nu = m/\mu) \tag{2.1}$$

або поділивши

$$(v = N/N_A). \quad (2.2)$$

Для розв'язування багатьох задач користуються поняттям концентрації тиску, об'єму і температури. Концентрація – це фізична величина, яка дорівнює кількості молекул в одиниці об'єму

$$n = \frac{N}{V} \quad (2.3)$$

Густина – це фізична величина, що чисельно дорівнює масі речовини в одиниці об'єму

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.4)$$

Очевидно, між концентрацією і густиною повинно існувати певне співвідношення

$$\rho = m \times n. \quad (2.5)$$

Тиск – це фізична величина, що чисельно дорівнює силі, яка діє на одиничну площу поверхні перпендикулярно силі $p = \frac{F}{S}$. Якщо сила розподілена по поверхні нерівномірно, то тоді тиск можна визначити з такого співвідношення

$$p = \frac{dF}{dS}, \quad (2.6)$$

де dF – сила, яка діє перпендикулярно на елемент площі dS . Одним із параметрів термодинамічної системи є температура. Поняття температури не може бути введене як прості попередні означення.

2.1.2 Температура

З поняттям температури ми стикаємося на основі повсякденних спостережень, іноді температуру визначають як міру нагрітості тіл, проте таке означення складно піддається фізичному визначенню. Ми якісно можемо порівняти температуру тіл, але для кількісного порівняння ми повинні мати методи вимірювання температури. Щоб мати методи і прилади вимірювання температури, очевидно, необхідно зв'язати температуру з іншими величинами, вимірювання яких доступне за допомогою приладів. Температура є фізичною величиною, яка характеризує напрям передавання енергії під час контакту тіл, на відміну від інших фізичних величин, не може бути вираженою через основні величини (маса, довжина, час тощо). Тому температура повинна бути однією із основних фізичних величин, на базі яких будуть вводитися похідні величини.

Якісне визначення температури як характеристики напряму передавання енергії під час контакту тіл ґрунтується на таких дослідних фактах:

1. Якщо ізольовану систему надати самій собі, то з часом вона перейде в рівноважний стан, за якого будуть відсутні всякі макроскопічні процеси перенесення (маси, енергії, імпульсу тощо), тобто дослід дозволяє сформулювати постулат про існування рівноваги системи, у цьому разі – теплової рівноваги.

2. Якщо дві рівноважні системи привести в контакт, під час якого вони можуть обмінюватися енергією без здійснення роботи, то можуть спостерігатися такі явища:

1) рівновага систем не порушиться, у цьому разі відзначають, що вони мають однакову температуру;

2) одна із систем нагрівається, інша охолоджується доти, поки не настане рівновага об'єднаної системи, система, яка охолоджується, вважається такою, що має

вищу температуру, тобто температура характеризує напрямок передавання енергії від більш нагрітого тіла системи до менш нагрітого;

3) нехай маємо 3 рівноважні системи А, Б, В, якщо рівноважні системи А і Б перебувають у стані рівноваги з В, то вони перебувають у стані рівноваги і між собою. На підставі цього можна порівнювати температури різних систем. Для цього достатньо одне із тіл (термометричне, термометр) привести з тілом, температуру якого вимірюють. Якщо термометр проградуирований, то він покаже температуру даного тіла.

Ці дослідні факти свідчать про те, що температура характеризує стан термодинамічної рівноваги і вказує напрям передавання енергії без виконання роботи і є параметром або функцією стану. Температура залежить від швидкості руху молекул, і ця залежність дається рівнянням $\hat{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$, де k – стала Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$. Оскільки температура є мірою теплового руху, то між температурою й енергією повинен існувати певний зв'язок. Отже, можна відзначити, що за умови термодинамічної рівноваги всі внутрішні параметри є функціями зовнішніх параметрів та енергії.

Питання вибору термодинамічного тіла є досить складним. До такого тіла існують певні вимоги: 1) воно повинно давати однозначні покази температури; 2) ці покази не повинні залежати від інших чинників; 3) покази повинні точно відтворюватися; 4) вимірювання мають бути простими й зручними.

У природі не існує тіла, властивості якого повністю відповідали б перерахованим вимогам. Найбільшою мірою ці вимоги задовольняють об'ємне розширення тіл, електрорушійна сила термопар, електричний опір металів

або напівпровідників, теплове вимірювання тіл. Усі ці властивості використовують під час виготовлення термометрів, причому кожна властивість визначає діапазон вимірюваних температур.

Градуювання шкали, як і сам вибір термометричного тіла, є довільним, це пояснює той факт, що історично виникло багато температурних шкал. У 1748 році шведський вчений Андерс Цельсій запропонував шкалу, яку до сьогодні широко використовують в усьому світі. За початок шкали Цельсія береться температура плавлення льоду $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ за нормального атмосферного тиску ($1,01 \cdot 10^5$ Па), другою точкою взята температура кипіння води $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, за того ж самого тиску. Цей інтервал розбивають на 100 рівних частин. Поширення наміченого поділу за межі реперних точок дозволяє отримати всю температурну шкалу за допомогою екстраполяції, тобто розширення.

У США і Англії досить широкого застосування набула шкала Фаренгейта, у якій реперними точками були ті ж самі точки, що і в шкалі Цельсія, але температура плавлення льоду була взята за $32\text{ }^{\circ}\text{F}$, а кипіння на $212\text{ }^{\circ}\text{F}$, цей інтервал було поділено на 180 рівних частинок.

Ретельний аналіз побудови температурних шкал виконав англійський вчений Кельвін (Томсон) у 1848 р. Ця шкала отримала назву шкали Кельвіна і була використана на основі 2-го закону термодинаміки причому ним було доведено, що така шкала не залежить від вибору термометричного тіла і від вибору властивостей тіла, за яким визначають температуру. Для побудови цієї шкали були використані властивості ідеального газу, які описували закони Бойля, Маріотта, Гей-Люсака і Шарля.

2.2 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

2.2.1 Статистичний характер тиску та температури

Стан термодинамічної системи характеризується термодинамічними параметрами, такими параметрами є тиск, об'єм, температура. Рівняння яке пов'язує ці параметри, можна записати $f(p, V, T) = 0$, називається рівнянням стану. Очевидно, що стан кожної молекули теж буде характеризуватися набором деяких фізичних величин (швидкість, імпульс, кінетична енергія). Унаслідок того, що молекули хаотично рухаються і зазнають безперервних зіткнень, то кожного моменту часу ці параметри матимуть випадкові значення і називаються макроскопічними.

Між макропараметрами і середніми значеннями мікропараметрів, очевидно, повинен існувати певний зв'язок, він виражається основним рівнянням МКТ ідеального газу. Ідеальний газ – це газ, молекули якого можна вважати матеріальними точками, взаємодія їх між собою або стінками посудини відбувається лише за умови безпосереднього зіткнення і має абсолютно пружний характер. Істотною ознакою ідеального газу є абсолютна хаотичність руху молекул і наявність досить великої кількості в будь-якому заданому кінцевому об'ємі. Для одержання основного рівняння МКТ розглядаємо газ, який міститься в певному об'ємі. Уявно виділимо в цьому об'ємі деяку площину dS – нескінченно малу, щоб вважати її плоскою, і зв'яжемо з нею систему координат так, щоб одна з осей, наприклад x , була перпендикулярна цій площині (рис. 2.2). Усі молекули розіб'ємо на групи так, щоб у вибраній групі швидкість молекул була практично однаковою. Якщо вважати, що молекули $[i]$ групи мають

швидкість v_i , то за час dt до площини долітатимуть ті молекули, які містяться в циліндрі з площею dS із твірною – $v_i \cdot dt$.

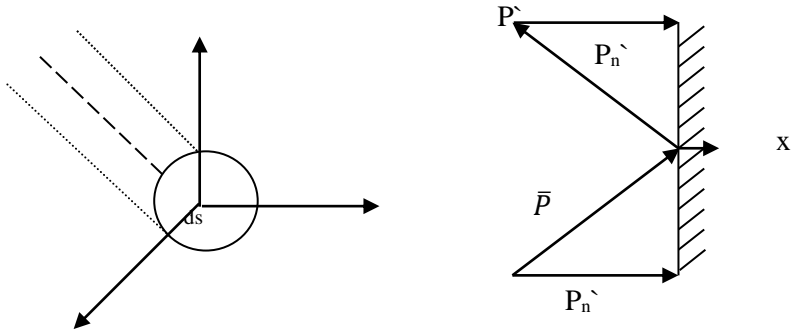


Рисунок 2.2 – Пояснення тиску ідеального газу

Якщо концентрація молекул [i] групи дорівнює n_i , то число молекул, які долітають до площі dS , буде дорівнювати $dN = \frac{1}{2} \cdot n_i \cdot v_i \cdot dt \cdot dS \cdot \cos(v_i \hat{x})$, де $\cos(v_i \hat{x}) = v_{ix}$, тобто x -ва проекція швидкості молекули виділеної групи, коефіцієнт $\frac{1}{2}$ враховує той факт, що половина молекул летить в одному напрямку, друга – в іншому. Якщо розглядати удар молекули, яка підлітає під деяким кутом до деякої площини, то можемо стверджувати, що перпендикулярна до стінки складова імпульсу не змінюватиметься, а отже, зміна імпульсу в момент удару буде дорівнювати $-2 \cdot m \cdot v_i \cdot x$. Оскільки за означенням $p = \frac{dF}{dS}$, з іншого боку $\vec{F} = \frac{dp}{dt}$. Зважаючи на вирази для тиску і зміни імпульсу, тиск всього газу можемо одержати як суму тисків усіх груп молекул газу. Одержимо $p = \sum_{i=1}^n m \cdot n_i \cdot v_{ix}^2$, домножимо в цьому виразі й поділимо праву частину на $2n$. Одержимо $p =$

$$= 2n \frac{\sum_{i=1}^n n_i \frac{mv_{ix}^2}{2}}{n}$$
, де n – концентрація молекул газу, величина

$$\tilde{\epsilon}_x = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \frac{mv_{ix}^2}{2}}{n}$$
 – середня кінетична енергія, пов'язана
 x -м компонентом руху молекул. Оскільки рух молекул хаотичний, то можемо записати $\tilde{\epsilon}_x = \tilde{\epsilon}_y = \tilde{\epsilon}_z = \frac{1}{3}\tilde{\epsilon}$, а тому тиск газу буде дорівнювати

$$p = \frac{2}{3}n\tilde{\epsilon}. \quad (2.7)$$

Цей вираз поєднує величину тиску з величиною середньої кінетичної енергії окремих молекул, тобто з'єднує між собою макро- і мікропараметри. Це рівняння відоме як основне рівняння МКТ газу і виражає лінійну залежність між тиском і середньою кінетичною енергією окремих молекул. Дослідні факти доводять, що тиск прямо пропорційний температурі, це означає, що між середньою кінетичною енергією і температурою повинен існувати зв'язок – прямо пропорційний $\theta = c\tilde{\epsilon}$, де θ – енергетична температура, це коефіцієнт пропорційності, який вибрали $\frac{2}{3}$. Енергетичну температуру вимірюють в одиницях енергії. Перехід від енергетичних одиниць до температурних за шкалою Кельвіна $\theta = kT$, k – стала Больцмана ($1,38 \times 10^{-23}$ Дж/К) – ця стала визначається як і стала Авогадро – експериментально. Тоді $\tilde{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$. Тоді рівняння (2.7) можна записати у вигляді

$$p = nkT, \quad (2.8)$$

з цього рівняння можна одержати основні газові закони.

2.2.2 Рівняння стану ідеального газу

Загалом його можна записати $f(p, V, T) = 0$, у явному вигляді це рівняння можна одержати для ідеального газу з (2.8). Зважаючи, що $n = \frac{N}{V}$, тоді $pV = NkT$, число молекул N можна знайти $N = \nu N_A$, $\nu = \frac{m}{\mu}$, тоді матимемо

$$pV = \frac{m}{\mu} k T N_A = \frac{m}{\mu} RT, \quad (2.9)$$

де $R = \frac{N_A}{k} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль К}}$. (2.9) відоме як рівняння стану ідеального газу, що є універсальним.

2.2.3 Газові закони

Рівняння стану ідеального газу можна записати у вигляді

$$pV = \nu RT, \quad (2.10)$$

з цього рівняння можна одержати газові закони.

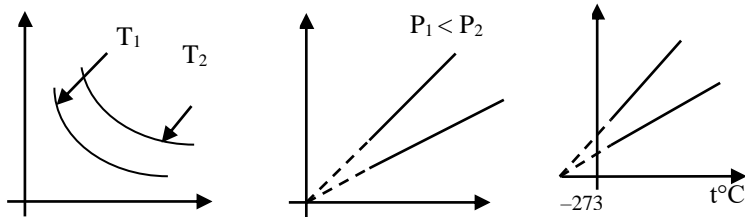


Рисунок 2.3 – Газові закони

Закон Бойля – Маріотта описує ізотермічні процеси – це такі, для яких $T = const$. Тоді з (2.10) випливає $pV = const$. Для даної маси газу за сталої температури добуток тиску на об'єм є величиною сталою. У pV -координатах цей закон можна зобразити так.

Закон Гей-Люсака описує ізобарний процес, тобто процес за умови $p = const$, тоді

$$\frac{V}{T} = const. \quad (2.11)$$

Для даної маси газу за сталого тиску об'єм газу прямо пропорційний температурі. Для двох різних станів можемо записати

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (2.11')$$

Зважаючи на зв'язок між температурами, який задається рівнянням $T = t^0 + 273$, де t^0 – температура за шкалою Цельсія, T – за шкалою Кельвіна. Рівняння (2.11') можна записати у вигляді

$$V = V_0 \left(1 + \frac{1}{273} \cdot t^0\right),$$

або $V = V_0(1 + \alpha t^0)$, де V_0 – об'єм газу при 0 °С. Розширення газу за умови ізобаричного процесі характеризується коефіцієнтом об'ємного розширення, який за означенням дорівнює $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dT}\right)$. Як бачимо з рівняння (2.10), $\beta = \frac{1}{T}$. Графічно штрихові лінії вказують на те, що закон у цих межах не виконується.

Закон Шарля описує ізохоричні процеси $V = const$. $\frac{p}{T} = const$, або тоді $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, або $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$. Тиск даної маси газу за умови $T = const$ прямо пропорційний абсолютній температурі. Якщо температуру виражати у °С, то $p = p_0 \left(1 + \frac{1}{273} t^0\right)$. Для характеристики об'ємного

розширення вводять термічний коефіцієнт тиску $\gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dT} \right)_V$.

Закон Дальтона встановлює зв'язок між тиском суміші газів і тиском окремих компонент, будемо вважати, що в посудині об'ємом V міститься суміш газів у стані теплової рівноваги. І ці гази не реагують між собою, тоді загальна кількість молекул N може бути записана $N = N_1 + N_2 + \dots + N_i$. Для тиску суміші $p = nkT = \frac{N}{V}kT = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_i}{V}kT$,
або $p = n_1kT + n_2kT + \dots + n_ikT$,

$$\text{або } p = p_1 + p_2 + \dots + p_i, \quad (2.12)$$

що і є законом Дальтона. Тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків окремих компонентів суміші. Парціальний – це тиск окремої складової суміші.

