

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту
Завідувач кафедри ПМ та МСС
_____ доцент Коплик І.В.

(підпис)

«__» _____ 2021 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «магістр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»

освітньо-професійна програма 113.2 «Наука про дані та моделювання складних систем»

тема роботи **«СИНЕРГЕТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗМ'ЯКШЕННЯ
ПОВЕРХНІ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ З ВРАХУВАННЯМ
ПРОСТОРОВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ ДЕФОРМАЦІЇ,
НАПРУЖЕНЬ ТА ТЕМПЕРАТУРИ»**

Виконавець

студент факультету ЕлІТ

Логвиненко Денис Тарасович _____

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Науковий керівник

професор, доктор фіз.-мат. наук

(науковий ступінь, вчене звання)

Хоменко Олексій Віталійович _____

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Суми - 2021

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет **електроніки та інформаційних технологій**
Кафедра **прикладної математики та моделювання складних систем**
Рівень вищої освіти **другий (магістр)**
Галузь знань **11 Математика та статистика**
Спеціальність **113 «Прикладна математика»**
Освітня програма **освітньо-професійна 113.2 Наука про дані та моделювання складних систем**

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ПМ та МСС
доцент Коплик І.В. _____
«__» _____ 2021 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Логвиненку Денису Тарасовичу

1. Тема роботи Синергетична модель розм'якшення поверхні льоду при терті з врахуванням просторової неоднорідності деформації, напружень та температури.

Керівник роботи Хоменко О.В., професор, доктор фіз.-мат. наук
затверджено наказом по факультету ЕлІТ від «08» жовтня 2021 р. № 0687-VI

2. Термін подання роботи студентом «19» грудня 2021 р.
3. Вихідні дані до роботи 1) Синергетична модель розм'якшення поверхні льоду при терті; 2) Метод сіток на основі явної двошарової різницевої схеми.
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їх належить розробити) Знаходження аналітичного солітонного розв'язку системи диференціальних рівнянь. Реалізування чисельної процедури розв'язання трьох одновимірних диференціальних рівнянь в часткових похідних, які дозволяють простежити еволюцію системи. Отримання і опис розподілу статичної сили тертя, кінетичної сили тертя та температури

по розм'якшеній плівці льоду. Побудова координатних профілів залежності статичної сили тертя, кінетичної сили тертя та температури на різних часових шарах. Побудова координатної залежності стаціонарних значень статичної сили тертя в залежності від різних наборів параметрів та їх вплив на систему.

5. Перелік графічного матеріалу
 - 1) Область дії моделі з двома вітровими полями.
 - 2) Приклад механічного аналогу системи.
 - 3) Координатна залежність зсувної деформації, отриманої при аналітичному розв'язанні.
 - 4) Сітка, яка задає просторове розбиття для чисельного розв'язку рівняння.
 - 5) Координатні профілі залежності статичної та кінетичної сил тертя, температури.
 - 6) Координатна залежність стаціонарних профілів статичної сили тертя.
6. Консультанти до проекту (роботи), із значенням розділів проекту, що стосується їх

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання «22» листопада 2021 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Найменування роботи, заходи	Термін виконання	Примітка
1	Ознайомитися з літературою, що пов'язана з фізикою тертя льоду.	22.11.2021-24.11.2021	Виконав
2	Ознайомитись з методами розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.	24.11.2021-26.11.2021	Виконав

3	Побудувати математичну модель, що описує розм'якшення поверхні льоду при терті з врахуванням просторової неоднорідності деформації, напружень та температури.	26.11.2021- 29.11.2021	Виконав
4	Враховуючи математичну модель, створити програмний алгоритм для знаходження чисельного розв'язку системи.	29.11.2021- 07.12.2021	Виконав
5	Побудувати координатну залежність зсувної деформації, отриманої при аналітичному розв'язанні.	07.12.2021- 12.12.2021	Виконав
6	Побудова координатних профілів залежності статичної сили тертя, кінетичної сили тертя та температури на різних часових шарах.	12.12.2021- 16.12.2021	Виконав
7	Побудова координатної залежності стаціонарних значень статичної сили тертя в залежності від різних наборів параметрів та їх вплив на систему.	16.12.2021- 19.12.2021	Виконав

Здобувач вищої освіти

_____ Логвиненко Д.Т.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник роботи

_____ Хоменко О. В.
(підпис) (прізвище та ініціали)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота: 45 с., 8 рисунків, 22 джерел.

Мета роботи: на основі системи нелінійних диференціальних рівнянь у одномодовому наближенні та адіабатичній границі, отримати і описати координатну залежність кінетичної та статичної сил тертя, і температури у приповерхневому шарі льоду.

Об'єкт дослідження: процес розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті.

Предмет дослідження: синергетична математична модель, яка подає розм'якшення тонкого шару поверхні льоду при терті з врахуванням просторової неоднорідності деформації, напружень та температури.

Методи навчання: рівняння математичної фізики, диференціальні рівняння, методи чисельного розв'язку диференціальних рівнянь.

При виконанні роботи для чисельних обчислень була використана явна двошарова різницева схема для методу сіток та три одновимірних параболічних рівняння.

Для зручності сприйняття числових значень в роботі наведені координатні профілі залежностей, які відповідають цим числовим значенням.

Ключові слова: СИНЕРГЕТИЧНА МОДЕЛЬ, ТЕРТЯ ЛЬОДУ, ОДНОМОДОВЕ НАБЛИЖЕННЯ, АДІАБАТИЧНА ГРАНИЦЯ, РОЗПОДІЛ СТАТИЧНОЇ СИЛИ ТЕРТЯ.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД.....	9
1.1 Реакція крайки морського льоду на формування атмосферних та океанічних струменів.....	9
1.1.1 Аналітична модель морського льоду.....	9
1.1.2 Рівняння моделі.....	12
1.1.3 Граничні умови.....	14
1.2 Вплив напруження та деформації морського льоду в анізотропній моделі морського льоду.....	16
1.2.1 Рівняння моделі.....	16
1.2.2 Еластично-пластично анізотропна реологія.....	16
1.2.3 Еластично-пластично в'язка реологія.....	19
1.2.4 Область визначення моделі, граничні та початкові умови.....	19
1.2.5 Умови ідеалізованого атмосферного та океанічного впливів.....	21
РОЗДІЛ 2 ОСНОВНА ЧАСТИНА.....	23
2.1 Основні рівняння та постановка задачі.....	23
2.2 Аналітичний розв'язок.....	24
2.3 Чисельний розв'язок.....	28
2.3.1 Метод сіток та умови.....	28
2.3.2 Результати.....	32
ВИСНОВКИ.....	39
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	40
ДОДАТКИ.....	42

ВСТУП

Розвиток сучасних технологій постійно диктує вирішення нових фізико-технічних проблем, з якими стикається людина. Такою проблемою є тертя льоду як у практичному досвіді взаємодії з людиною (наприклад, водіння по льоду), так і в природніх аспектах (зокрема, рух льодовиків). В повсякденному житті моделювання тертя льоду може бути корисним для людини при дослідженні процесів під час проектування штучних льодових середовищ, наприклад, вплив руху льодовиків на клімат, та різних матеріалів і компонент, що рухаються по льоду, зокрема, створення елементів та конструкцій у машинобудуванні та зимових видах спорту [1-7].