Закон Авогадро стверджує, що в рівних об'ємах різних газів за однакових умов міститься однакова кількість молекул. Це впливає із такого: $p_1V_1 = N_1kT_1$, $p_2V_2 = N_2kT_2$. Оскільки $V_1 = V_2$, $p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$, а отже, $N_1 = N_2$. Усі експериментальні закони, як бачимо, ми одержали як наслідок рівняння стану ідеального газу, яке, зі свого боку, є наслідком основного рівняння МКТ.

Закон Максвелла про розподіл швидкостей молекул. Як відомо, молекули газу безперервно і хаотично рухаються і зазнають зіткнення між собою. Унаслідок зіткнень змінюється як величина, так і напрямок швидкості, а отже, кінетична енергія й імпульс. У кожний момент часу ці величини мають випадкові значення. Для знаходження середніх значень цих величин використовують елементи теорії ймовірностей.

Елементи теорії ймовірності досить широко використовують під час описання низки явищ у молекулярній фізиці. Одне із завдань полягає в тому, щоб установити розподіл молекул за швидкостями – це означає, установити кількість молекул, які мають швидкість у певному інтервалі. Аналітично цей розподіл визначається функцією розподілу.

Нехай число молекул в одиниці об'єму n . Число молекул, які мають швидкість від v до $v + dv$, позначимо через dn . Очевидно, це число буде тим більшим, чим більша концентрація n , чим більший інтервал dv і, мабуть, буде залежати від того, де вибраний цей інтервал. На підставі цього можемо записати, що $dn = cndv$, де c – коефіцієнт пропорційності, який залежить від швидкості, $c = f(v) \cdot ndv$ або

$$\frac{dn}{n} = f(v)dv. \quad (2.13)$$

Ліва частина цього виразу – це ймовірність того, що деяка молекула має швидкість у цьому інтервалі $d\omega = f(v)dv$, оскільки в (2.13) у лівій частині стоїть ймовірність, то величина $f(v) = \frac{dn}{ndv}$ виражає густину ймовірності. У подальшому задача буде полягати в тому, щоб знайти $f(v)$ у явному вигляді.

2.3 Розподіл Максвела

2.3.1 Розподіл молекул за модулем швидкості

Як уже відзначалося, молекули газу перебувають у стані безперервного хаотичного руху і зазнають зіткнень між собою і стінками посудини, у якій вони містяться. А тому значення всіх динамічних характеристик молекул у кожен

момент часу є випадковими величинами. У стані термодинамічної рівноваги зміна динамічних характеристик однієї частини молекул повинна компенсуватися такою самою зміною цих величин, використовуючи іншу частину. Це означає, що повинен існувати розподіл молекул за динамічними характеристиками. Уперше це питання було розв'язане 1859 р. Максвелом із чисто гіпотетичних, але фізично правдоподібних міркувань. Максвел розв'язав задачу про розподіл молекул за швидкостями, і це було перевірено експериментально в дослідах Штерна в 1920 р. В основу було покладено такі міркування: оскільки рух молекул хаотичний, то, очевидно, функція розподілу не повинна залежати від напрямку руху, але вона повинна залежати від самої швидкості. Ця функція може бути лінійною, оскільки, швидкість – величина векторна і в разі лінійної залежності функція розподілу залежала б від напрямку, тому було покладено, що ця функція є квадратичною залежністю від швидкості. Після деяких міркувань функцію записали у вигляді

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (2.14)$$

Графічно цю залежність можна зобразити так, як бачимо із графіка, ця залежність є асиметричною, і для однакових інтервалів dv площа під кривою буде різною, і ця площа чисельно дорівнює ймовірності того, що довільно взята молекула газу має швидкість в інтервалі від v до $v + dv$, а вся площа під кривою розподілу буде дорівнювати 1, тобто $\int_0^{\infty} f(v) \times dv = 1$. Графік функції $f(v)$ і v проходить через початок координат, і це означає, що немає нерухомих молекул. В області великих

швидкостей він наближається асимптотично до осі абсцис.

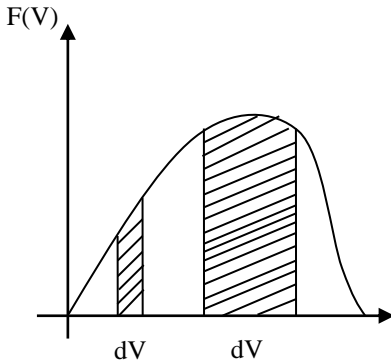


Рисунок 2.4 – Розподіл молекул за модулем швидкості

Це свідчить про те, що в газі мало молекул, які мають досить великі швидкості. Оскільки між швидкістю молекул, імпульсом та кінетичною енергією існує однозначний зв'язок, то можна встановити розподіл молекул за імпульсом і кінетичною енергією.

2.3.2 Характеристичні швидкості. Найбільш ймовірна швидкість

Як бачимо із графіка функції розподілу, вона має максимум і, мабуть, ми можемо стверджувати, що найбільша частка молекул має швидкість, яка лежить в інтервалі, що відповідає максимуму кривої, ця швидкість називається найбільш ймовірною. Але не можна стверджувати, що найбільш ймовірна швидкість – це швидкість, яку має найбільша кількість молекул. Найбільш ймовірну швидкість можна знайти, досліджуючи функцію розподілу на екстремум $f'(v) = \left(4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right) v^2 e^{-\frac{4v^2}{kT}} \right)'$,

одержимо $ve^{-\frac{4v^2}{kT}} \left(1 - \frac{mv^2}{2kT} \right) = 0$. Це рівняння має 3 корені $v_1 = 0$, і ця точка на графіку відповідає початку координат, $v_2 = \infty$, $v_3 = v_{\text{імов.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, він відповідає максимуму на

кривій і визначає найбільш імовірну швидкість молекул. Оскільки стала Больцмана зв'язана із сталою Авогадро $K = \frac{R}{N_A}$, а молярна маса зв'язана теж з числом Авогадро $\mu = m N_A$, то

$$v_{\text{імов.}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.15)$$

Оцінимо найбільш імовірну швидкість молекул повітря при 300 К, використовуючи (2.15) $v_{\text{імов.}} = \sqrt{\frac{(2 \cdot 8,31 \cdot 300)}{29 \cdot 10^{-3}}}$, оцінка дає величину приблизно 500 м/с, для Водню ця величина приблизно 1 500 м/с, але ці швидкості є досить малими величинами (порівнюючи з другою космічною швидкістю).

2.3.3 Середня швидкість

Цю швидкість можна знайти, користуючись означенням середніх величин, за означенням для довільної величини $\langle X \rangle = \int x f(x) dx$, тоді для середньої швидкості можемо записати

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} v 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

або

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (2.16)$$

Цей інтеграл відомий, як інтеграл Пуассона (табличний інтеграл). Застосовуючи інтеграл Пуассона, одержимо

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (2.17)$$

або

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (2.18)$$

Середню квадратичну швидкість можна знайти за означенням $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, після підстановки одержимо інтеграл Пуассона, з якого знайдемо середню квадратичну швидкість

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (2.19)$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (2.20)$$

із виразів для характеристичних швидкостей випливає, що вони прямо пропорційні \sqrt{T} і обернено пропорційні \sqrt{m} , тобто із зростанням температури вони зростають, і за тієї самої температури легкі молекули мають більшу швидкість, але середня кінетична енергія $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT$, тобто залежить лише від температури.

2.3.4 Розподіл молекул за відносною швидкістю

Характерною ознакою розподілу Максвела за швидкостями є те, що для даного газу він залежить лише від температури, причому із збільшенням температури максимум кривої буде збільшуватися в напрямку більших швидкостей тому, що під час зростання температури

збільшуватиметься найбільш імовірна швидкість. Одночасно максимум кривої буде збільшуватися, але площа під кривою буде дорівнювати 1. Для однієї і тієї самої температури максимум кривої розподілу зміни газів зміщується в напрямку малих швидкостей у міру переходу від газу з меншою молярною масою, до газу з більшою молярною масою.

Можна записати розподіл Максвела, який не буде залежати ні від роду газу, ні від температури, це так званий розподіл молекул за відносною швидкістю. Ввівши позначення $u = \frac{v}{v_{\text{імов.}}}$, тоді $dv = v_{\text{імов.}} du$, після підстановки цих виразів у (2.14) одержимо

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}, \quad (2.21)$$

(2.21) і є функцією розподілу за відносною швидкістю. Як бачимо, вона не залежить ні від температури, ні від роду газу.

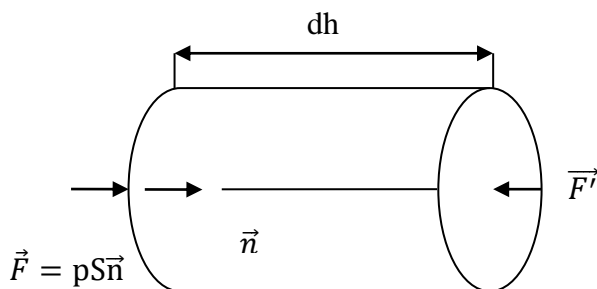


Рисунок 2.5 – Розподіл Больцмана

Реально існуючи в природі, гази завжди перебувають у гравітаційному полі Землі, тому є питання про розподіл молекул газу за висотою. Для того, щоб одержати розподіл

молекул у полі Землі, будемо розглядати ідеальний газ у рівноважному стані. Водночас будемо вважати, що прискорення вільного падіння і температура з висотою не змінюються. Виділимо умовно невеликий стовпчик повітря з висотою dh і площею поперечного перерізу S . Очевидно, на такий стовпчик повітря будуть діяти сили тиску знизу і зверху. Цей стовпчик повітря перебуватиме в рівновазі, коли сила тяжіння буде урівноважена різницею сил тиску, тобто

$$Sdp = -mg = -\rho Vg = -\rho dhSg. \quad (2.22)$$

Знак « \rightarrow » показує, що із збільшення висоти, тиск зменшується. Знайшовши із рівняння стану ідеального газу густину $\rho = \frac{p\mu}{RT}$, одержимо $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g dh}{RT}$, інтегруючи одержимо

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh, \ln \frac{p}{p_0} = \frac{\mu gh}{RT}, \begin{cases} p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \\ p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \end{cases} \quad (2.23)$$

Рівняння (2.23) відомі як барометрична формула і визначають зміну тиску з висотою. У цих рівняннях (2.23) врахований зв'язок сталої Авогадро із сталою Больцмана $\frac{\mu}{R} = \frac{m}{k}$, p_0 – тиск за умови $h = 0$, зважаючи, що $p = nkT$. Аналогічні рівняння можемо записати для концентрації

$$\begin{cases} n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \\ n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \end{cases} \quad (2.24)$$

аналогічні рівняння (2.24) можна записати і для загальної кількості частинок N . У першому випадку $\mu = \text{const}$, на

другому графіку $T = const$, у рівняннях (2.23) і (2.24) mgh є потенціальна енергія, а тому ці рівняння можна розглядати як розподіл молекул за потенціальною енергією.

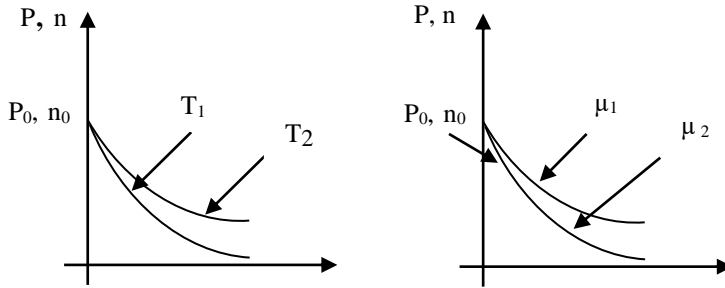


Рисунок 2.6 – Розподіл Больцмана

Розподіл молекул за потенціальною енергією дає змогу визначити число Авогадро. Уперше це зробив французький вчений Перрен, який спостерігав рух дрібних частинок фарби в певній емульсії. Одержане Перреном для різних емульсій становить величину від 6,5 до $7,2 \cdot 10^{23}$.

2.4 Явище переносу в ідеальному газі

2.4.1 Зіткнення молекул, середня довжина вільного пробігу

З дослідів відомо, що надана сама собі система через деякий час може перейти в рівноважний стан, це означає, що в кожній частині певного об'єму параметри системи будуть практично однаковими. Якщо система не рівноважна, то ці параметри будуть різними (концентрація, тиск, температура). Якщо в різних частинах концентрація різна, то з часом завдяки хаотичному рухові буде відбуватися вирівнювання концентрації, тобто перенос

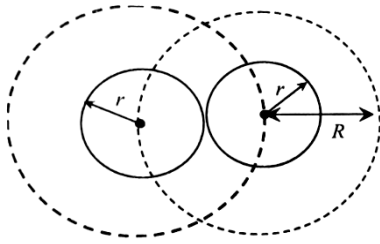


Рисунок 2.7 – Зіткнення молекул

речовини. Вирівнювання температури теж зумовлене рухом молекул, водночас рух відбувається від більш нагрітої частини молекул до менш нагрітої. Завдяки

передаванню кінетичної енергії одних молекул іншим відбувається процес переносу енергії, а отже, вирівнювання температур, і це називається

теплопровідністю.

У рідинах і газах може відбуватися відносний рух шарів, які зазнають між собою зіткнення, водночас відбувається перенос імпульсу, і це явище називається внутрішнім тертям, або в'язкістю. Ми відзначали, що зіткнення молекул відбувається під час їхнього безпосереднього дотику, тобто якщо маємо дві різні молекули, які дотикаються, і навколо цих молекул проведемо сферу радіуса $r_1 + r_2$, то така сфера буде сферою молекулярної дії, а її переріз – ефективним перерізом молекули. Тобто можемо стверджувати, що молекули зазнають зіткнень, якщо їхній центр потрапляє в ефективний переріз іншої молекули. Від зіткнення до зіткнення молекули проходять різну відстань. Відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями, називають довжиною вільного пробігу.

Величина вільного пробігу з часом змінюється, тому користуються поняттям середньої довжини вільного пробігу (СДВП). Довжину середнього пробігу можна знайти, розділивши пройдений шлях на число зіткнень за цей час, $S = \tilde{v}_0 \Delta t$, де \tilde{v}_0 – середня швидкість щодо інших молекул. За час Δt молекула зіткнеться з усіма

n молекулами, які трапляються на шляху ефективного перерізу δ ,

$$N = \delta \tilde{v}_0 \Delta t n. \quad (2.25)$$

Якщо ввести в розгляд середню швидкість щодо стінок, то останнє рівняння запишемо у вигляді $N = \delta \tilde{v} \Delta t n \sqrt{2}$, тобто $\tilde{v}_0 = \sqrt{2} \tilde{v}$, тоді середня довжина вільного пробігу визначається рівнянням

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n \delta}, \quad (2.26)$$

де n – концентрація; δ – ефективний переріз молекул. Знаючи довжину вільного пробігу, можна визначити середній час вільного пробігу молекул $\tau = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{v}}$. Оскільки тиск зв'язаний із концентрацією, то, очевидно, середня довжина вільного пробігу обернено пропорційна тиску. Із зменшенням тиску довжина вільного пробігу збільшується і може дорівнювати розмірам посудини, у якій міститься газ, або навіть більшою. Такий стан газу називається вакуумом. Середня довжина вільного пробігу не повинна залежати від температури, але досліди доводять, що існує незначна залежність довжини вільного пробігу від температури.

2.4.2 Дифузія. Рівняння Фіка. Коефіцієнт дифузії

Дифузією називається процес самовільного проникнення молекул однієї речовини у проміжки між молекулами іншої. Процес дифузії може відбуватися в усіх агрегатних станах. Найшвидше дифузія відбувається в газах. Оскільки відстані між молекулами незначні, у газах можна спостерігати процес дифузії різних атомів і молекул. Розглянемо процес самодифузії. Будемо вважати,

що концентрація молекул в різних частинах деякого об'єму буде різною, якщо таку систему надати самій собі, то, очевидно, з часом концентрація, а отже, густина будуть вирівнюватися. Зміну концентрації і густини вздовж обраної вісі (напрямок X) будемо характеризувати величиною, яка називається градієнтом (зміна якоїсь речовини вздовж осі) $grad n = -\frac{dn}{dx}$, $grad \rho = -\frac{d\rho}{dx}$. Фіком було встановлено, що кількість молекул, яка проходить через деяку площадку dS , перпендикулярну осі X , буде пропорційна величині площини, часу і градієнту концентрації.

$$dN = -D \frac{dn}{dx} \Delta t \Delta S. \quad (2.27)$$

Величина

$$G = \frac{dN}{\Delta S \Delta t} \quad (2.28)$$

називається питомим дифузійним потоком молекул.

$$G = -D \frac{dn}{dx}. \quad (2.29)$$

На підставі цих рівнянь закон Фіка можна сформулювати так: **питомий дифузійний потік молекул пропорційний градієнту концентрації і протилежно йому напрямлений.** Знак « \leftarrow » вказує, що рух молекул відбувається в напрямку зменшення концентрації.

У рівняннях (2.27), (2.29) D – коефіцієнт дифузії, який чисельно дорівнює питомому дифузійному потоку за градієнта концентрації «1». Визначимо коефіцієнт дифузії D . Для цього розглянемо деяку площадку ΔS , розташовану перпендикулярно до осі X .

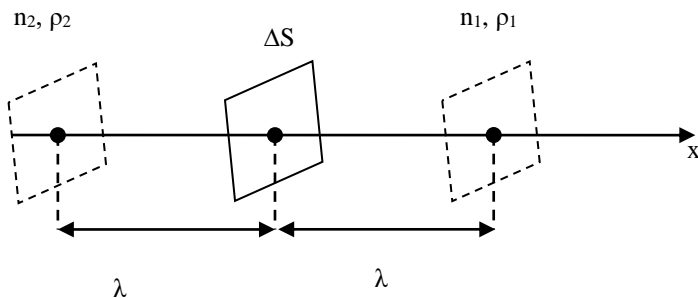


Рисунок 2.8 – Коефіцієнт дифузії

Будемо вважати, що на відстані λ від цієї площадки містяться молекули з концентрацією, відповідно, $n_2\rho_2$ і $n_1\rho_1$. Зважаючи, що молекули рухаються хаотично, то, очевидно, за деякий час dt площадку ΔS перетнуть ті молекули, які розташовані на відстані не більше ніж $\tilde{\lambda}_{\text{сер}}$. Різниця концентрації, відповідно, може бути знайдена із співвідношення

$$n_2 - n_1 = -2\tilde{\lambda} \left(\frac{dn}{dx} \right). \quad (2.30)$$

З іншого боку, кількість таких молекул буде дорівнювати

$$\frac{1}{6} (n_2 - n_1) \Delta t \Delta S \tilde{v}. \quad (2.31)$$

Коефіцієнт $\frac{1}{6}$ враховує рівно важність руху молекул у різних напрямках. Тоді на підставі рівняння (2.27)–(2.31) можемо записати

$$D = \frac{1}{3} \tilde{\lambda} \tilde{v}. \quad (2.32)$$

Як бачимо, коефіцієнт дифузії залежить від середньої довжини вільного пробігу і швидкості теплового руху молекул. Швидкість теплового руху пропорційна \sqrt{t} , а довжина вільного пробігу $\tilde{\lambda}$ практично не змінюється з температурою, а отже, коефіцієнт дифузії наближено пропорційний \sqrt{T} . Водночас коефіцієнт дифузії обернено пропорційний тиску, оскільки довжина вільного пробігу обернено пропорційна концентрації, а, отже, і тиску.

2.4.3 В'язкість. Рівняння Ньютона. Коефіцієнт в'язкості

В'язкість – це явище вирівнювання швидкості руху різних шарів рідини або газу. Будемо розглядати рух рідини в деякому напрямку X . Ньютон встановив, що на будь-яку площадку S , перпендикулярну до осі X , буде діяти сила, пропорційна величині площадки і градієнту швидкості рідини, перпендикулярному до осі X , тобто можемо записати $F = -\eta \frac{dv}{dx} \Delta S$, де η – коефіцієнт в'язкості. Коефіцієнт в'язкості – це фізична величина, що чисельно дорівнює силі, яка діє на одиничну площадку, перпендикулярну їй, за градієнта швидкості, який дорівнює одиниці. Коефіцієнт в'язкості можна знайти аналогічно до коефіцієнта дифузії. Одночасно необхідно вводити в силу хаотичності руху кількість молекул, яка буде перетинати площадку ΔS за деякий час Δt , буде пропорційна $\frac{1}{6}$. Будемо вважати, що швидкості \tilde{v}_2 і \tilde{v}_1 будуть різними щодо площадки ΔS , розташованої на відстані λ відповідно до (рис. 2.8). Тоді, знаходячи різницю швидкості, а також перенесений імпульс через площадку ΔS для коефіцієнта в'язкості

$$\eta = \frac{1}{3} n m \tilde{\lambda} \tilde{v}. \quad (2.33)$$

Бачимо, що коефіцієнт в'язкості збільшується пропорційно \sqrt{T} і не залежить від тиску.

2.4.4 Теплопровідність. Рівняння Фур'є. Коефіцієнт теплопровідності

Якщо система перебуває в рівноважному стані, то її параметри (p , V , T) матимуть приблизно однакові значення, в іншому разі ці параметри будуть різними.

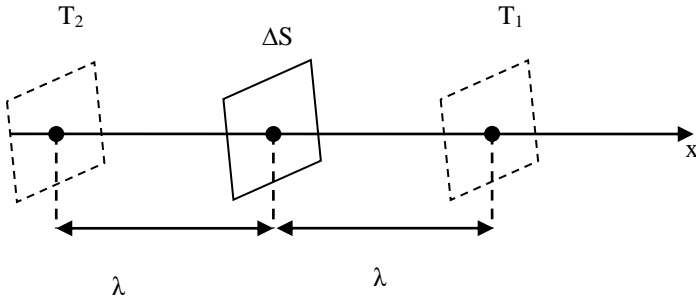


Рисунок 2.9 – Пояснення теплопровідності

Можна створювати такі умови, коли, наприклад, температура в різних частинах буде різною, якщо таку систему надати самій собі, то з часом температура буде вирівнюватися. Будемо вважати, що вздовж деякої осі X температура в різних частинах буде різною, виділимо на цій осі деяку площадку ΔS , щодо якої температура в один і інший бік від цієї площадки буде різною. Якщо вважати, що $T_2 > T_1$, то, очевидно, за деякий час dt через площадку ΔS буде проходити певна кількість теплоти

$$dQ = -\alpha \frac{dt}{dx} \Delta S dt, \quad (2.34)$$

де α – коефіцієнт пропорційності. Рівняння (2.34) є математичним записом закону Фур'є, знак « $-$ » вказує, що градієнт температури напрямлений у бік найбільшого зростання температури, водночас теплота переноситься в протилежному напрямку. Оскільки теплота переноситься, зазвичай, з боку більшої температури в бік меншої, то, очевидно, середня кінетична енергія буде визначатися відповідними температурами: $\tilde{\epsilon}_2 = \frac{3}{2} k T_2$, $\tilde{\epsilon}_1 = \frac{3}{2} k T_1$, тоді через площадку ΔS за час dt буде перенесена енергія (теплота), яка дорівнює

$$dQ = \frac{1}{6} n \tilde{v} \Delta S dt \frac{3}{2} k (T_2 - T_1). \quad (2.35)$$

Якщо вважати, що зіткнення між молекулами відбулося на відстані $\tilde{\lambda}$ від площадки ΔS , то різниця температур може бути знайдена із співвідношення

$$T_2 - T_1 = -2\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (2.36)$$

Тоді на підставі вказаних рівнянь для коефіцієнта теплопровідності одержимо вираз

$$\alpha = \frac{1}{2} n k \tilde{v} \tilde{\lambda}. \quad (2.37)$$

Оскільки $p = nkT$ і λ пропорційне $\lambda = \frac{1}{p}$, а також \sqrt{T} , то можемо зробити висновок, що коефіцієнт теплопровідності не залежить від тиску і в разі збільшення температури дещо зростає.

Очевидно, між коефіцієнтами переносу існує певний зв'язок $D = \frac{1}{3} \tilde{\lambda} \tilde{v}$, $\eta = \frac{1}{3} n m \tilde{\lambda} \tilde{v}$.

Усі явища переносу фактично описують аналогічні рівняння, коефіцієнти переносу залежать від середньої довжини вільного пробігу і середньої швидкості, явище переносу характерне не тільки для газів, а і для твердих тіл і рідин. Зрозуміло, що у твердих тілах і рідинах рівняння для коефіцієнта переносу будуть дещо іншими і явища переносу будуть дещо повільнішими порівняно з газами.

2.5 Елементи термодинаміки

2.5.1 Кількість теплоти. Теплопровідність

У повсякденному житті ми стикаємося з поняттями кількості теплоти як формою зміни внутрішньої енергії: різні тіла по-різному проводять тепло. Теплоємністю системи називається фізична величина, що чисельно дорівнює кількості теплоти, яку необхідно надати системі (тілу), щоб змінити температуру на 1° ,

$$c = \frac{dQ}{dT}. \quad (2.38)$$

Для більш чіткої характеристики використовують поняття питомої та молярної теплоємності. Питома теплоємність – це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості необхідної для зміни температури одиниці маси на один градус $[c^m] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

$$c^m = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dT}. \quad (2.39)$$

Молярна теплоємність – це фізична величина, що чисельно дорівнює кількості теплоти, яку необхідно надати

одному молю речовини, щоб змінити температуру на $1^0 [C^\mu] = \text{моль/К}$.

$$c^\mu = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT}. \quad (2.40)$$

У термодинаміці використовують поняття молярної теплоємності, тому індекс ν у рівнянні (2.40) опускають. Очевидно, що нагрівання тіл залежить не тільки від їхніх властивостей, але й від умов нагрівання (температури, тиску тощо). Тому загалом молярну теплоємність вводять як величину $C_\kappa = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_\kappa$, де індекс означає вид процесу, найбільш поширеними поняттями є поняття молярної теплоємності за сталого об'єму і сталого тиску $C_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V$, $C_p = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$, загалом молярна теплоємність речовини тією чи іншою мірою залежить від температури, а тому кількість теплоти буде залежати від процесу, який відбувається в системі і в загальному для підрахунку

кількості теплоти $Q_\kappa = \nu \int_{T_1}^{T_2} C_\kappa(T) dT$.

Необхідно підкреслити, що кількість теплоти є функцією процесу. Для того, щоб сформулювати перший закон термодинаміки, будемо розглядати деяку модель механізму, який може перетворювати теплоту в роботу. Будемо вважати, що таким механізмом є

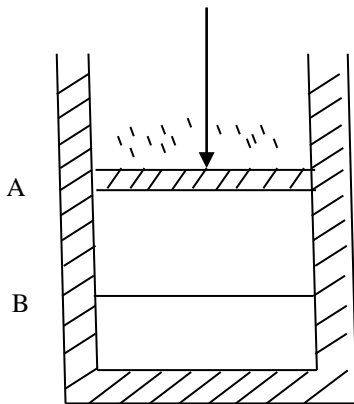


Рисунок 2.10 – Пояснення першого закону термодинаміки

деяка система, яка складається з термостата і довільної системи, і такою системою може бути газ, рідина чи тверде тіло, ця система відокремлена від термостата деякою перетинкою АВ, вздовж термостата може рухатися поршень АС. Будемо вважати, що на поршні міститься досить велика кількість дрібних піщинок. Якщо з поршня будемо знімати по одній піщинці, то, очевидно, поршень буде рухатися в гору, а отже, буде виконуватися робота. Тоді для вказаної системи можемо записати

$$Q = \Delta E + A,$$

де Q – кількість теплоти; ΔE – зміна внутрішньої системи; A – виконана робота.

Фактично це є першим законом термодинаміки, що можна сформулювати так: **кількість теплоти, надана системі, йде на зміну внутрішньої енергії і на виконання системою роботи.** У диференціальній формі цей закон можна записати $dQ = dE + dA$.

Розглянемо деякий коловий циклічний процес, який у pV -координатах можна записати: процес 1а2 буде прямим, 2б1 – зворотним.

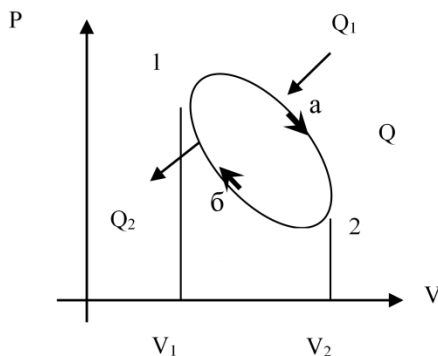


Рисунок 2.11 – Пояснення першого закону термодинаміки

Очевидно, щоб такі процеси відбувалися, необхідно підвести деяку кількість теплоти dQ , і під час зворотного процесу забрати кількість теплоти Q_2 . Тоді перший закон термодинаміки для прямих і зворотних процесів запишемо $Q_1 = \Delta E_{12} + A_{12}$, $Q_2 = \Delta E_{21} + A_{21}$, додаючи ліві і праві частини, одержимо $Q_1 + Q_2 = \Delta E_{12} + \Delta E_{21} + A_{12} + A_{21}$. Величина $A = A_{12} + A_{21}$ є роботою за весь цикл. Процес $\Delta E_{12} + \Delta E_{21} = 0$, оскільки внутрішня енергія є функцією стану. З цього можна зробити висновки: неможливо створити періодичну діючу машину (вічний двигун першого роду), яка б виконувала роботу, не затрачаючи одночасно енергію; теплова машина, призначенням якої є виконання роботи завдяки енергії, повинна складатися з нагрівача, робочого тіла і холодильника.

Ефективність дії теплової машини характеризується коефіцієнтом корисної дії як величини, що чисельно дорівнює відношенню корисної роботи до всієї затраченої.

$$\eta = \frac{A_k}{A_z}, \eta = \frac{A}{Q_1}, \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

2.5.2 Застосування першого закону термодинаміки для вивчення термодинамічних процесів в ідеальному газі

Пі час вивчення квазістатичних процесів в ідеальному газі за допомогою першого закону термодинаміки будемо з'ясовувати такі питання: 1) як формулюється перший закон термодинаміки для цього процесу; 2) який вигляд має рівняння для цього процесу; 3) співвідношення між кількістю теплоти, зміною внутрішньої енергії і роботою в цьому процесі.