Модель представлена системою трьох одновимірних диференціальних параболічних рівнянь в частинних похідних. У цій моделі сила тертя задається в'язкістю та товщиною такої плівки, які визначаються комбінованою дією плавлення поверхні льоду і тиску. Згідно з цим підходом, фрикційне нагрівання змінює тертя за рахунок теплового розм'якшення поверхні або утворення неоднорідної тонкої поверхневої плівки, що складається з областей кристалічного і розм'якшеного льоду, які здатні до флуктуацій у просторі і часі. Пояснено, чому тертя льоду спадає із збільшенням швидкості ковзання до досягнення її значення, за якого тонкий однорідний водний шар формується на поверхні.

В нашому дослідженні були розглянуті дві фізичні ситуації. Перша, коли верхня і нижня поверхні рухаються з рівними за величиною швидкостями у протилежних напрямках. Друга, коли верхня поверхня зсувається по нерухомій нижній. На основі явної двошарової різницевої схеми записаний аналітичний вид чисельної процедури розв'язання рівнянь, включаючи початкові і граничні умови. Граничні умови задаються стаціонарними значеннями температури, деформації та напруження, отриманими в однорідному випадку без урахування градієнтних складових. Визначено залежності статичної сили тертя, кінетичної сили тертя та температури від координати в нормальному напрямку до поверхні

на різних часових рядах. Показано, що з плином часу встановлюється стаціонарний розподіл сил тертя і температури по товщині приповерхневого шару льоду. З отриманих координатних профілів залежностей було визначено, що підвищення температури приводить до більш різкої зміни сили тертя по товщині приповерхневого шару льоду, тобто збільшується відносна швидкість зсуву третювних поверхонь.

Роботу опубліковано в статтях [1-3] та обговорено на конференціях ІМА-2019 [4], ІМА-2020 [5] та ІМА-2021 [6] «Інформатика, автоматика, математика» у 2019, 2020, 2021 роках.

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

1.1 Реакція крайки морського льоду на формування атмосферних та океанічних струменів

1.1.1 Аналітична модель морського льоду

Для знаходження аналітичного розв'язку моделі було використано методологію, подібну до [7], але гранульована динаміка не була врахована в цьому дослідженні. Використані рівняння у моделі подібні до моделі формування краю льоду, де для пошуку розв'язків використовувалася двовимірний метод сіток.

Для моделювання руху морського льоду під час утворення океанічних і атмосферних струменів використовується баланс імпульсів, що дає розв'язки для динамічної змінної швидкості дрейфу льоду та концентрації льоду. Цей баланс імпульсів враховує шар суміші морського льоду, що містить крижини та воду океану між ними аж до самої глибини криги. Взаємодія між крижинами та океаном розташованим між ними описується як континуум у масштабі довжини, що перевищує розміри окремих криг. Баланс імпульсу для шару суміші будується, враховуючи баланси імпульсів як для льоду, так і для океану та вертикального інтегрування над шаром.

Швидкість зміни імпульсу шару визначається як:

$$m \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -m f_C k \cdot u + A \tilde{\tau}^a + A \tilde{\tau}^o + S + \nabla \cdot \sigma, \quad (1.1)$$

де m — маса морського льоду (кг), u — швидкість руху льоду (м/с), f_C — параметр Коріоліса, A — концентрація льоду ($A = 0$ — для відкритого океану, $A = 1$ — для повного крижаного покриву), $\tilde{\tau}^a$ і $\tilde{\tau}^o$ — прикладені атмосферні та океанічні напруження, S — гравітаційне прискорення від нахилу океану (нехтована для цього дослідження), σ — тензор напруження льоду (Па).

Роль прикладених напружень у балансі залежить від концентрації льоду до якого прикладаються зовнішні напруження та розраховуються вони за наступними формулами:

$$\tilde{\tau}^o = p_o C_o |U^o - u| [(U^o - u) \cos \theta + k \cdot (U^o - u) \sin \theta], \quad (1.2)$$

де U^o – швидкість океану (м/с), u – швидкість льоду (м/с), θ – кут повороту (рад), p_o – густина морської води ($\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$), а C_o – константа, пов’язана з опором між океаном і льодом. Кут повороту використовується для параметризації повороту Екмана водяного стовпа під льодом. Оскільки кут повороту ϕ , як правило, малий і ним нехтують в моделях, тому тут спрощується розгляд змішаного шару океану, встановлюючи $\theta = 0$. Для шару атмосфери напруження, що прикладено до льоду, розраховується на основі швидкості вітру

$$\tilde{\tau}^a = p_a C_a |U^a| U^a, \quad (1.3)$$

де p_a – густина повітря ($\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$), U^a – швидкість вітру (м/с), C_a – коефіцієнт опору. Терміни C_a і U^a відносяться до вітрів на певній висоті. Для цього дослідження використовується висота 10 м. Типова швидкість приземного вітру над морським льодом (порядку 10 м/с) на два порядки перевищує типову швидкість дрейфу морського льоду (порядку 0,1 м/с [8,9]), що дозволяє рівнянню (1.3) залежати лише від швидкості вітру. Оскільки типові швидкості океанських течій мають той самий порядок величини, що і швидкість дрейфу морського льоду, то рівняння (1.2) має враховувати різницю між швидкостями дрейфу океанської течії та морського льоду, щоб дати правильну величину та напрямок прикладеного напруження.

Для неперервної моделі морського льоду в масштабі, більшому, ніж окремі морські криги, динаміку морського льоду можна вважати ізотропною на краях морського льоду. Ми припускаємо, що реологію морського льоду можна описати за допомогою реології в'язкого пластику. Для типових рівнів напруження в реології в'язкого пластику лід деформується як пластичний. При пластичній деформації енергія витрачається на деформацію льоду. Ця втрачена енергія

створює такі елементи, як хребти або тріщини, які можуть поширюватися на багато кілометрів. Для низьких напружень морський лід приймається як в'язка рідина. Перехід від в'язкої деформації до пластичної відбувається при значенні межі плинності. Ця межа плинності виражається у вигляді кривої в просторі принципів напружень.

Тензор льодового напруження σ_{ij} пов'язаний зі швидкістю деформації морського льоду, що визначається як

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.4)$$

де $(i, j) = (x, y)$ – індекси осей координат. Інваріанти напружень від'ємного тиску σ_I та максимальної швидкості зсуву σ_{II} пов'язані з основними напруженнями σ_1, σ_2 за допомогою двох формул:

$$\sigma_I = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \sigma_{II} = 0,5(-\sigma_1 + \sigma_2). \quad (1.5)$$

Тензор напружень в'язкого пластику розраховується як:

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + (\xi - \eta)\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} - 0.5p\delta_{ij}, \quad (1.6)$$

де η і ξ — зсувна та об'ємна в'язкість, а p — тиск льоду (Па). Зсувна та об'ємна в'язкість задаються як:

$$\eta = \frac{\xi}{e^2}, \quad (1.7)$$

$$\xi = \frac{p}{2\Delta}, \quad (1.8)$$

$$\Delta = [(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2)(1 + e^{-2}) + 4e^{-2}\dot{\epsilon}_{12}^2 + 2\dot{\epsilon}_{11}\dot{\epsilon}_{22}(1 - e^{-2})]^{1/2}, \quad (1.9)$$

де e визначає співвідношення сторін кривої текучості. Як зазначено у статті [10]:

$$p = p^*hg(A), \quad (1.10)$$

де p^* — константа, а h — товщина льоду. Функція $g(A) = e^{-c(1-A)}$, використовується для представлення кількості льодового контакту. Ця параметризація міцності льоду дає лінійну залежність між міцністю і товщиною для високих концентрацій. При зменшенні концентрації, міцність льоду значно падає. Чисельно ефективна версія реології в'язкого пластика була реалізована в моделі CICE, яка імітує зростання, танення і рух морського льоду.

1.1.2 Рівняння моделі

Розв'язання рівняння рівноваги імпульсу (1.1) потрібно для того, щоб змодельовати зміну швидкості дрейфу морського льоду (u, v) і концентрації A під час вітрів і течій, що впливають на лід та стабільний край по периметру морського льоду. Система координат вирівняна відповідно до краю. Розглядається нескінченна, латерально інваріантна крайка льоду у встановленому стані, так що $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ та $\frac{\partial}{\partial y} = 0$. Крайова зона льоду (КЗЛ) розглядається як область постійної товщини льоду з $h = 1$ м. Оскільки крайка морського льоду ущільнюється для утворення стаціонарного стану, то дрейф льоду нормальний до краю морського льоду u , приймається як малий і додатний для x . Це значення приймається постійним на всіх етапах розв'язання $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, цих обмежень достатньо для того, щоб забезпечити збільшення концентрації морського льоду майже до 90% на невеликій відстані ($x < \mathcal{L}_R, X < 1$) від краю морського льоду. Використовуючи ці спрощення, рівняння (1.1) набуває вигляду

$$0 = phv + A(\tau_1^a + \tau_1^o) + \sigma_{11x}, \quad (1.11)$$

$$uv_x = -phu + A(\tau_2^a + \tau_2^o) + \sigma_{12x}, \quad (1.12)$$

де $m = ph$, p — густина морського льоду. Значення σ_{11} і σ_{12} можна розрахувати за формулою (1.6). Єдині ненульові компоненти тензора швидкості деформації в формулі (1.4) дорівнюють $\dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{21} = \frac{v_x}{2}$ (1.7) - (1.9), тому шукані компоненти тензора напружень виглядають так:

$$\sigma_{11} = -\frac{p}{2}, \quad (1.13)$$

$$\sigma_{12} = \frac{p}{2} \frac{e^{-2} v_x}{(2e^{-2} v_x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{p}{2\sqrt{2}e} \operatorname{sgn}(v_x). \quad (1.14)$$

Тиск льоду p задається як функція концентрації льоду, як у формулі (1.10).

Модель застосована до області льоду, яка знаходиться під впливом утворених струменів, із шкалою довжини \mathcal{L}_{RA} для атмосферного струменя та \mathcal{L}_{RO} для океанічного струменя. Для експериментів з обома струменями буде використовуватися атмосферний радіус Россбі, оскільки він на порядок більший за океанічний. Прикладені напруження також масштабуються. Підставляємо рівняння (1.13) в рівняння (1.11) та (1.14) в (1.12) і прийmemo, що $u \rightarrow U_I \hat{u}$, де U_I – типова швидкість на льоду, положення $(x, y) \rightarrow \mathcal{L}_R(X, Y)$, похідні $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \left(\frac{1}{\mathcal{L}_R}\right) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$ і прикладене напруження $\tilde{\tau}^a \rightarrow T_a \hat{\tau}^a, \tilde{\tau}^o \rightarrow T_o \hat{\tau}^o$ (T є типовими значеннями напруження, визначеними нижче), щоб отримати

$$0 = f_c \mathcal{L}_R U_I \hat{v} + \frac{\mathcal{L}_R}{ph} (T_a \hat{\tau}_1^a + T_o \hat{\tau}_1^o) A - \frac{p^*}{2p} \frac{\partial g}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial X}, \quad (1.15)$$

$$U_I^2 \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial X} = -f_c \mathcal{L}_R U_I \hat{u} + \frac{\mathcal{L}_R}{ph} (T_a \hat{\tau}_2^a + T_o \hat{\tau}_2^o) A + \frac{p^*}{2\sqrt{2}ep} \operatorname{sgn}(\hat{v}_x) \frac{\partial g}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial X}. \quad (1.16)$$

Об'єднаємо ці два рівняння, щоб отримати систему двох звичайних диференціальних рівнянь для знаходження \hat{v} та A , маємо

$$g_A A_X - \alpha_1(X, \hat{v}) A - \alpha_2 \hat{v} = 0, \quad (1.17)$$

$$\hat{v}_x - \beta_1 \operatorname{sgn}(\hat{v}_x) \hat{v} - \beta_2 [X, \hat{v}, \operatorname{sgn}(\hat{v}_x)] A + \beta_3 = 0, \quad (1.18)$$

де

$$\alpha_1(X, \hat{v}) = 2 \frac{\mathcal{L}_R}{p^* h} T_1(X, \hat{u}, \hat{v}), \alpha_2 = 2 \frac{p f_c \mathcal{L}_R U_I}{p^*}, \beta_1 = \frac{f_c \mathcal{L}_R}{U_I \hat{u} \sqrt{2} e}, \beta_2 [X, \hat{v}, \operatorname{sgn}(\hat{v}_x)] = 2 \frac{\mathcal{L}_R}{ph U_I^2 \hat{u}} \left[T_1(X, \hat{u}, \hat{v}) + \frac{\operatorname{sgn}(\hat{v}_x)}{\sqrt{2} e} T_2(X, \hat{u}, \hat{v}) \right], \beta_3 = \frac{f_c \mathcal{L}_R}{U_I}.$$

Функції $T_1(X, \hat{u}, \hat{v}) = T_a \hat{\tau}_1^a(X) + T_o \tau_1^o(X, \hat{u}, \hat{v})$ та $T_2(X, \hat{u}, \hat{v}) = T_a \hat{\tau}_2^a(X) + T_o \tau_2^o(X, \hat{u}, \hat{v})$ отримали з прикладених напружень та з використанням змінних масштабу $T_a = U_A^2 \rho_a C_a$ і $T_o = U_o^2 \rho_o C_o$. Компоненти застосовуваних напружень розраховуються з формул (1.2) та (1.3).