Загалом перший закон ми записали так:

$$dQ = dE + dA, \quad (2.41)$$

$$dQ = dE + pdV. \quad (2.41')$$

Розглянемо ізохорний процес. Ізохорний процес за умови $V = const$. Загалом такий процес є ідеалізацією, але за певних умов він може бути здійснений. Тоді перший закон термодинаміки на підставі (2.41') можна записати

$$dQ = dA. \quad (2.42)$$

Тому під час ізохоричного процесу вся кількість теплоти, одержана системою, іде на зміну внутрішньої енергії цієї системи. Оскільки внутрішня енергія є кінетичною для ідеального газу, то, очевидно, вона буде визначатися лише температурою, тому можемо записати

$$C_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_T$$

або
$$dE = \nu C_V dT,$$

або
$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_V dT,$$

$$\Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1). \quad (2.43)$$

Тоді, кількість теплоти

$$dQ = \Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1),$$

Робота $A = \int pdV = 0$, оскільки $dV = 0$. З рівняння стану ідеального газу $pV = \nu RT$ випливає, що за умови $V = const$, $p = cT$, тобто запишемо

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad (2.44)$$

що і виражає закон Шарля, який формулюється так: **тиск даної маси газу за сталого об'єму прямо пропорційний абсолютній температурі** (1787 р.).

Раніше ми відзначали, що середня енергія молекул $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$. Оскільки молекула має три рівноважні стани вільності, то, очевидно, на кожний ступінь вільності в середньому припадає енергія, що дорівнює $\frac{1}{2}kT$, тоді внутрішня енергія ν молей газу буде $\bar{\epsilon} = 3\nu N_A \frac{kT}{2}$, а C_V як величина буде дорівнювати: $C_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$, $C_V = \frac{3}{2}kN_A$, оскільки $kN_A = R$, $C_V = \frac{3}{2}R$. Через те, що реальні гази мають внутрішню структуру, складаються із двох і більше атомів, то під час аналізу їхньої теплоємності необхідно цей факт враховувати і молярна теплоємність для них за сталого об'єму: $C_V = \frac{i}{2}R$. Де i – число ступенів вільності даної молекул (для 2, для більше ніж $i = 7$).

Ізотермічний процес – це процес, що відбувається за умови $T = const$. Такі процеси є ідеалізованими, але на достатньо малій швидкості протікання процесів їх можна здійснити. Оскільки, $dE = \nu C_V dT$, а $dT = 0$, матимемо $dQ = pdV$. Тобто в ізотермічному процесі внутрішня енергія не змінюється, і вся теплота йде на виконання роботи, а отже, ізотермічний процес найбільш вигідний для перетворення теплоти в роботу. Роботу можна знайти $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$, величину p знайдемо із рівняння Клапейрона $p = \frac{\nu RT}{V}$, тоді маємо $A = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$,

$$A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.45)$$

Зважаючи, що тиск і об'єм в ізотермічному процесі зв'язані між собою законом Бойля – Маріотта,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2}. \quad (2.46)$$

З рівняння (2.44) бачимо, що робота буде доданою, якщо газ буде розширюватися і навпаки. За ізотермічного процесу температура залишається сталою, тоді на підставі означення теплоємності формально можна вважати, що за ізотермічного процесу теплоємність змінюється від $-\infty$ до $+\infty$.

Ізобарний процес. Такий процес, як і розглянуті раніше, є ідеальним, для реального здійснення такого процесу потрібна низка додаткових умов. Ізобарний – це процес за умови $p = \text{const}$, у цьому процесі можуть змінюватися температура й об'єм, але, як і для інших, ми можемо його записати

$$dQ = dE + pdV, \quad (2.45)$$

тобто ми можемо стверджувати, що тепло, яке надається системі, йде на зміну внутрішньої енергії і на роботу. Для ідеального газу закон можна записати у вигляді $dQ = v_{C_V}dT + pdV$. Як бачимо, внутрішня енергія є функцією стану, а тому зміну її можна записати у вигляді $\Delta E = v_{C_V}(T_2 - T_1)$. В ізотермічному процесі кількість теплоти $dQ = v_{C_p}dT$, $Q = v_{C_p}(T_2 - T_1)$, де C_p – молярна теплоємність за сталого тиску, робота в такому процесі може бути визначена стандартним методом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1), \quad (2.46)$$

роботу можна визначити і через температуру, водночас необхідно врахувати рівняння стану ідеального газу $pV = \nu RT$, звідки, визначивши V замість V_2 і V_1 у рівнянні (2.46), одержимо, що $A = \nu R(T_2 - T_1)$ тоді, використовуючи основне рівняння або перший закон термодинаміки, можемо записати

$$\nu c_p (T_2 - T_1) = \nu c_v (T_2 - T_1) + \nu R(T_2 - T_1)$$

або

$$c_p = c_v + R. \quad (2.47)$$

Рівняння (2.47) відоме як рівняння Майєра.

З'ясуємо фізичний зміст універсальної газової сталої R . У цьому разі перший закон термодинаміки можна записати так: $\nu c_p dT = \nu c_v dT + dA$, тоді, зважаючи на рівняння Майєра, можемо записати, що $R = \frac{dA}{dT}$, тобто газова стала – це величина, яка дорівнює роботі, що виконує 1 моль ідеального газу під час ізобарного нагрівання на 1 К. На підставі зв'язку між числом Авогадро, сталою Больцмана і універсальною газовою сталою $K = \frac{R}{N_A}$ звідси випливає фізичний зміст сталої Больцмана: стала Больцмана чисельно дорівнює роботі, яку виконує 1 моль ідеального газу під час ізобарного нагрівання на 1^0 в розрахунку на одну молекулу.

Адіабатний процес – це процес, який відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем, тоді на підставі

$$dQ = dE + pdV, \quad (2.48)$$

можемо записати, що $dQ = -dE$, тобто під час адіабатичного

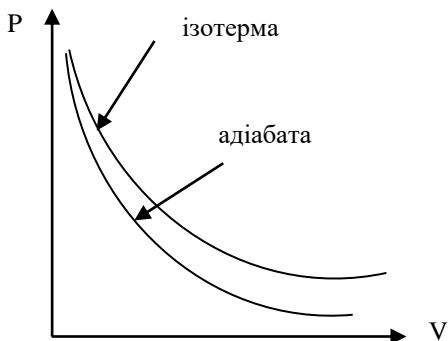


Рисунок 2.12 – Ізотермічний та адіабатний процес

процесу робота виконується лише завдяки зміні внутрішньої енергії. Можемо записати, що $\nu_{C_V} dT = -pdV$. Для цього в останнє рівняння замість dT підставимо його значення, використовуючи рівняння стану ідеального газу $pdV + Vdp = \nu pdT$,

$dT = \frac{pdV + Vdp}{\nu R}$, $V_C \frac{pdV + Vdp}{\nu R} + pdV = 0$. Зважаючи на рівняння Майєра і розділивши змінні після інтегрування, одержимо

$$pV^\gamma = const, \quad (2.49)$$

де $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показник адіабати.

(2.49) відоме як рівняння Пуассона. Загалом показник адіабати $\gamma = \frac{i+2}{i}$, де i – число ступенів вільності. Графічно адіабатичний процес можна зобразити у вигляді: адіабата йде крутіше щодо ізотерми. Роботу в адіабатному процесі можна знайти на підставі першого закону термодинаміки, тобто $A = \nu_{C_V}(T_2 - T_1)$, але під час адіабатного процесу не завжди відомі початкова і кінцева температури, ці температури можна знайти, користуючись рівнянням стану

ідеального газу для двох довільних станів. Зважаючи на цей факт, після перетворень одержимо $A = \frac{c_V}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$. Крім того, роботу можна визначити й іншим способом, комбінуючи співвідношення між параметрами p , V , T .

Політропний процес – це процес, у якому можуть змінюватися всі параметри, за винятком теплоємності, тоді основний закон термодинаміки можна записати у вигляді $v_{c_n} dT = v_{c_V} dT + dA$, де c_n – молярна теплоємність у політропічному процесі; виключивши з нього диференціал температури, як і в адіабатному процесі, після низки перетворень отримаємо рівняння політропічного процесу $pV^n = \text{const}$, де n – показник політропи, який дорівнює $n = \frac{c_n - c_p}{c_n - c_V}$ – це основне рівняння політропічного процесу, найзагальніший процес, з якого можна одержати всі раніше розглянуті процеси.

2.6 Другий закон термодинаміки

2.6.1 Постулати другого закону термодинаміки

Перший закон термодинаміки описує лише кількісну сторону процесів і не вказує на напрямок протікання цих процесів, а тому необхідно доповнити його законом чи постулатами, які б вказували на напрямок протікання цих процесів. Другий закон термодинаміки був сформульований у вигляді кількох постулатів, які еквівалентні між собою і є узагальненням багатовікового досвіду людей, найбільш відомі з них постулати Клаузіуса і Томсона. Постулат Клаузіуса стверджує, що неможливий самовільний перехід тепла від холодного тіла до більш нагрітого без змін у навколишньому середовищі. Постулат

Томсона: неможливий коловий процес, єдиним результатом якого був би вибір теплоти від деякого теплового резервуару і повне перетворення її на роботу, іноді його формулюють так: **вічний двигун другого роду неможливий; вічний двигун другого роду – це періодично діюча машина, яка завдяки теплу деякого нагрівача виконує роботу без передавання частини тепла холодильнику.** Формулювання другого закону термодинаміки зв'язано із Саді Карно, який довів, що найбільш економічним тепловим двигуном є двигун, у якому використовується цикл із двох ізотерм і двох адіабат, цей цикл називається циклом Карно.

У pV -координатах цикл Карно можна зобразити так: завдання буде полягати в тому, щоб знайти коефіцієнт корисної дії (ККД) такого циклу. Робочим тілом у циклі Карно є ідеальний газ, будемо вважати, що ми маємо механізм, який може здійснити такий цикл. Таким механізмом може бути теплоізолювана система у вигляді ізолюваного циліндра, усередині якого розташований поршень, що може рухатися без тертя в циліндрі, наприклад, шприц. На (рис. 2.13) 1, 2 – ізотерма; 2, 3 – адіабата; 3, 4 – ізотерма; 4, 1 – адіабата. Точка 1 характеризується параметрами $p_1V_1T_1$. Очевидно, на ділянці 1, 2 система (робоче тіло) отримує кількість теплоти Q_1 , одержану від нагрівника, на ділянці 3, 4 виконується робота, робоче тіло, водночас холодильнику передається кількість теплоти Q_2 .

Оскільки система повернулася в початкове положення, то внутрішня енергія не змінилася, і відповідно до першого закону термодинаміки робота за цикл буде дорівнювати $A = Q_1 - Q_2$.

ККД можна записати у вигляді $\eta = \frac{A}{Q_1}$, підраховуючи загальну роботу як суму робіт на кожній ділянці, матимемо $A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$, $A_{23} = \nu_{cV}(T_1 - T_2)$, $A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$, $A_{41} = \nu_{cV}(T_2 - T_1)$, зважаючи, що $A_{12} = Q_1$, для ККД матимемо

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{21} + A_{34} + A_{41}}{Q_1} = \frac{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (2.50)$$

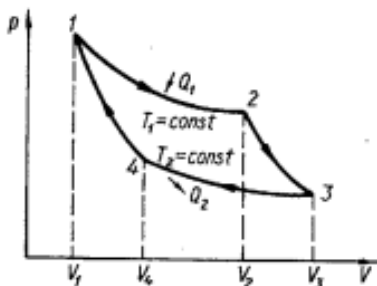


Рисунок 2.13 – Цикл Карно

Записавши рівняння адіабат у TV -координатах матимемо $T_2 V_2^{1-\gamma} = T_1 V_1^{1-\gamma}$, $T_2 V_3^{1-\gamma} = T_1 V_4^{1-\gamma}$, розділивши почленно ці рівняння, матимемо, що $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$, підставивши у (2.50), одержимо, що ККД буде дорівнювати

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (2.51)$$

із цього виразу бачимо, що ККД буде максимальним, якщо $T_1 - T_2$ буде максимальною. ККД буде дорівнювати 100 % за умови $T_2 = 0$, але абсолютний нуль температур недосяжний, реально діючі теплові машини мають ККД менше ніж 30 %, це зв'язано з тим, що в ідеальному вигляді оборотний цикл Карно нездійснений. Рівняння (2.51) є

частинним випадком рівняння $\eta = \frac{A}{Q}$, отже, аналізуючи роботу циклу Карно, можемо відзначити, що в цьому циклі відбуваються такі процеси: від нагрівача відбирається кількість теплоти Q_1 , холодильнику передається Q_2 , унаслідок різниці тепла виконується механічна робота, оскільки ідеальний газ або інше робоче тіло повертається в початковий стан, то внутрішня енергія не змінюється. Це означає, що коефіцієнт корисної дії не залежить від робочого тіла.

2.6.2 Аналітичне формулювання другого закону термодинаміки для оборотних процесів

Оборотні – це процеси, які можуть відбуватися у зворотному напрямку. Отже, у навколишньому середовищі жодних змін не відбувається, але ми вже відзначили, що ККД оборотного циклу Карно не залежить від роду робочого тіла, а визначається лише температурою нагрівача і холодильника. Загалом для оборотного циклу Карно можна записати $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, зважаючи, що знаки протилежні

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (2.52)$$

тобто можна стверджувати, що відношення кількості теплоти до температури, за якої теплота одержана, називається зведеною теплотою, і сума зведених теплот у циклі Карно дорівнює нулю.

Розглянемо довільний оборотний цикл, який у pV -координатах можна зобразити так: розіб'ємо цей цикл нескінченною кількістю адиабат й ізотерм. Тобто весь загальний цикл міститиме в собі нескінченну кількість

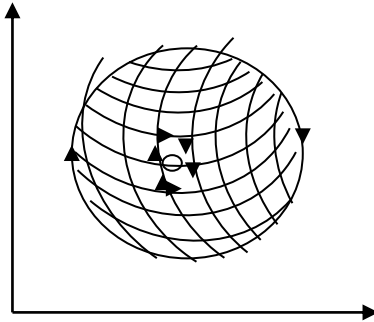


Рисунок 2.14 –
Циклічний процес

циклів Карно. Будемо вважати, що всі елементарні цикли, як і основний, відбуваються в одному напрямку (наприклад за годинниковою стрілкою). Для цих циклів справедливим буде твердження, що сума зведених теплот дорівнює нулю. Якщо розглядати суміжні цикли, додаючи всі цикли,

можемо записати, що $\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q}{T} = 0$, тобто бачимо, що в граничному випадку сума зведених теплот буде визначатися основним випадком циклу, тоді ми можемо записати

$$\sum \frac{dQ}{T} = \oint_l \frac{dQ}{T} = 0. \quad (2.53)$$

Інтеграл (2.53) відомий у літературі як інтеграл Клаузіуса – криволінійний інтеграл вздовж деякої замкнутої лінії l . Якщо такий інтеграл дорівнює нулю, то це означає, що підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, ця функція називається ентропією

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (2.54)$$

де dS – ентропія, звідки випливає, що ентропія, як і внутрішня енергія, є функцією стану, у цьому легко переконатися, розглядаючи будь-який коловий процес.

Як бачимо із (2.54), ентропія може бути визначена з точністю до деякої константи, тобто $S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_0$, де константу S_0 у межах першого і другого начала термодинаміки визначити неможливо, але в багатьох випадках нас цікавить не ентропія, а зміна ентропії $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, значення S_0 в цьому разі нас не цікавить і на підставі останнього рівняння ми бачимо, що ентропія може як збільшуватись, так і зменшуватися. Якщо тіло отримає теплоту, то ентропія зростає, якщо віддає – то зменшується, для нескінченно малої кількості теплоти

$$dQ = TdS, \quad (2.55)$$

з виразів для ентропії випливає, що під час усіх адіабатних квазістатичних процесів ентропія залишається сталою, а тому адіабатичні процеси називають ізоентропічними ($dQ = 0$, тоді $dS = 0$, тоді $S = const$). З означення ентропії бачимо, що розмірність ентропії збігається з розмірністю теплоємності. На підставі означення ентропії можемо стверджувати, що всяка термодинамічна система має адитивну функцію стану – ентропію. Оборотні процеси в ізольованій системі відбуваються без зміни ентропії. Оборотні процеси – це ідеалізовані процеси, які тією чи іншою мірою відображають закономірності, що можуть відобразитися реально, але використання таких процесів дає можливість описати реальні.

2.6.3 Основне рівняння термодинаміки для оборотних процесів. Розрахунок зміни ентропії за оборотних процесів

Перший закон термодинаміки ми записали у вигляді $dQ = dE + dA$. На підставі означення ентропії це рівняння можна записати у вигляді

$$TdS = dE + pdV. \quad (2.56)$$

Це рівняння є найфундаментальнішим співвідношенням для оборотних процесів, яке пов'язує між собою основні термодинамічні параметри p, V, T, E, S . І це рівняння відоме як основна термодинамічна рівність для оборотних процесів (об'єднаний закон термодинаміки). На підставі основного рівняння термодинаміки можемо записати для оборотних процесів

$$dS = \frac{1}{T}(dE + pdV). \quad (2.57)$$

Зміну ентропії як функцію вказаних параметрів можна знайти за допомогою інтегрування рівняння (2.51), але для цього ми повинні знайти явний вигляд залежності енергії від температури й об'єму (калориметричне рівняння) і термічне рівняння (залежність тиску й об'єму). Для найпростіших систем ідеального газу такі залежності є відносними

$pV = \nu RT$ (термічне), $dE = \nu C_V dT$ (калориметричне), тоді, зважаючи на цю залежність і підставляючи у (2.57), одержимо: $\int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{1}{T}(dE + pdV)$, $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\nu C_V dT}{T} + \int_1^2 \frac{pdV}{T}$. Підставляючи замість p його значення з рівняння стану ідеального газу, $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\nu C_V dT}{T}$,

$S_2 - S_1 = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$. На підставі рівняння стану ідеального газу аналогічні вирази можна отримати через координати Tr і pV . Якщо знаходити певне значення ентропії, то, як уже зазначалося, вони можуть бути знайдені з точністю до деякої константи S_0 , яку в межах першого і другого начал термодинаміки визначити неможливо.

2.6.4 Аналітичне формулювання другого закону термодинаміки для необоротних процесів

За умови необоротних процесів кожний новий стан буде необоротним, тобто процеси в системі будуть протікати так, що в кожному новому стані параметри стабілізуватися не можуть, тобто процес відбувається досить швидко. Якщо хоча б якась частина була нерівноважною, то весь процес буде нерівноважним. Нерівноважні процеси не допускають протікання у зворотному напрямку без зміни в навколишньому середовищі, водночас передавання теплоти від одного тіла до іншого і виконання роботи буде відмінним від оборотних процесів, цей факт зафіксований у другій теоремі Карно, яка формулюється так: **коефіцієнт корисної дії оборотного циклу Карно завжди більший за коефіцієнт корисної дії, який відбувається з тим самим холодильником і тим самим нагрівником**. Отже, у циклі є необоротні процеси, це обов'язково призводить до того, що корисна робота буде зменшуватися. З теореми Карно можна записати $\frac{T_1 - T_2}{T_1} > \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, де Q_1 – кількість теплоти, одержана робочим тілом у будь-якому циклі за температури T_1 , Q_2 – теплота передана холодильнику за температури T_2 . Зважаючи на відповідні перетворення, можна записати $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$ або загалом для оборотних і необоротних процесів інтегралом за замкнутим контуром

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad (2.58)$$

Тобто інтеграл Клаузіуса завжди або менший, або дорівнює нулю, але не може бути більший за нуль (2.58), є загальним математичним формулюванням закону термодинаміки.

Розглянемо в pV -координатах деякий циклічний процес. Будемо вважати, що одна є оборотним процесом, а інша – необоротним, тобто загалом цей процес є необоротним. Тоді на підставі нерівності Клаузіуса (2.58) запишемо:

$$\oint_L \frac{dQ}{T} = \int_{1 \text{ необ.пр}}^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} < 0, \\ \int_{1 \text{ необор.}}^2 \frac{dQ}{T} < \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \text{ у правій частині маємо зміну ентропії в оборотному процесі}$$

$$S_2 - S_1 > \int_{1 \text{ необор.}}^2 \frac{dQ}{T}. \quad (2.59)$$

Вираз (2.59) можна трактувати як аналітичне формулювання другого закону термодинаміки для необоротних процесів. З нього випливає, що **в адіабатичній ізольованій системі необоротні процеси відбуваються в напрямку зростання ентропії**. Загалом другий закон термодинаміки можна записати так: $dS \geq \frac{dQ}{T}$, де знак « \geq » належить до рівноважних (квазістатичних) процесів, знак « $>$ » – нерівноважних.

Якщо записати об'єднаний (I і II закон) для оборотних і необоротних, то матимемо

$$TdS \geq dE + dA, \quad (2.60)$$

(2.60) можна записати у вигляді

$$dA \leq TdS - dE. \quad (2.61)$$

Якщо $t = const$, то (2.61) можна записати у вигляді

$$dAt - d(E - TS), \quad (2.62)$$

де величина

$$E = F - TS \quad (2.63)$$

називається вільною енергією. Як можна бачити, вільна енергія виражається через адитивні сталі внутрішньої енергії E та ентропії S , а тому теж є адитивною функцією і є важливою характеристикою термодинамічних систем. За ізотермічного рівноважного процесу з рівняння (2.61) робота виконується завдяки вільній енергії $dA = -dF$, за нерівноважного $dA < -dF$, тоді внутрішню енергію можна подати у вигляді кількох доданків $E = F + TS$, тобто як суму вільної енергії F , завдяки якій виконується робота в ізотермічних рівноважних процесах, і величини TS , яку часто називають зв'язаною енергією.

Зв'язана енергія – це частина внутрішньої енергії, яка може бути перетворена на роботу. Отже, внутрішню енергію можна виражати через адитивні функції, з якими вона зв'язана. Аналізуючи (2.61), можемо стверджувати, що в ізольованій системі вільна енергія зменшується, а тому здатність виконувати роботу зменшується. Проте в усякій системі можливе відхилення від стану рівноваги, такі відхилення називаються *флуктуаціями*. Оскільки термодинаміка використовує статистичні методи, то з погляду статистичної фізики найбільш імовірними для необоротних процесів є процеси із зростанням ентропії.

2.6.5 Третій закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки забороняє протікання процесів, за яких порушується баланс енергії, тобто є основним законом збереження і перетворення енергії. Другий закон стверджує, що існує деяка функція стану (ентропія), зміна якої вказує на напрямок протікання процесів, і ця функція може бути визначена до деякої константи $S = \int \frac{dQ}{T} + S_0$. Перший і другий закони термодинаміки не дають змоги визначити цю константу, а тому виникла необхідність доповнити законом чи аксіомою, який дав можливість визначити цю константу. Цим питанням займався Нернст, який сформулював третій закон термодинаміки: *У міру наближення температури будь-якої рівноважної системи до абсолютного нуля ентропія перестає залежати від зовнішніх параметрів і наближається до деякого граничного значення, однакового для всіх систем.* За пропозицією Планка це значення було взяте за початок відліку ентропії $S_0 = S_{T=0} = 0$. З цього випливало, що ентропія в будь-якому іншому стані буде визначатися $S = \int_0^T \frac{dQ}{T}$. Для того, щоб розрахувати ентропію в будь-якому процесі, необхідно знати залежність кількості теплоти від температури і необхідно знати вид процесу. З третього закону термодинаміки випливають два важливих наслідки: 1) *абсолютний нуль температур недосяжний.* Це твердження відоме як третій закон термодинаміки. Значення його менше, ніж першого і другого, але цей закон більш важливий під час описування явищ за низьких температур; 2) *поблизу абсолютного нуля частинні похідні термодинамічних функцій (внутрішньої енергії, вільної енергії) прямують до нуля.*

2.7 Реальні гази

2.7.1 Рівняння Ван-дер-Ваальса

Дотепер були розглянуті газові закони й основи МКТ для ідеальних газів. Було сформульоване рівняння стану ідеального газу як результат експериментальних досліджень. Закони були сформульовані у XVIII ст., де розвиток експериментальної техніки був невисоким, експериментальні прилади не давали вимірювати досить низькі температури і високі тиски. Була введена модель ідеального газу, на основі якого була пояснена поведінка ідеального газу. Очевидно, властивості реальних газів є суто індивідуальними. Розглядаючи ідеальні гази, ми вказували інтервали, у яких можна застосовувати газові закони. Для того, щоб встановити рівняння, яке б описувало поведінку реальних газів у більш широкому діапазоні температури і тисків, очевидно, необхідно врахувати розміри і взаємодію молекул. Як відомо, взаємодія молекул полягає в їхньому взаємному притяганні та відштовхуванні залежно від відстані між ними, а також від концентрації в певному об'ємі, що зумовлює додатковий тиск. Різними вченими свого часу були запропоновані більше ніж 20 рівнянь, які враховують ці чинники, що були встановлені емпіричним способом. Найбільш відомим є рівняння Ван-дер-Ваальса

$$pV = \nu RT, \quad (2.64)$$

$$\left(p + \nu^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT. \quad (2.65)$$

Це рівняння є найбільш вживаним і практично реально описує поведінку реальних газів. Воно дає можливість якісного пояснення великої кількості явищ, які спостерігаються не тільки в газах, а й у рідинах.

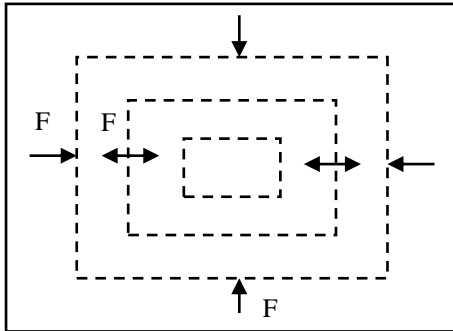
Рівняння (2.65) можна отримати за допомогою узагальнення рівняння (2.64), на підставі поправок на сили відштовхування. Дія сил відштовхування, очевидно, може бути врахована введеним у розгляд власним об'ємом молекул. Очевидно, кожна молекула реально має об'єм $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ і своїм власним об'ємом обмежує рух інших. Очевидно, чим більший об'єм матиме молекула, тим частіше зазнаватимуть зіткнень одна з одною. Унаслідок цього буде зростати тиск газу порівняно з початковим. У зв'язку з цим необхідно в рівнянні (2.64) ввести поправку на весь об'єм молекул, тобто записати його у вигляді $p(V - V_0) = \nu RT$, де V_0 – це частина об'єму посудини, недоступна для руху всіх молекул газу. Для визначення V_0 будемо вважати, що в посудині є дві молекули однакового діаметра d . Водночас у зв'язку з діями сил відштовхування її центр не зможе проникнути більше, ніж ефективний діаметр. Об'єм сфери взаємодії можна записати у вигляді $V = \frac{4}{3} \pi d^3 = 8 \frac{4}{3} \pi r^3$. Тобто цей об'єм буде у вісім разів перевищувати власний об'єм однієї молекули. Оскільки ми розглядаємо взаємодію двох молекул, то для першої недосяжним є об'єм, який у чотири рази перевищує власний об'єм молекули. Якщо вважати, що в посудині міститься ν молів газу, то можемо записати $V_0 = \nu N_A 4 \left(\frac{4}{3} \pi r^3\right)$. Якщо ввести величину $b = 4 N_A \left(\frac{4}{3} \pi r^3\right)$, то рівняння (2.64) можна записати у вигляді

$$p(V - \nu b) = \nu RT. \quad (2.66)$$

Поправка b у рівнянні (2.66) є приблизно сталою для кожного газу, її визначають експериментально, враховує сили відштовхування в реальному газі. Крім цього, у рівнянні (2.65) необхідно врахувати сили відштовхування.

Із збільшенням відстані між молекулами ці сили зменшуються і на певній відстані ($3...4d$) їх можна не враховувати.

Розглянемо реальний газ у деякій посудині, її будемо вважати кубічною. Умовно розіб'ємо весь об'єм на



прошарки товщиною ($3...4d$). У перерізі це можна зобразити так. Сили, які діють на внутрішні прошарки з боку своїх сусідів, будуть врівноважені і сили, які діють на молекули поверхневого

Рисунок 2.15 – Сили, які діють на внутрішні прошарки газу

шару, будуть спрямовані всередину посудини. Ці сили будуть спричинювати

внутрішній тиск газу, тому в рівняння (2.64) потрібно внести поправку на внутрішній тиск, зумовлений силами притягання. З урахуванням сил притягання

$$(p + p_v)(V - v_v) = \nu RT, \quad (2.67)$$

у цьому рівнянні невідомий явний вигляд внутрішнього тиску, його можна знаходити з таких міркувань: кожна молекула, що міститься в поверхневому шарі, буде зазнавати сил притягання, очевидно, зважаючи на кількість молекул, можемо стверджувати, що їхнє число пропорційне концентрації молекул поверхневого шару. У стані рівноваги концентрація всіх прошарків буде однаковою, а отже, внутрішній тиск буде пропорційний квадрату концентрації. Увівши коефіцієнт концентрації, можемо записати $p_v =$

$= cn^2$, де c – коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей газу. Зважаючи на означення концентрації, внутрішній тиск $p_v = c \frac{N^2}{V^2}$ або на підставі означення кількості молів – $p_v = \frac{c}{V^2} v^2 N_A^2 = \frac{v^2}{V^2} a$, де $a = c N_A^2$, є сталою величиною, яка залежить від властивостей газу і відома як поправка Ван-дер-Ваальса на сили притягання, тоді рівняння (2.67) можна записати у вигляді

$$\left(p + v^2 \frac{a}{V^2}\right) (V - v_b) = vRT. \quad (2.68)$$

Це рівняння було отримане Ван-дер-Ваальсом емпіричним способом, у нього входять, крім константи R , сталі величини a і b , які характеризують властивості реальних газів, a – залежить від сили притягання, b – відштовхування. За малого тиску і великому об'єму рівняння (2.68) переходить в рівняння стану ідеального газу. Під час виведення рівняння Ван-дер-Ваальса ми не враховували вплив температури на взаємодію між молекулами, а тому це рівняння можна вважати лише наближеним, хоча є точнішим, ніж рівняння стану ідеального газу.