1.1.3 Граничні умови

Граничні умови необхідні, щоб знайти розв'язки для охолоджувача з льодом. Ці умови є похідними від балансу імпульсу вільно дрейфуючого морського льоду

$$m \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -m f_c k \times u + \tilde{\tau}^a + \tilde{\tau}^o, \quad (1.19)$$

разом із низькою концентрацією льоду $A = 0.1$. Це відмінне від нуля значення A вибрано для представлення крайки морського льоду. Значення $A = 0$, яке представляло б відкритий океан, приводить до розв'язку, коли $A = 0$ для всієї області. Ті самі спрощення, що використовуються для охолоджувача з льодом, застосовуються до балансу імпульсу вільного дрейфу. Це моделює рух льоду, де концентрація льоду низька, що дозволяє обмежувати нормальну швидкість u . У цій моделі область є тонкою, і розв'язок можна прийняти постійним по всій області льоду, видаляючи всі просторові похідні. Для прикладених напружень використовуються пікові значення швидкості атмосфери та океану (при $X = X_{peak}$). Швидкості льоду (\hat{u}, \hat{v}) можна розрахувати з компонентів рівняння (1.19) з усіма просторовими та часовими похідними, встановленими рівними нулю. Цей набір одночасних рівнянь

$$0 = f_c \hat{v} + \frac{1}{phU_I} T_1(X_{peak}, \hat{u}, \hat{v}), \quad (1.20)$$

$$0 = -f_c \hat{u} + \frac{1}{phU_I} T_2(X_{peak}, \hat{u}, \hat{v}). \quad (1.21)$$

Для розрахунку значень напруження (T_1, T_2) необхідно обчислити типові швидкості льоду та океану u_{diff}^2 . Типова швидкість океану $\tilde{u}_0 = (\sin \phi, \cos \phi)$

береться за безвимірну швидкість океану; типова швидкість льоду $\tilde{u}_l = (\hat{u}, \hat{v})$ прирівнюється до швидкості льоду, яку потрібно знайти. Для випадку океанського струменя розглядається співвідношення u_{diff}^2 . Для узгодження з моделлю охолоджувача з льодом (1.1), паралельна складова швидкості \hat{v} є узгодженою, хоча нормальна складова \hat{u} занадто висока, щоб бути використаною для нижньої нормальної швидкості. Нижнє значення для \hat{u} можна розрахувати з рівняння (1.18) для збереження безперервності в напрямку координати u . Задані значення $A = 0.1$, \hat{v} і функції напружень T_1, T_2 використовуються для розв'язання при вільному дрейфі. Похідну \vec{v}_x прирівняно до нуля, щоб зберегти безперервність, а похідну A_x встановлено як високу, передбачаючи різке збільшення концентрації льоду. Значення \hat{u} обчислюється за формулою

$$0 = -f_c \mathcal{L}_R U_I \hat{u} + \frac{\mathcal{L}_R}{\rho h} A T_2(X_{reak}, \hat{u}, \hat{v}) A + \frac{p^*}{2\sqrt{2ep}} \text{sgn}(\hat{v}_x) g_A A_x, \quad (1.22)$$

де T_1 розраховується як для вільного дрейфу в рівнянні (1.21), тобто u_{diff}^2 є функцією від \hat{u} . Для розв'язання у випадку з охолоджувачем з льодом очікується, що \hat{v} буде найвищим на межі розрізу морський лід – океан. Це дає $\hat{v}_x < 0$ з $\text{sgn}(\hat{v}_x) = -1$ для всіх X .

Коефіцієнт похідної найвищого порядку (A_x) в рівнянні (1.17) є нелінійною функцією A і ускладнює розв'язання системи рівнянь за допомогою простих аналітичних методів. В рівнянні (1.17) апроксимація $g(A)$ кусково-безперервної множини прямих над областю D_i створює похідну $\frac{\partial g}{\partial A}$. Тепер систему можна розв'язувати на кожному інтервалі, узгоджуючи граничні умови кожного інтервалу з сусідніми для отримання повного розв'язку. Цей метод повністю описаний у [11].

Розв'язання починається при встановленні умови $X = 0$. Для A і \hat{v} взято граничні умови, а рівняння (1.17) - (1.18) розв'язуються на області D_1 , де $A = A_1$. Значення для A , D_i та X у цій точці використовуються як граничні умови для

розв'язання над D_2 . Цей процес повторюється для отримання повного розв'язку для крайки льоду.

1.2 Вплив напруження та деформації морського льоду в анізотропній моделі морського льоду

1.2.1 Рівняння моделі

Чисельна модель морського льоду CICE розраховує дрейф і деформацію морського льоду за допомогою вертикально інтегрованого горизонтального балансу імпульсу [12]:

$$m \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -m f_c k \cdot u + C \tau^a + C \tau^o + S + \nabla \cdot \sigma, \quad (1.23)$$

де ліва частина рівняння являє собою швидкість зміни імпульсу, причому u швидкість дрейфу морського льоду і m маса морського льоду на одиницю площі, збалансовані в порядку: прискорення Коріоліса $-m f_c k \cdot u$, f_c параметр Коріоліса і k - одиничний вектор, нормальний до поверхні моря; концентрація льоду C , зважене прикладене напруження від атмосфери τ^a та океану τ^o ; гравітаційне прискорення від нахилу океану S встановлено на нуль для цього дослідження; $\nabla \cdot \sigma$ - розбіжність тензора внутрішнього напруження льоду.

Атмосферний опір розраховується з швидкістю вітру 10 м/с U_a , з рівняння $\tau^a = p_a C_a |U^a| U^a$, де p_a — густина повітря, а C_a — параметр опору. Напруження в океані зазвичай розраховуються на основі різниці між швидкостями льоду та океану та з кутом повороту. У цьому дослідженні океан - нерухомий та відсутній кут повороту з $\tau^o = -p_o C_o |u| u$, де p_o — густина океану, а C_o — коефіцієнт опору океану.