2.7.2 Ізотерми Ван-дер-Ваальса

Найбільш повні якісні результати з рівняння Ван-дер-Ваальса можна дістати за допомогою аналізу його ізотерм, побудованих за формулою (2.68). Домножимо рівняння (2.68) на V_M^2 і після розкриття дужок для довільних температур T дістанемо

$$pV_M^3 - (bp + RT) V_M^2 + aV_M - ab = 0. \quad (2.69)$$

Рівняння (2.69) кубічне щодо молярного об'єму V_M . Це означає, що за заданих p і T об'єм V_M може набувати трьох

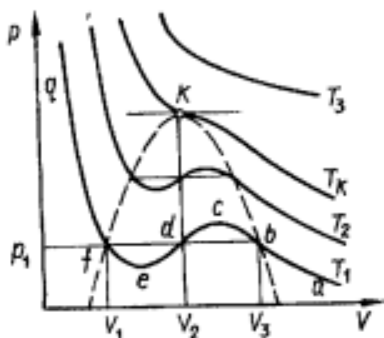


Рисунок 2.16 – Ізотерми для різних температур

різних значень. Коефіцієнти при V_M у рівнянні (2.69) дійсні, і, отже, це рівняння у розв'язку може мати або всі три корені дійсні і різні, або один дійсний, а два уявні. В окремому випадку може статися, що всі дійсні корені виявляються рівними між собою. Це особливий стан речовини, і він буде проаналізований нижче. Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса зобразимо на діаграмі стану речовини в координатах p, V (рис. 2.16). Характерним на цьому рисунку є те, що за досить високих температур (для всіх ізоterm вище за точку K довільна ізобара $p = \text{const}$ перетинає ізоtermу в одній точці, і цій точці відповідає одне значення об'єму, що є дійсним коренем розв'язку рівняння (2.69). Усі ізоtermи в цій частині діаграми мають вигляд монотонно спадаючих із ростом об'єму V гіпербол (наприклад, $T_3 = \text{const}$). Для ізоterm за нижчих, ніж у точці K , температур довільній ізобарі $p = \text{const}$ відповідає три значення об'єму V_1, V_2, V_3 (наприклад, на рисунку 2.16 для ізоtermи $T_1 = \text{const}$). Ізобара $p_1 = \text{const}$ перетинає ізоtermу в трьох точках b, d, f , і на цій ділянці ізоtermа має хвилясту форму. Для одного моля речовини її стан у точці b такий, що відповідає найбільшому об'єму з трьох зазначених, тобто $V = V_3$. Відповідно за цього об'єму речовина має найменшу густину. Тому природно прийняти, що це газоподібний стан речовини. Стан речовини у точці f

відповідає найменшому її об'єму $V = V_1$, і фактично за умови дальшого стиснення об'єм зовсім мало змінюється, а тиск різко зростає. Це властиво рідкому стану речовини. Тому можна стверджувати, що об'єм V_1 відповідає речовині в рідкому стані.

Отже, загальний аналіз ізотерм на рисунку 2.16 приводить до висновку, що рівняння Ван-дер-Ваальса описує не тільки газоподібний стан реального газу, а й перехід його від газоподібного стану до рідкого. Це надзвичайно важливий якісний результат рівняння Ван-дер-Ваальса, підтверджений експериментально.

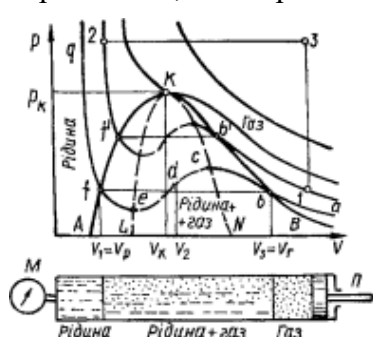


Рисунок 2.17 – Критичний стан речовини

Фізика явищ, що пов'язані з поведінкою реальних газів, і поняття критичного стану речовини, найкраще можуть бути встановлені і проаналізовані за допомогою порівняння теоретичних ізотерм газу Ван-дер-Ваальса з відповідними експериментальними ізотермами.

Якщо стискувати достатньо розріджений газ, наприклад за сталої температури $T_i < T_k$, фіксуючи одночасно зміну тиску залежно від зміни об'єму, то на p - V -діаграмі зображувальна точка $p = f(V)$ буде переміщуватися вздовж ізотерми, яку називають експериментальною. На рисунку 2.17 під p - V -діаграмою зображено прозору трубку з реальним газом. Стиснення газу проводять за допомогою поршня P , а тиск вимірюють манометром M . Вихідний стан газу зображений точкою a . На ділянці ізотерми ab залежність тиску від об'єму

відповідає, в будь-якому разі якісно, закону Бойля – Маріотта. Отже, реальний газ поводить себе на цій ділянці як ідеальний. Починаючи з певної точки b , тиск у системі перестає підвищуватись, і крізь прозору стінку трубки починають спостерігатися крапельні рідини: однофазна система поділяється на дві співіснуючі в рівновазі фази – газоподібну і рідку. Ізотермічне стиснення двофазної системи проходить за сталого тиску, і ділянка експериментальної ізотерми зображується прямою лінією bf , паралельною осі абсцис. На ділянці стиснення bf густина речовини в газоподібному і рідкому станах не змінюється. У процесі стиснення маса речовини в газоподібному стані увесь час зменшується, в рідкому – збільшується, і в точці f досліджувана речовина повністю переходить у рідкий стан. Частина кривої fq фіксує різке збільшення тиску за умови незначного зменшення об'єму речовини, що є характерним для рідкого стану (мала стисливість рідин).

Можна проводити обернений процес ізотермічного розширення. Якщо за вихідний стан речовини взяти рідкий за відповідних значень p і V , то внаслідок ізотермічного збільшення об'єму тиск буде спадати, і зображувальна точка опише лінію qf . За подальшого ізотермічного розширення з'являється газоподібна фаза речовини і розширення двофазної системи проходитиме за умови сталого тиску (горизонтальна лінія fb). У точці b вся речовина переходить у газоподібний стан, і подальше розширення йде по лінії ba , хід якої практично відповідає ходу теоретично розрахованої ізотерми газу Ван-дер-Ваальса. Отже, експериментальні і теоретичні ізотерми газу Ван-дер-Ваальса збігаються лише на ділянках ізотерми qf та ba , які відповідають однорідним станам речовини (відповідно рідкій і газоподібній).

Якщо створити спеціальні умови, то можуть бути дослідно відтворені також стани речовини, зображені на теоретичних ізотермах ділянками bc та ef . Газоподібні стани речовини на ділянці ізотерми bc називають пересиченою парою (вони можуть бути реалізовані, якщо немає центрів конденсації), а рідкі стани на ділянці ef – перегрітою рідиною. Ці стани речовини нестабільні, вони легко руйнуються і переходять, відповідно, у конденсований (рідкий) та газоподібний стани, їх називають ще метастабільними станами.

Штрихова ділянка ізотерми cde відповідає абсолютно нестійкому стану речовини, який дослідно не може бути реалізований. Цей стан повинен характеризуватися зовсім незвичайними властивостями: зменшення об'єму повинно супроводжуватися також зменшенням тиску, чого в природі з речовинами в довільному стані не буває.

На рисунку 2.17 суцільна крива AKB , що сполучає горизонтальні ділянки експериментальних ізотерм, називається бінодаллю. Область площини p - V -діаграми, обмежена бінодаллю і ізобарою $p = 0$, відповідає двофазним станам речовини. У цій області речовина перебуває в рівновазі у вигляді рідини та її насиченої пари. Область над бінодаллю відповідає однофазним станам речовини. У цих областях кожна точка відповідає стану фізично однорідної (гомогенної) речовини.

Лінія, що виділяє на p - V -діаграмі область нестабільних станів речовини, тобто сполучає точки мінімумів і максимумів теоретичних ізотерм Ван-дер-Ваальса та проходить через критичну точку, називається спінодаллю (штрихова лінія LKN).

Аналізуючи стан речовини (рис. 2.17), можна зробити ще один важливий висновок. Розглянемо стан газу, який зображений точкою 1 за температури, нижчої від критичної.

Стискаючись ізотермічно, газ у точці b' почне конденсуватися, і перетворення речовини з газоподібного стану в рідкий закінчиться у точці f' . Подальше стиснення по ізотермі $f' 2$ не змінює фазового стану речовини, вона залишається у рідкому стані. Можна інакше перейти від стану 1 у стан 2. Для цього газ нагрівають за сталого об'єму так, щоб його температура і тиск стали більшими від критичних значень (лінія 1–3). Потім ізобарно охолоджують газ до температури, нижчої за критичну (лінія 3–2). Так речовина переводиться із газоподібного стану 1 у рідкий стан 2. Важливо, що за такого переходу речовина весь час залишається фізично однорідною, її властивості змінюються неперервно, точок фазових переходів немає. Отже, якщо крива переходу з одного однофазного стану в інший однофазний стан обминає область, обмежену бінодаллю (двофазну область), то жодних стрибкоподібних фазових перетворень речовини з газоподібного стану в рідкий або навпаки спостерігатись не буде, речовина весь час буде гомогенною. Одночасно відбуваються лише кількісні зміни, а не якісні. У цьому разі можна зазначити про неперервність рідкого і газоподібного станів речовини.

Отже, теорія Ван-дер-Ваальса за умови всієї її простоти якісно правильно описує поведінку речовини під час її перетворень із газоподібного стану в рідкий, і навпаки. Ця теорія вперше внесла ясність у розуміння таких перетворень. Однак потрібно зазначити, що явища, пов'язані з фазовими перетвореннями, далекі від повного фізичного розуміння їх. Повної фізичної теорії, яка описувала б кількісні і якісні зміни під час фазових перетворень речовини, немає.

2.7.3 Зведене рівняння Ван-дер-Ваальса

Ізотерми Ван-дер-Ваальса для різних газів за однакової температури різні й залежать від роду газу (поправки a і b), для ідеального газу ці ізотерми будуть однаковими, але і для неідеального газу можна записати рівняння, яке б не залежало від природи газу. Введемо такі позначення: $\frac{T}{T_k} =$

$$\theta, \frac{p}{p_k} = \pi, \frac{V}{V_k} = \omega, T_k = \frac{8a}{27Rb}, p_k = \frac{a}{27b^2}, V_k = 3b,$$

підставляючи ці значення в рівняння стану ідеального газу, одержимо

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = \frac{8}{3}\theta. \quad (2.70)$$

Це універсальне рівняння Ван-дер-Ваальса, до якого жодні параметри газу не входять, іноді його називають законом відповідних станів, який можна сформулювати так: якщо речовини мають два однакові параметри із трьох, то третій параметр буде теж однаковим.

2.8 Рідкий стан речовини

2.8.1 Загальна характеристика стану. Особливості поверхневого шару рідини

За звичайних умов ми можемо спостерігати речовину в газоподібному, рідкому і твердому станах, більшість речовин у природі перебувають у твердому стані, у разі підвищення температури можуть переходити в рідкий стан, за умови подальшого підвищення – у газоподібний.

З підвищенням температури збільшується відстань між молекулами. А тому за деякої температури властивість між рідиною та її насиченою парою зменшується і за критичної температури повністю зникає. Рідкий стан за температури,

яка вище, ніж критична, стає газоподібним, нижче ніж критична, двофазним із подальшим зниженням температури рідина може переходити у твердий стан.

У твердому стані розрізняють *кристалічні* й *аморфні* тіла, характерною ознакою аморфних тіл є те, що вони не мають сталої температури плавлення, а отже, і кристалізації. Для кристалічних тіл характерним є те, що під час плавлення або кристалізації протягом всього процесу температура буде сталою, отже, аморфні тіла можна розглядати як рідини, які охолоджені нижче, ніж температура переходу рідина – кристал, але які не закристалізувалися. Тобто рідини займають проміжний стан між газами і твердими тілами, дослідження рідин за допомогою рентгенівських променів дозволило встановити, що в рідинах є так званий ближній порядок, але відсутній дальній, характерний для твердих кристалічних тіл. Під час підвищення температури зростає плинність рідини і зменшується їхня в'язкість, наближаючись до в'язкості газу за температур, близьких до критичної, у разі охолодження – навпаки, тобто деякі рідини переходять у кристалічний, здебільшого аморфний стан. Відмінною рисою рідин від газів за температур, далеких від критичної, є наявність у рідини власного об'єму і певної густини. Як відомо, з підвищенням температури зростає середня енергія коливального руху, а отже, і амплітуда коливань, це призводить до збільшення середніх відстаней між молекулами, а отже, і амплітуди коливань, які впливають на сили притягання і сили відштовхування, такий характер руху молекули призводить до флуктуації певних фізичних величин (напрямок густини), аналогічно газам можна ввести термічний коефіцієнт розширення речовини

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}. \quad (2.71)$$

На відміну від газів, коефіцієнт від'ємного розширення рідини мало залежить від умов нагрівання, а тому відповідні індекси біля коефіцієнтів не ставлять, $V = V_0(1 + \beta t)$, де V_0 – об'єм рідини за температури 0°C і нормального атмосферного тиску.

2.8.2 Особливості поверхневого шару рідини

Якщо в деякій посудині міститься рідина, то над нею буде міститися певна кількість насиченої пари, якщо таку систему ізолювати, то буде існувати певне співвідношення між фізичними параметрами, які характеризують цю систему (раніше було відзначено, що на відстані $3...4d$ сили взаємодії відсутні), тому очевидно, будуть взаємодіяти молекули, розташовані на менших відстанях. У разі наближення молекул до поверхневого шару, очевидно, буде змінюватися характер взаємодії між молекулами, на дуже «малих» відстанях будуть сили відштовхування, на більших – притягання. Очевидно, що ці сили для кожного умовного шару рідини будуть різними. Поблизу поверхні рідини діятимуть сили, створюючи так зване поверхнєве силове поле розташоване в досить тонкому шарі, який становить декілька міжмолекулярних шарів, такі молекули мають збільшену потенціальну енергію.

Товщина поверхневого шару становить 10^{-7} см або 10^{-9} м, під час виходу молекул із середини рідини на поверхню їхня енергія зростає, причому такі зміни відбуваються в шарі 10^{-7} см, під час занурення рідини енергія зменшується. Внутрішня енергія рідини залежить не тільки від стану в заданому об'ємі, а й від умов на її

поверхні, у разі зміни форми рідини частина молекул може перейти як за межі рідини, так і всередині.

Молекули в поверхневому шарі рідини мають більшу енергію порівняно з їхньою енергією в об'ємі, а тому під час ізотермічного процесу на утворення кожної нової одиниці поверхні необхідно виконати певну роботу.

Фізична величина, що чисельно дорівнює роботі, яку необхідно виконати під час ізотермічного процесу, щоб збільшити на одиницю, називається *коефіцієнтом поверхневого натягу*, тобто

$$dA = -\sigma dS. \quad (2.72)$$

Знак « $-$ » вказує, що в разі збільшення енергії виконується від'ємна робота $[\sigma] = \text{дж/м}^2 = \text{Н/м}$. Коефіцієнту поверхневого натягу можна дати таке означення: це фізична величина, яка чисельно дорівнює зміні вільної енергії за ізотермічної зміни площі на одиницю. $dA = -dF$, dF – зміна вільної енергії (а не сила).

Одним із методів вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу є метод визначення коефіцієнта з відриву краплі. Суть методу полягає в такому: якщо візьмемо деяку вузьку трубку, у яку налита рідина, то в разі відриву краплі буде утворюватися деякий переріз. Записавши умови рівноваги краплі у момент відриву у вигляді $2\pi r\sigma = mg$, де r – радіус краплі в момент відриву, можна записати коефіцієнт поверхневого натягу.

В останньому рівнянні масу краплі вимірюють за допомогою зважування, а радіус краплі – вимірювальним мікроскопом. Коефіцієнт поверхневого натягу залежить від хімічного складу рідини, а також від домішок, які введені в дану рідину, зазвичай, ці домішки знижують коефіцієнт поверхневого натягу. Наприклад, добавка у воду поверхнево

активних речовин, мила та ін. набагато знижує коефіцієнт поверхневого натягу.

Розглянемо процес витікання краплини з циліндричної трубки невеликого розміру. Перед витіканням краплі утвориться шийка, r якої менший від r трубки. Вздовж цієї шийки по дотичній до поверхні виникають сили поверхневого натягу. У момент відриву краплі ці сили повинні бути зрівноважені із силою тяжіння, тоді $2\pi r\sigma = mg$, де m – маса краплі; σ – коефіцієнт натягу, r – радіус краплі в момент відриву. Поверхнева енергія рідини залежить не тільки від властивостей рідини, а й від середовища, з яким вона межує.

2.8.3 Тверде тіло

Тверді тіла мають низку властивостей, які відрізняють їх від рідин і газів. Варто зауважити, що аморфні тіла, які є твердими, за своїми властивостями ближчі до рідин (смоли, пластмаса, скло).

Термодинамічний стан твердого тіла, як рідини і газу, мабуть, визначається тими самими параметрами: об'ємом, тиском і температурою. Для ідеального і реального газу такими рівняннями є рівняння стану ідеального газу і рівняння Ван-дер-Ваальса. Зв'язок між вказаними параметрами p, V, T для твердого тіла точно встановити не можна, тобто універсального рівняння для твердого тіла не існує, проте існує зв'язок між окремими параметрами твердого тіла, як, наприклад, для об'єму $V = f(T)$.

Властивості твердого тіла зумовлені низкою особливостей, ці особливості відрізняють його від рідини і газу. Вони зумовлені тим, що у твердому тілі атоми розміщені не хаотично, а в певному порядку, причому таке розміщення характерне для всього кристалу, тобто існує так званий дальній порядок.

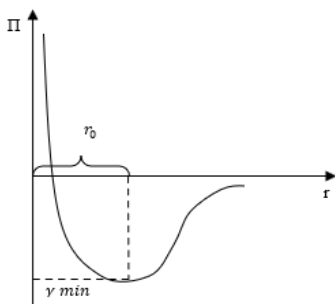


Рисунок 2.18 –
Залежність
потенціальної енергії

Для рідин і аморфних тіл характерний ближній порядок. Причиною переходу атомів до упорядкованого розміщення під час утворення твердого тіла, є сили взаємодії між атомами, оскільки під час охолодження атоми розміщуються в кристалі так, щоб їхня потенціальна енергія в кристалі була мінімальною, тобто конфігурація у кристалі і їхні взаємні відстані повинні бути такими, щоб сили

притягання і сили відштовхування дорівнювали одна одній. Якщо зобразити залежність потенціальної енергії від відстані, то матимемо таку криву (рис. 2.18), яка називається потенціальною.

Відстань r_0 на графіку відповідає випадку, коли сили притягання дорівнюють силам відштовхування, у цьому разі потенціальна енергія є мінімально можливою для даної системи. Тобто відзначають, що одночасно атом перебуває в потенціальній ямі. Оскільки в кристалах атоми розміщуються в правильному порядку, то одним із наслідків цього є неоднаковість властивостей у різних напрямках, це явище називається анізотропією. Це можна пояснити так: нехай маємо деяку кристалічну решітку, яку схематично зобразимо так (рис. 2.19).

З кожним атомом певним способом зв'язана деяка площина, яка проходить через один або кілька атомів. Можемо бачити, що в кристалі існують площини, по-різному заселені атомами, тобто кількість атомів на одиницю площі даної площини, саме цим і пояснюють анізотропію кристалів.

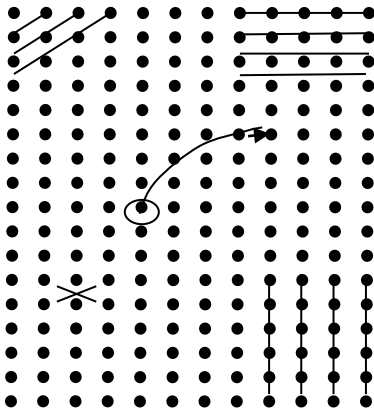


Рисунок 2.19 –
Будова кристалу

Для ідеального кристалу характерна повна впорядкованість атомів, але дослідни доводять, що всякий реальний кристал має відхилення від правильності розташування атомів, очевидно, це зв'язано насамперед з тепловим рухом атомів, лише за температури 0°C , мабуть, можна розглядати ідеальний кристал. Відхилення від правильності розташування атомів називається дефектами, їх поділяють на низку типів:

1) дефекти тепла Шоткі – полягають у тому, що деякі вузли ґратки, у яких повинні бути атоми, не зайняті; очевидно, утворення таких вакансій спричиняють зміщення сусідніх атомів від їхнього нормального положення, і це призводить до значного порушення правильності будови ґратки в районі вакансій; 2) дефекти за Френкелем – вони виникають тоді, коли якась частина залишає своє місце у вузлі ґратки і розміщується між вузлами в оточенні атомів цієї самої ґратки, у цьому разі утворюється зразу два дефекти; 3) полягає в тому, що деякі місця в решітці можуть бути зайняті сторонніми атомами, що утворюють невелику домішку в даній речовині. Такі домішки іноді є корисними і характерні для напівпровідників; 4) досить важливим видом дефектів є дефект дислокації, він полягає в тому, що в деякій частині кристалу виникає додаткова площина або зникає частина площини, а точніше –

напівплощини. Існують крайові, гвинтові й інші види дислокацій, причому число дислокацій у кристалах досить велике.

Розглянемо механічні властивості твердих тіл. Механічними властивостями називаються такі властивості твердих тіл, якими визначається здатність змінювати свою форму (деформуватись) під дією зовнішніх механічних сил. Деформація твердого тіла є результатом взаємного розміщення частинок і взаємодією між ними. Розрізняють пружну і пластичну деформації. Деформація називається пружною, якщо вона зникає після припинення дії сили.

2.8.4 Пружні деформації

Пружні деформації – це такі деформації, за яких деформоване тіло повертається в початковий стан без зміни форми та об'єму тіла. Пружні деформації можна пояснити зміною взаємного розміщення частинок і зміною відстані між ними. Співвідношення між силами, які спричинили пружну деформацію, і величиною деформації визначається законом Гука, який формулюється так: **деформація пропорційна деформуючій силі**. Для того, щоб сформулювати цей закон у кількісному вигляді, необхідно знати з фізичного погляду, якими величинами характеризують деформації. Досліди доводять, що деформація визначається не силою прикладання до тіла, а відношенням сили до площини поперечного перерізу поверхні, до якої прикладена сила $\frac{F}{S} = p$ – напруга, вимірюється в одиницях тиску. Розглядаючи деформації, під словом деформуюча сила в законі Гука вважатиметься напругу. Існують різні деформації залежно від того, як прикладена деформуюча сила, тому вони можуть описуватися різними рівняннями, в основі яких лежить

закон Гука. Закон Гука виконується лише в межах пружних деформацій: зсуву, стиснення, кручення, розтягу. Якщо деформацію за величиною характеризувати ε , то закон Гука для різних деформацій можна записати $\frac{p}{\varepsilon} = \text{const}$ – модуль відповідного виду деформацій – термін, запропонований Юнгом. Деформація може виникати у твердому тілі під дією напруг, а отже, сил, прикладених до тіла. Як відомо, будь-яку силу можна розкласти на дві взаємно перпендикулярних складових. Перша з цих сил створює деформацію розтягу або стиснення. Друга – деформацію зсуву. Якщо розглядати видовження деякого зразка, то, очевидно, одночасно будуть змінюватися як лінійні, так і поперечні розміри.

Якщо вважати, що зміна лінійних розмірів (видовження) – Δl , а початкова довжина l , то величина $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ називається відносним видовженням зразка, тоді можемо записати

$$\frac{p}{\frac{\Delta l}{l}} = E, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}. \quad (2.73)$$

Величина E називається модулем Юнга (пружності) і є однією з основних характеристик пружних властивостей твердого тіла, ця величина таблична для кожного з матеріалів. Модуль Юнга має розмірність тиску. Іноді модуль Юнга визначають як величину, що чисельно дорівнює напрузі за відносної деформації, яка дорівнює 1. Якщо $\frac{\Delta l}{l} = 1 \Rightarrow p = E$, це означає, що довжина зразка збільшилася вдвічі, що можливо лише для кількох матеріалів. За зміни лінійних розмірів змінюються і поперечні розміри, очевидно, між ними повинен існувати певний зв'язок, якщо поперечні розміри позначити r , а

їхню зміну Δr , і, зважаючи на зміну лінійних розмірів $\frac{\Delta r}{r} = \mu$, ця величина, що дорівнює відношенню поперечного і повздовжнього перерізів, називається сталою Пуассона. Тобто між модулем Юнга і коефіцієнтом Пуассона існує певний зв'язок, такий самий зв'язок існує між коефіцієнтами інших видів деформації, але всі види можна розглядати як суперпозицію деформацій розтягу і зсуву.

2.8.5 Перехід у твердий стан

Установленню ідеального порядку в розміщенні атомів перешкоджають теплові рухи, а тому для того, щоб речовина була у твердому стані, температура повинна бути досить низькою. Тобто, щоб енергія теплового руху kT була меншою за потенціальну енергію взаємодії атомів.

У твердий стан речовина може перейти як із рідкого, так і з газоподібного стану, перехід у цей стан речовини відбувається стрибкоподібно, тобто за певної температури, на відміну від переходу газ – рідина, який може відбуватися безперервно. Розглянемо процес перетворення рідина – тверде тіло. Процес утворення твердого тіла є процесом утворення кристалу, тобто кристалізацією, і відбувається такий процес за певної температури, яка називається температурою кристалізації. Очевидно, цей процес супроводжується виділенням енергії у вигляді захоплення рідини кристалізацією, зворотним є плавлення. Очевидно, що для такого процесу необхідне підведення теплоти. Графічно це можна зобразити так (рис. 2.20).

Розглядаючи залежність a , бачимо, що на ділянці 1–2 відбувається зниження температури, на ділянці 2–3 її зниження припиняється, хоч одночасно тепло і відводиться, на ділянці 3–4 теж відбувається зниження температури.

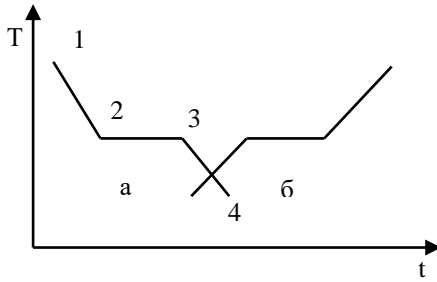


Рисунок 2.20 – Утворення кристалу

Ділянка 2–3 відповідає температурі кристалізації. На ділянці 3–4 ми матимемо тверде тіло, залежність б характеризує зворотний процес. Для початку кристалізації необхідно

мати центр кристалізації, такими центрами можуть бути

випадкові скупчення рідини або якісь елементи. Утворення таких центрів прискорює процес кристалізації, підвищуючи її температуру. Якщо будемо кристалізувати досить чисту рідину, то процес кристалізації буде відбуватися за трохи нижчої температури. За звичайних умов у рідині, зазвичай, є багато центрів кристалізації, у такій рідині утвориться безліч кристаликів, які зростаються разом, і утворений кристал є полікристалічним. Крім полі- є монокристали, які можна виростити в особливих умовах з єдиного центра кристалізації, якщо в цих умовах забезпечені в різних напрямках однакові можливості народження частинок, то буде утворений монокристал з однаковими властивостями. Перехід рідина – тверде тіло є фазовим переходом, бо рідкий і твердий стани можна розглядати як дві фази речовини, обидві фази за температури кристалізації (плавлення) можуть стикатися одна з одною, перебуваючи в рівновазі. Такі самі явища можуть спостерігатися в разі переходу рідина – газ. Подібно до того, як температура кипіння залежить від тиску, температури кристалізації і плавлення (які однакові) також залежать від тиску, зростаючи з тиском. Для того, щоб зруйнувати кристалічну

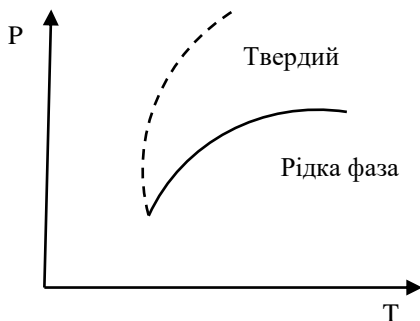


Рисунок 2.21 – Залежність температури плавлення від тиску

ґратку, необхідно відділити атоми один від одного, це можна зробити завдяки температурі. Якщо зобразити графік залежності температури від тиску (рис. 2.21), то суцільна крива поділяє область pT на дві частини,

область зліва відповідає твердому стану, справа – твердому стану. Будь-яка точка, яка лежить на самій кривій плавлення,

відповідає рівновазі твердої і рідкої фаз, за цих тисків і температур речовина перебуває в рівновазі, стикаючись одна з одною, водночас рідина не твердне, а тверде тіло не плавиться. Пунктиром подана крива плавлення тих речовин, у яких під час затвердіння об'єм не зменшується, а збільшується (вісмут, сурма, лід, германій). Зміну температури плавлення з тиском можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(V_2 - V_1)}{L}. \quad (2.74)$$

Це рівняння відоме як рівняння Клапейрона – Клаузіуса (у ньому T – температура плавлення (кристалізації), V_2 і V_1 – молярні об'єми рідкої і твердої фаз, L – молярна теплота плавлення. Це рівняння справедливе для інших фазових переходів, наприклад, для випаровування і конденсації. Тверде тіло може утворитися не тільки через кристалізацію речовини, а й через кристалізацію газу, минаючи рідку фазу, водночас

виділяється захована теплота переходу, яка більша за теплоту плавлення, в обох випадках початковий і кінцевий стани будуть однаковими. Зворотний процес випаровування твердого тіла називається сублімацією (або возгонкою), теплота возгонки дорівнює сумі теплоти плавлення і пароутворення.

2.8.6 Діаграма стану. Потрійна точка

Зобразити графічно криві плавлення і сублімації в координатах pT можна так (рис. 2.22).