1.2.2 Еластично-пластично анізотропна реологія

Для представлення взаємодій криг у рамках моделі континууму розроблено реологію еластично анізотропної пластмаси (ЕАП), яка підсумовує сили, що виникають між багатьма ромбоподібними льодами в межах довільної

області морського льоду. Ця реологія була реалізована в моделі морського льоду Лос-Аламоса CICE [13] з подальшими дослідженнями її ролі в балансі сил морського льоду. Орієнтація крижин у межах області записується за допомогою динамічної моделі, яка змінюється, щоб відобразити руйнування та з'єднання крижин. Розглядаючи взаємодію між окремими одиницями льоду в межах довільної області, можна отримати пластично-ковзаюче та ребристе напруження, які об'єднані, щоб відтворити повну локальне напруження льоду:

$$\sigma^f(r, h) = P_r(h)\sigma_r^f(r) + P_s(h)\sigma_s^f(r). \quad (1.24)$$

Локальні пластично-ковзаюче σ_s^f і ребристе σ_r^f напруження отримані для орієнтацій криг (заданих одиничним вектором r) та їх відносного руху (визначеного зі швидкості деформації $\dot{\epsilon}$). $P_{(r,s)}(h)$ – пластично-ковзаюча та ребриста міцність льоду з товщиною h . Окремі напруження на лід спрямовані на довільну площу S , що містить багато вирівняних глиб, представлених $\psi(r)=\psi(-r)$ ($\int_S \psi(r) dr = 1$), а загальне внутрішнє напруження визначається як:

$$\sigma(h) = P_r(h) \int_S \psi(z) [\sigma_r^f(r) + k\sigma_s^f(r)] dr, \quad (1.24)$$

де міцність ковзаючого льоду $P_s = kP_r$, k – постійна величина.

Тензор структури, що використовується для представлення напрямку глиб, визначається аналогічно як:

$$A = \int_S \psi(r)rr dr, \quad (1.25)$$

який є тензором одиничного сліду, тобто $A_{11} + A_{22} = I$ з значенням $A_2 = I - A_1$, який пов'язаний з власним вектором A_1 , головний компонент A задає напрямок локального анізотропного вирівнювання r . При найбільшому власному значенні серед діапазону $0,5 < A_1 < I$, воно вказує на рівень локальної анізотропії, тобто при умові $A_1 = I$ стан є повністю анізотропним, а при $A_1 = 0,5$ повністю

ізотропним. Тензор структури змінюється в часі внаслідок локального примусу, за формулою

$$\frac{D^c A}{D^c t} = F_{frac}(A, \sigma) + F_{iso}(A), \quad (1.26)$$

де $\frac{D^c}{D^c t}$ – похідна за часом спільного обертання, що враховує адвекцію та обертання твердого тіла, а члени $F_{()}$ представляють різні процеси, які змінюють форму крижини.

F_{frac} визначає переорієнтацію криги, що викликано руйнуванням і явно залежить від напрямку напруження морського льоду, але не від її значення. Використано чотири режими руйнування, що визначаються коефіцієнтом внутрішнього утримання напружень $R_{int} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, де $\sigma_{1,2}$ – основні компоненти тензора напружень: 1) стиснення за двома осями, що викликає поздовжнє розщеплення; 2) стиснення/розтягнення за однією віссю, що спричиняє осьове розщеплення; 3) стиснення за двома осями з низьким коефіцієнтом утримання, що спричиняє зсув у площині; 4) стиснення за двома осями з великим коефіцієнтом утримання, що спричиняє розрив зсуву поза площиною. Перший та четвертий режими не спричиняють зміну форми криг, а другий та третій режими вирівнюють криги з r паралельно напрямку найбільшого напруження стискання (σ_2). Формульно для F_{frac} це можна записати так:

$$F_f = \begin{cases} 0 & R_{int} > 0 & \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0, \\ -k_f(A - S) & R_{int} < 0 & \sigma_2 < 0 & \text{та } \sigma_1 \geq 0, \\ -k_f(A - S) & R_{int} < R_{crit} & \sigma_2 \leq \sigma_1 < 0 & \text{та } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < R_c, \\ 0 & R_{int} < R_{crit} & \sigma_2 \leq \sigma_1 < 0 & \text{та } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \geq R_c, \end{cases} \quad (1.27)$$

де S є тензором, який приводить до вирівнювання головної осі A з головним напрямком σ , пов'язаним з σ_1 ; k_f відображає швидкість утворення тріщин в морському крижаному покриві, і, як і в [13], обрано опорне значення $k_f = 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, яке дає 90 % анізотропне вирівнювання протягом 6 годин у другому або

третьому випадках. Використане значення $R_c = 0,3$ відповідає лабораторним спостереженням [14]. Термодинамічне відновлення структурного тензора морського льоду виключено ($F_{iso} = 0$), щоб зосередитися на переорієнтації льоду через руйнування F_{frac} .

1.2.3 Еластично-пластично в'язка реологія

Реологія еластично в'язкої пластмаси є чисельною реалізацією, яка пружно апроксимує в'язкопластичну реологію. У цій реології деформація морського льоду моделюється як пластична для високонапружених станів і як високов'язка рідина для станів з низьким напруженням, щоб полегшити складність розрізнення чисельних результатів між пластичною та непластичною деформацією. Це відображається через тензор напружень, використовуючи наступне рівняння:

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + (\zeta - \eta)\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{2}p\delta_{ij}, \quad (1.28)$$

$$\eta = \frac{\zeta}{e^2}, \zeta = \frac{p}{2\Delta}, \quad (1.29)$$

де η і ζ – в'язкість зсуву та об'ємна в'язкість, e визначає відношення еліптично-пластичної кривої текучості, $\Delta = \{(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2)(1 + e^{-2}) + 4e^{-2}\dot{\epsilon}_{12}^2 + 2\dot{\epsilon}_{11}\dot{\epsilon}_{22}(1 - e^{-2})\}^{\frac{1}{2}}$ – коефіцієнт масштабування, що представляє величину локальної деформації, а p – міцність льоду.

1.2.4 Область визначення моделі, граничні та початкові умови

У дослідженні використовується квадратна сітка з постійним прискоренням Коріоліса $f_c = 1,46 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, щоб зробити модель застосовною до полярних областей. Розмір області $d = 2000 \text{ км}^2$. Для спрощення динаміки моделі ми використовуємо єдину товщину та параметризацію міцності льоду [15], у якому $p = p^* h \exp[-c(1 - C)]$, де $p^* = 2700 \text{ Па}$ і $c = 20$ є константами. Випробування показали, що використання альтернативної параметризації міцності [15] і п'яти

категорій товщини не дає якісної різниці з результатами цього моделювання. Використовується параметризація міцності льоду така ж, як у [16], але є відмінності в способі ініціалізації міцності.

Для моделювання характеристик напруження в цілісному морському льоді необхідно задати спеціальні граничні умови (рис. 1.1). Граничні умови для відкритих або закритих меж викликають або занадто мале, або занадто велике напруження, тому відсутні деформаційні властивостей через розсіювання напруження по морському льоду. З цієї причини використовуються граничні умови, використані в [11] для отримання реалістичних значень деформації на квадратній сітці.