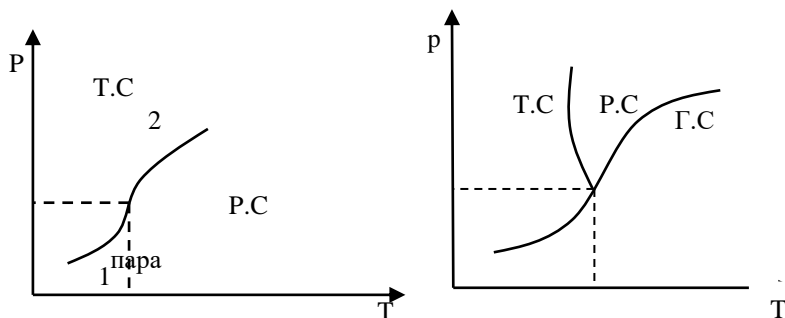


Рисунок 2.22 – Діаграма стану речовини

Ці криві будуть перетинатися в деякій точці, що відповідає певному тиску і температурі. Крива плавлення 2 є кривою рівноваги твердої і рідкої фаз. Крива 1 – це крива сублімації і являє собою рівновагу твердої і газоподібної фаз. Тобто ліворуч від цих кривих ми маємо твердий стан, праворуч – рідкий або газоподібний. Рідку і газоподібну фази розподіляє крива пароутворення, тобто крива вздовж якої рідина і пара перебувають у рівновазі, оскільки теплота пароутворення відрізняється від сублімації і плавлення, то крива пароутворення рідини повинна перетнутися із кривими плавлення і сублімації. Якщо на

графіку зобразити криву пароутворення, то матимемо таку картину.

У точці $p_1 T_1$ буде рівновага всіх трьох фаз речовини – твердої, рідкої, газоподібної. За даного тиску і температури всі три фази будуть у рівновазі, тобто рідина – ні випаровується, ні кристалізується, тверде тіло – не плавиться, газ і пара – не конденсуються. За жодних інших тиску й температури така рівновага не існує. Вказана точка є потрійною. Для різних речовин $p_1 T_1$ різні. Наприклад, для води $p_1 = 4,6$ мм. рт. ст., $T_1 = 0,0075$ °С. Плавлення можливе лише під час нагрівання, за тиску, який перевищує значення p_1 .

2.8.7 Фазові переходи 1-го і 2-го роду

За фазових переходів тіло або виділяє, або поглинає енергію у вигляді теплоти відповідного переходу (плавлення, випаровування). Фазові переходи, які супроводжуються стрибкоподібною зміною енергії або інших характеристик, пов'язаних з енергією, називають фазовими переходами першого роду. Для фазових переходів першого роду характерне те, що зміна параметрів відбувається в дуже вузькому інтервалі температур, тобто можемо відзначити певну температуру переходу або точку переходу. Часто трапляються фазові переходи, за яких стрибкоподібно змінюється не енергія, а її похідні за температурою, у цьому разі фазовий перехід змінюється без виділення або поглинання теплоти. Фазові переходи, що супроводжуються стрибкоподібними змінами похідної від енергії за температурою, називаються фазовими переходами другого роду. Фазові переходи 2-го роду супроводжуються стрибкоподібною зміною $c = \frac{du}{dT}$, де u – внутрішня енергія системи. Такий перехід супроводжується стрибком

коефіцієнта об'ємного розширення, $\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$, V – об'єм тіла. Прикладами зміни фазового переходу 2-го роду є перехід речовини з феромагнітного стану в неферомагнітний. Фазові переходи 2-го роду можуть відбуватися лише у твердих тілах. Фазовий перехід другого роду пов'язаний із зміною симетрії у твердому тілі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Основні одиниці фізичних величин міжнародної системи одиниць. Основні положення, назви та положення. ДСТУ 3651.0-97. – Київ : Держстандарт України, 1998. – 9 с.
2. Похідні одиниці фізичних величин міжнародної системи одиниць та позасистемні одиниці. Основні поняття, назви та позначення. ДСТУ 3651.1-97. – Київ : Держстандарт України, 1998. – 76 с.
3. Фізичні сталі та характеристичні числа. Основні положення, позначення, назви та значення. ДСТУ 3651.2-97. – Київ : Держстандарт України, 1998. – 13 с.
4. Метрологія. Терміни та визначення. ДСТУ 2681-94. – Київ : Держстандарт України, 1998. – 68 с.
5. Правила побудови, викладання, оформлення та вимоги до змісту нормативних документів. ДСТУ 1.5:2003. – Київ : Держспоживстандарт України, 2003. – 141 с.
6. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности : учебное пособие / А. Н. Матвеев. – СПб. : Лань, 2009. – 336 с. – (ISBN 978-5-8114-0965-5).
7. Физическая энциклопедия / гл. ред. А. М. Прохоров. – Москва : Советская энциклопедия, 1988. – 704 с. (ISBN 5-85270-034-7; т. 1).
8. Гокінг С. Великий замисел / С. Гокінг, Л. Млодінов – Харків : Клуб Сімейного Дозвілля, 2018. – 208 с. – (ISBN 978-617-12-4312-5).
9. Шпак А. П. Фізичний лексикон. 1. Базові поняття фізики. 2. Фізичні основи класичної механіки / А. П. Шпак, Б. К. Остафійчук, А. М. Ніколенко. – Івано-Франківськ : ВДВ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2008. – 208 с. – (ISBN 978-966-640-217-5).
10. Шпак А. П. Фізичний лексикон. 1. Базові поняття фізики. 3. Структура та властивості макроскопічних систем /

А. П. Шпак, Б. К. Остафійчук, А. М. Ніколенко. – Івано-Франківськ : Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2010. – 167 с. – (ISBN 978-966-640-280-9).

11. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. / И. Ньютон. – Москва : Наука, 1989. – 711 с. – (ISBN 5-02-000747-1).

12. Иродов И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – Москва : Лаборатория знаний, 2019. – 309 с. – (ISBN 978-5-00101-181-1).

13. Эйнштейн А. Собрание научных трудов / А. Эйнштейн ; под ред. И. Е. Тамма и др. – Москва : Наука, 1965. – Т. 1–4.

14. Фізика для інженерних спеціальностей. Кредитно-модульна система / В. В. Куліш, А. М. Соловійов, О. Я. Кузнєцова, В. М. Кулішенко. – Київ : НАУ (Національний авіаційний університет), 2004. – Частина 1. – 456 с. – (ISBN 966-598-180-3).

15. Киттель Ч. Механика. Берклеевский курс физики / Ч. Киттель, В. Найт, М. Рудерман. – СПб. : Лань, 2005. Том 1. – 480 с. – (ISBN 5-8114-0644-4).

16. Джанколи Д. Физика : у 2 томах / Д. Джанколи. – Москва : Мир, 1989. – Т. 1. – 656 с. – (ISBN 5-03-000346-0).

17. Кушнір Р. М. Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика : навч. посібн. / Р. М. Кушнір. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2003. – 404 с. – (ISBN 966-613-273-7).

18. Чертов А. Г. Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) : справ. пособие / А. Г. Чертов. – Москва : Высш. школа, 1990. – 335 с. – (ISBN 5-06001011-2).

19. Одиниці фізичних величин СІ. / В. А. Базакуца, О. П. Сук, А. А. Рябчун, І. В. Синельник. – Харків : Прапор, 2000. – 48 с. – (ISBN 5-7766-0778-7).

20. Метод аналізу розмірностей і принцип подібностей у розв'язанні фізичних задач / Ю. М. Галатюк, А. В. Рибалко, В. Я. Левшенюк та ін. – Харків : Основа, 2008. – 144 с. – (ISBN 978-966-333-662-6).

21. Бриджмент П. Анализ размерностей / П. Бриджмент. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 148 с. – (ISBN 5-93972-043-9).

22. Калашников Н. П. Основы физики : у 2 т. / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. – Москва : Лаборатория знаний, 2017. – Т. 1. – 542 с. – (ISBN 978-5-00101-004-3 (Т. 1) ISBN 978-5-00101-003-6).

23. Харченко А. П. Вища математика у прикладах і задачах : навчальний посібник / А. П. Харченко, В. О. Гаєвська, Г. В. Лисянська. – Харків : НТМТ, 2013. – Частина I. – 233 с. – (ISBN 978-617-578-145-6).

24. Бланк О. Я. Фізика : посібник для абітурієнтів вищих навчальних закладів / О. Я. Бланк. – Харків : Факт, 2003. – 344 с. – (ISBN 966-637-110-3).

25. Фейман Р. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1, 2: Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Москва : URSS, 2016. – 448 с. – (ISBN 978-5-397-05617-5).

26. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я. Б. Зельдович, И. М. Яглом. – Москва : Наука, 1982. – 512 с.

27. Харченко А. П. Вища математика у прикладах і задачах : навчальний посібник. / А. П. Харченко, В. О. Гаєвська, Г. В. Лисянська. – Харків : НТМТ, 2013. – Частина II – 233 с. (ISBN 978-617-578-127-2).

28. Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф. Б.М. Яворский. – Москва : Академия, 2008. – 720 с. – (ISBN 978-5-7695-6478-9).

29. Коваленко В. Г. Математична символіка / В. Г. Коваленко, І. Ф. Следзінський. – Київ : Радянська школа, 1981. – 80 с.

30. Аршава О. О. Інтегральне числення функції однієї змінної : навчальний посібник / О. О. Аршава, А. П. Харченко, Л. І. Щелкунова. – Харків : ФОП Панов А. М., 2018. – 194 с. – (ISBN 978-617-7541-69-0).

31. Савельев И. В. Курс общей физики : учебник : у 3 т. Механика. Молекулярная физика. – СПб. : Лань, 2019. – Т. 1. – 432 с. (ISBN 978-5-8114-3987-4; Общий), (ISBN 978-5-8114-3988-1; Том 1).

32. Курс фізики. Ч. 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка : навчальний посібник / Р. Д. Венгреневич, М. О. Стасик, В. О. Давидович, І. О. Лопатюк. – Чернівці : Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2007. – 448 с.

33. Бар'яхтар В. Г. Фізика. 10 клас. Академічний рівень : підручник для загальноосвіт. навч. закладів / В. Г. Бар'яхтар, Ф. Я. Божинова. – Харків : Ранок, 2010. – 256 с. – (ISBN 978-611-540-714-9).

34. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник. / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2004. – 512 с. – (ISBN 966-575-002-X).

35. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 432 с.

36. Фриш С. Э. Курс общей физики : учебник : у 3 т. Т. 1. Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – СПб. : Лань, 2009. – 480 с. – ISBN 978-5-8114-0662-3 (Общий), ISBN 978-5-8114-0662-0 (Том 1).

37. Курс загальної фізики : підручник : у 6 т. за загал. ред. В. А. Сминтини. – Одеса : Астропринт, 2011. – (ISBN 978-966-190-465-0).

38. Козицький С. В., Д. Д. Поліщук. Механіка / С. В. Козицький, Д. Д. Поліщук. – Одеса : Астропринт, 2011. – Т. 1. – 472 с. – (ISBN 978-966-190-466-7).

39. Загальні основи фізики : у двох книгах. Кн. 1. Механіка. Термодинаміка та молекулярна фізика : навч. посібник / І. Г. Богацька, Д. Б. Головка, А. А. Маляренко, Ю. Л. Ментковський ; за ред. Д. Б. Головка, Ю. Л. Ментковського. – Київ : Либідь, 1998. – 192 с. – (ISBN 966-06-0045-3; кн.1) ; (ISBN 966-06-0044-5; заг.).

40. Загальний курс фізики : у 3 т. / за ред. І. М. Кучерука Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. – Київ : Техніка, 2006. – 532 с.

41. Кармазін В. В. Курс загальної фізики / В. В. Кармазін, В. В. Семенець. – Київ : Кондор, 2009. – 786 с.

42. Гірка В. О. Лекції з курсу фізики «Механіка та молекулярна фізика» для студентів природничих факультетів : навчальний посібник / В. О. Гірка. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2010. – 296 с. – (ISBN 978-966-623-684-8).

43. Палехін В. П. Курс фізики : підручник / В. П. Палехін. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. – 516 с. – (ISBN 978-966-623-936-8).

44. Пойда В. П. Загальна фізика : конспект лекцій / В. П. Пойда. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2011. – 280 с. – (ISBN 978-966-623-786-9).

45. Бутиков Е. И. Физика : уч. пособие : у 3 кн. Кн. 1. Механика / Е. И. Бутиков, А. С. Кондратьев. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с. – (ISBN 5-9221-0107-2).

46. Бар'яхтар В. Г. Механіка. / В. Г. Бар'яхтар, І. В. Бар'яхтар, Л. П. Гермаш – Київ : Наукова думка, 2011. – 351 с.

47. Копійка К. М. Курс загальної фізики для біологів : [навчальний посібник] : у 3 ч. Частина 1. Механіка і

молекулярна фізика / К. М. Копійка, О. К. Копійка. – Одеса : Астропринт, 2010. – 291 с. – (ISBN 978-966-190-434-6 : у 3 ч.) ; (ISBN 978-966-190-435-3; ч. 1).

48. Яворський Б. М. Курс фізики: у 3 т. Т. 1. Механіка. Основи молекулярної фізики і термодинаміки / Б. М. Яворський, А. А. Детлаф, Л. Б. Милковська, Г. П. Сергєєв. – Київ : Вища школа, 1970. – 356 с.

49. Вакарчук С. О. Фізика: підручник / С. О. Вакарчук, Т. М. Демків, С. В. Мягкота. – Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. – 458с.

50. Зачек І. Р. Курс фізики. Навчальний підручник / І. Р. Зачек, І. М. Кравчук, Б. М. Романишин, В. М. Габа, Ф. М. Гончар. – Львів: Бескид Біт, 2002. – 376 с.

51. Хайкін С. Е. Фізичні основи механіки / С. Е. Хайкін. – Київ : Радянська школа, 1966. – 743 с.

52. Трофимова Т. И. Курс фізики. / Т. И. Трофимова. – Москва : Высшая школа, 1998. – 542 с.

53. Бушок Г. Ф. Курс фізики. Т. 1, 2 / Г. Ф. Бушок, Є. Ф. Венгер. – Київ : Либідь, 2001.

54. Чолпан П. П. Фізика. / П. П. Чолпан. – Київ : Вища школа, 2004. – 567 с.

55. Курс фізики / за редакцією І. Є. Лопатинського / Львів : Бескид Біт, 2002.

56. Воловик П. М. Курс фізики для університетів : навч. посіб. / П. М. Воловик. – Київ : Ірпінь, Перун, 2005. – 864 с.

57. Шорохов А. В. Кинематика : учебное пособие / А. В. Шорохов. – Саранск : Изд-во Мордовского университета, 2010. – 52 с.

Навчальне видання

**Шкурдода Юрій Олексійович,
Пасько Ольга Олександрівна,
Коваленко Ольга Андріївна**

ФІЗИКА.

**МЕХАНІКА, МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА
ТА ТЕРМОДИНАМІКА**

Навчальний посібник

Редактор І. О. Кругляк
Комп'ютерне верстання О. А. Коваленко

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 12,56. Обл. вид. арк. 13,04.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.