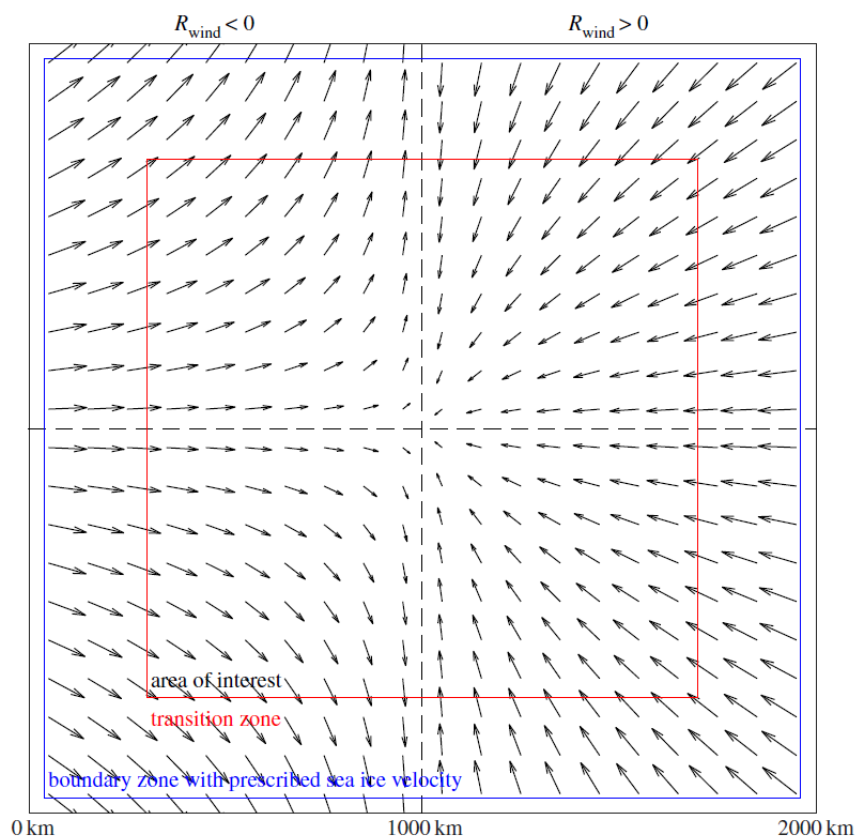


Рис. 1.1 – Область дії моделі з двома вітровими полями. На лівій половині рисунку розташовані стрілки потоку для вітру з $R_{wind} = -0,8 < 0$, а на правій частині $R_{wind} = 0,8 > 0$. Чорні пунктирні стрілки представляють лінії симетрії відбиття в полі вітру. Область у синьому квадраті d_{bc} показує приповерхневу область із заданою швидкістю льоду, а область у червоному квадраті d_{trans} це межі де заміряються результати.

Для буферної області $d_{bc} \approx 50$ км від краю льоду (область до синього квадрату, щоб дати реалістичні характеристики деформації), у дослідженні морський лід перебуває в стані квазі-вільного дрейфу з просторово рівномірними напруженнями і деформаціями. Після того, як рівняння напружень розв'язані в пружному підциклі (повністю описані в [17]), які забезпечують реалістичні умови напруження по всій області, зупиняються внутрішні напруження льоду від розсіювання за межами області, накладаючи обмеження на швидкість дрейфу морського льоду в межах буферної області (d_{bc}) шляхом балансування сили вітру та лінійного опору океану

$$0 = \tau^a + \tau^o, \tau^o = \rho_0 C_0 \frac{(U_g^o - u)}{2}, \quad (1.30)$$

де значення змінної $U_g^o = 0$ являє собою нерухомий океан. У дослідженні [17] ця гранична умова дає рівномірні напруження і швидкість деформації в буферній області. Моделювання, представлене в цій роботі, є чисельно стабільним. У перехідній області розміром $d_{trans} = 300$ км від краю визначеної області рівномірна швидкість деформації змінюється на спостережувані значення.

Модель ініціалізується за допомогою даних із моделі CICE для всієї Арктики з використанням конфігурації перезапуску. Щоб перезапустити запуск моделі, потрібно багато змінних. Більшість обрано з однієї точки в арктичній трасі з 2 % шуму, ідеальними значеннями було обрано: швидкість морського льоду близько нуля, концентрація морського льоду 0.999, постійний тонкий сніговий покрив 0.1 м і постійний тензор і товщина морського льоду. Решта моделі CICE не модифікована, використані її розв'язані термодинамічні рівняння та рівняння розподілу товщини.

1.2.5 Умови ідеалізованого атмосферного та океанічного впливів

Щоб отримати уявлення про роль реології морського льоду у створенні особливостей деформації морського льоду, проводиться моделювання з

ідеалізованим атмосферним та океанічним впливом. Щоб викликати майже постійні умови внутрішнього напруження в ідеалізованій області, вводиться сила вітру, подібна до тієї, яку використовували [18,19] для моделювання морського льоду з дискретними елементами та [17]. У всіх моделях швидкість океану U_g^0 встановлена на нуль. Додається сила вітру, встановлюючи градієнт вітрового напруження $\frac{\tau_{yy}^a}{\tau_{xx}^a} = R_{wind}$ і максимальну швидкість вітру U_{max}^a . Межі швидкості вітру задаються з виразів $(\tau_x^a, \tau_y^a) \propto (u^a, v^a) \sqrt{u^{a^2} + v^{a^2}}$ та граничних умов $(u^a, v^a) = (U_{max}^a, 0)|_{x=0}^{y=\frac{d}{2}}$ та $(u^a, v^a) = (-U_{max}^a, 0)|_{x=d}^{y=\frac{d}{2}}$, вимірюючи координати (x, y) від південно-західного кута області моделі за формулами

$$u^a = \frac{U_{max}^a}{\sqrt{d}} \frac{d - 2x}{\sqrt[4]{(d - 2x)^2 + (d - 2y)^2 R_{wind}^2}}, \quad (1.31)$$

$$v^a = \frac{U_{max}^a}{\sqrt{d}} \frac{d - 2x}{\sqrt[4]{(d - 2x)^2 + (d - 2y)^2 R_{wind}^2}} R_{wind}. \quad (1.32)$$

Цей тип вітру містить вітри, що спрямовуються на схід від західного краю області та на захід від східного краю області. Вітри розходяться з північного та південного краю при $R_{wind} < 0$ і спрямовуються на південь від північного краю області та на північ від південного краю домену при $R_{wind} > 0$. Поле швидкостей симетричне відносно прямих $x = \frac{d}{2}$ та $y = \frac{d}{2}$. Модель ініціалізується з нульовим полем вітру $(u^a, v^a) = 0$, яке збільшується лінійно до ідеалізованої сили вітру, яке встановлюється протягом 6 годин роботи моделі часу.

2 ОСНОВНА ЧАСТИНА

2.1 Основні рівняння та постановка задачі

Процеси граничного тертя, які протікають в нанорозмірних трибологічних системах, з останнім часом викликають інтерес у багатьох теоретиків і експериментаторів. Зокрема, розглядають атомарно-гладкі тверді поверхні при наявності ультратонкого шару однорідного плівки льоду, при їх відносному русі з фіксованою відстанню між поверхнями. Це викликано частим використанням таких систем для побудови високоточного обладнання та приладів.

В роботі досліджуємо загальний просторово-неоднорідний випадок, опис якого стає можливим лише під час модифікації базової системи рівнянь [3] за допомогою урахування відповідних градієнтних вкладів напруження, деформації та температури [20]:

$$\dot{\varepsilon} = D_{\varepsilon} \nabla^2 \varepsilon - \varepsilon + \sigma, \quad (2.1)$$

$$\tau \dot{\sigma} = D_{\sigma} \nabla^2 \sigma - \sigma + g \varepsilon (T - 1), \quad (2.2)$$

$$\delta \dot{T} = D_T \nabla^2 T + (T_e - T) - \sigma \varepsilon, \quad (2.3)$$

де T_e – температура поверхні тертя, ε - зсувна складова відносних деформацій (безрозмірна змінна), σ – зсувна складова відносних напружень (Па), T – температура поверхні льоду (К), та параметри

$$\tau = \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\varepsilon}}, \delta = \frac{\tau_T}{\tau_{\varepsilon}}, \quad (2.4)$$

де τ_{ε} - час релаксації деформації (с), τ_{σ} - час релаксації напружень (с), τ_T - час релаксації температури (с). Також введена константа $g < 1$, яка чисельно дорівнює відношенню модуля зсуву розм'якшеного приповерхневого шару льоду G до його характерного значення G_0 .

У цьому дослідженні система рівнянь (2.1) – (2.3) описує нелінійну модель в'язкопружного середовища, яка фізично відображає розм'якшення тонкого

шару поверхні льоду при терті [21]. Важливо те, що розм'якшений приповерхневий шар льоду являє собою тверде тіло з великою густиною дефектів.

Обрана система рівнянь (2.1) - (2.3) описує особливості поведінки досліджуваних параметрів у неоднорідній системі диференціальних рівнянь, що функціонує в умовах граничного тертя, приклад яких зображений на рис. 2.1. На рис. 2.1 зображена система, яка складається із блока масою M , який знаходиться над шаром розм'якшеної речовини товщиною h , та прикріпленої до блока пружини із жорсткістю k . На блок вливає додаткове навантаження L та кінець пружини рухається зі швидкістю V .

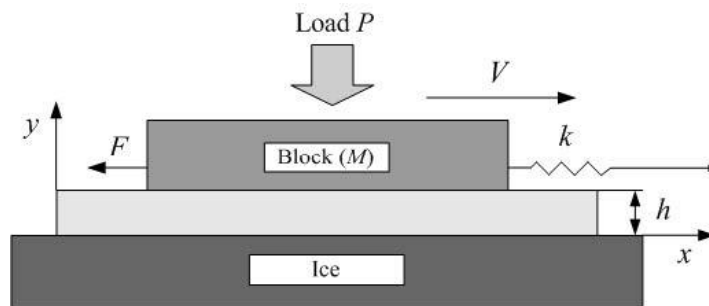


Рис. 2.1 – Приклад механічного аналогу системи.

2.2 Аналітичний розв'язок

У першопочатковому формулюванні система рівняння (2.1) – (2.3) не має розв'язку, тому для розв'язання цієї проблеми було використано адіабатичне наближення:

$$\tau_\varepsilon \gg \tau_T, \tau_\sigma. \quad (2.5)$$

Такий метод розв'язання проблем фізично обумовлений тим, що в процесі еволюції значення напружень $\sigma(t)$ та температури поверхні льоду $T(t)$ слідує за змінами зсувної деформації $\varepsilon(t)$.

Також було використано одномодове наближення, що замінило градієнтні внески таким відношенням $\nabla^2 \rightarrow \left(\frac{l}{L}\right)^2$ [22], де L - максимальне значення довжини теплопровідності, l - товщина плівки льоду.

Виконавши попередні умови та припущення можна приступити до пошуку аналітичного розв'язку системи (2.1) – (2.3). У рівняннях (2.2) та (2.3) ліву частину прирівнюємо до нуля та отримуємо вирази для напруження σ та температури T у залежності від деформації ε :

$$D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 \sigma - \sigma + g\varepsilon(T - 1) = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{g\varepsilon(T - 1)}{\left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right)}, \quad (2.6)$$

одразу ж підставимо вираз (2.6) у (2.3)

$$\begin{aligned} D_T \nabla^2 T + (T_e - T) - \frac{g\varepsilon^2(T - 1)}{\left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right)} = 0 &\Rightarrow D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 T + T_e - T - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 T - \\ - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T - \varepsilon^2 g T = -\varepsilon^2 g T; &\Rightarrow \\ \Rightarrow T = \frac{D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e - T_e - \varepsilon^2 g}{D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \varepsilon^2 g}. &\quad (2.7) \end{aligned}$$

Також щоб отримати значення напруження σ в залежності лише від деформації ε , підставимо (2.7) у (2.6):

$$\sigma = \frac{g\varepsilon \left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right) \left(D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e - T_e - \varepsilon^2 g - D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 1 + D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 + \varepsilon^2 g\right)}{D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \varepsilon^2 g}. \quad (2.8)$$

Для майбутнього чисельного розв'язання системи знайдемо стаціонарні значення напруження σ і температури T . У рівняннях (2.7) та (2.8) прийемо $\left(\frac{l}{L}\right)^2 = 0$, отримаємо такі вирази:

$$\sigma_0 = \frac{g\varepsilon_0(T-1)}{1+\varepsilon_0^2g}, \quad (2.9)$$

$$T_0 = \frac{T_e + \varepsilon_0^2g}{1 + \varepsilon_0^2g}. \quad (2.10)$$

Переходячи до рівняння (2.1), підставимо у нього знайденні вирази (2.7) та (2.8), враховуючи що $\varepsilon^2 \ll 1 + \left(\frac{l}{L}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & D_\varepsilon \nabla^2 \varepsilon - \varepsilon + g\varepsilon \left(1 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2\right) \left(D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 T_e - T_e - \varepsilon^2 g - D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 1 + \right. \\ & \left. + D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 - D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 + \varepsilon^2 g\right) \times \left(D_T \left(\frac{l}{L}\right)^2 - 1 - D_\sigma D_T \left(\frac{l}{L}\right)^4 + D_\sigma \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \varepsilon^2 g\right) = \\ & \dots = -\varepsilon(1 - g(\varepsilon g - T_e - \varepsilon^2 g T_e + 1)) + \varepsilon \left(\frac{l}{L}\right)^2 (D_\varepsilon + g(2D_\sigma - D_T T_e - 2D_\sigma T_e + \\ & + D_T \varepsilon^2 g + 2D_T - D_\sigma \varepsilon^2 g T_e)) + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^4 (2D_\sigma^2 T_e + 2D_\sigma D_T T_e - 2D_\sigma D_T \varepsilon^2 g - D_T^2 - \\ & - 6D_\sigma D_T - 2D_\sigma^2 + 2D_\sigma^2 \varepsilon^2 g) + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^6 (5D_\sigma^2 D_T - D_\sigma D_T T_e - D_\sigma^3 T_e - D_\sigma^2 D_T T_e + \\ & + D_\sigma^2 D_T \varepsilon^2 g + D_\sigma D_T^2 \varepsilon g + D_\sigma^3) + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^8 (D_\sigma^2 D_T T_e - D_\sigma^2 D_T^2 - D_\sigma^3 D_T) + \\ & + \varepsilon g \left(\frac{l}{L}\right)^{10} D_\sigma^3 D_T^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

У рівнянні (2.11) при зворотному переході від $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ до оператора ∇^2 , ми отримаємо, що $gT_e \approx 1$. З цього можна зробити висновок, що в межах нашої моделі похідна ∇ додає порядок малості, тому при порядках більше ніж другий вона нехтує значенням деформації ε , тому отримуємо таке рівняння:

$$\dot{\varepsilon} = -\varepsilon - \varepsilon^2 g^2 + \varepsilon T_e g + \varepsilon^3 g^2 T_e - \varepsilon g. \quad (2.12)$$

Щоб знайти стаціонарне значення деформації ε прирівняємо праву частину рівняння (2.12) до нуля та розв'яжемо кубічне рівняння

$$-\varepsilon - \varepsilon^2 g^2 + \varepsilon T_e g + \varepsilon^3 g^2 T_e - \varepsilon g = 0 | : g \Rightarrow$$

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2 g - \varepsilon(T_e - (1 + g^{-1})) = 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_{2,3} = \frac{g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 - (T_e - (1 + g^{-1}))}. \quad (2.13)$$

Виходячи з фізичної задачі та її умов, розв'язок $\varepsilon_1 = 0$ не підходить для моделі та чисельного розв'язку задачі. Тому у подальших розрахунках будемо враховувати $\varepsilon_{2,3}$.

Враховуючи попередні перетворення система (2.1) - (2.3) зводиться до залежного від часу рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\delta V_1}{\delta \varepsilon(y)}, V_1 = \int \left\{ \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} g^2 + \frac{\varepsilon^2}{z} T_e g + \frac{\varepsilon^4}{4} g^2 T_e - \frac{\varepsilon^2}{2} g \right) + \frac{1}{2} (\nabla \varepsilon D_t)^2 \right\} dy, \quad (2.14)$$

де $D_t = (D_\varepsilon + g(2D_\sigma - D_T T_e - 2D_\sigma T_e + D_T \varepsilon^2 g + 2D_T - D_\sigma \varepsilon^2 g T_e))$, що може бути записано в такій формі:

$$\dot{\varepsilon} = \nabla^2 \varepsilon D_t - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}. \quad (2.15)$$

В (2.15) синергетичний потенціал відповідає такому виразу:

$$V = (g(T_e - 1) - 1) \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} g^2 + \frac{\varepsilon^4}{4} g^2 T_e, \quad (2.16)$$

в якому виконується умова $g < 0.5$.

Якщо температура поверхонь, що труться T_e , менше критичного значення

$$T_c = 1 + g^{-1}, \quad (2.17)$$

тоді потенціал (2.16) приймає значення мінімуму, що відповідає стаціонарному значенню деформації $\varepsilon_0 = 0$, тому плавлення неможливе і відбувається перехід у твердоподібний стан.

В стаціонарному стані $\dot{\varepsilon} = 0$ рівняння (2.15) має перший інтеграл

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varepsilon}{dy} \right)^2 = V + |V_0|. \quad (2.18)$$

Враховується, що в упорядкованій фазі $y = -\infty$ та при виконанні умов $\varepsilon = \varepsilon_0, \nabla\varepsilon = 0$ необхідна рівність константи інтегрування до абсолютного значення синергетичного потенціалу V_0 при упорядкуванні:

$$V_0 \equiv V(\varepsilon_0) \cong -\frac{1}{2}(g(T_e - 1) - 1) \left(g^2 - (T_e - (1 + g^{-1})) \right) - \frac{g^2}{3} \left(-\frac{g}{2} \right)^3 + \\ + \sqrt{\left(\frac{g}{2} \right)^6 - (T_e - (1 + g^{-1}))^3} + \frac{g^2 T_e}{4} \left(g^4 - (T_e - (1 + g^{-1}))^4 \right). \quad (2.19)$$

Розв'язок рівняння (2.15), враховуючи стаціонарні умови показує, що розподіл зсувної деформації представляється

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \tanh \left(\frac{y_0 - y}{\xi} \right), \quad (2.20)$$

$$\xi^2 \equiv \frac{2}{gT_e - (g + 1)}, \quad (2.21)$$

де ξ - довжина кореляції введена для того щоб показати розбіжність при значенні T_c температури поверхні тертя T_e . Константа інтегрування $y_0 \gg \xi$ визначає ширину граничної області, в якій зсувна деформація прямує від стаціонарного значення до нуля. Використовуючи адіабатичне та одномодове наближення знайдено аналітичний солітонний розв'язок (2.20) одновимірного параболічного рівняння, графік якого зображений на рис. 2.2, що відображає розподіл зсувної деформації.

2.3 Чисельний розв'язок

2.3.1 Метод сіток та умови

Система рівнянь (2.1) - (2.3) представляє собою три одновимірні диференціальні параболічні рівняння в частинних похідних. Їх можна легко розв'язати за допомогою застосування явної двошарової різницевої схеми. При цьому вся потрібна для дослідження просторово-часова область розбивається сіткою та обраховується методом сіток. Розрахунок проводиться від початкового

моменту часу $t = 0$ до часу $t = t_N$, а координата при цьому $y \in [0, y_M]$. Необхідні для розв'язання початкові і граничні умови виберемо з фізичного представлення завдання, які представлені чорними точками на рис. 2.2. Індексом i будемо позначати шари по координаті, а індексом j – залежність від часу. На рис. 2.2 зображена сітка, яка задає просторове розбиття для чисельного розв'язання рівнянь (2.1) – (2.3) та отримання формули для явної різницевої схеми.

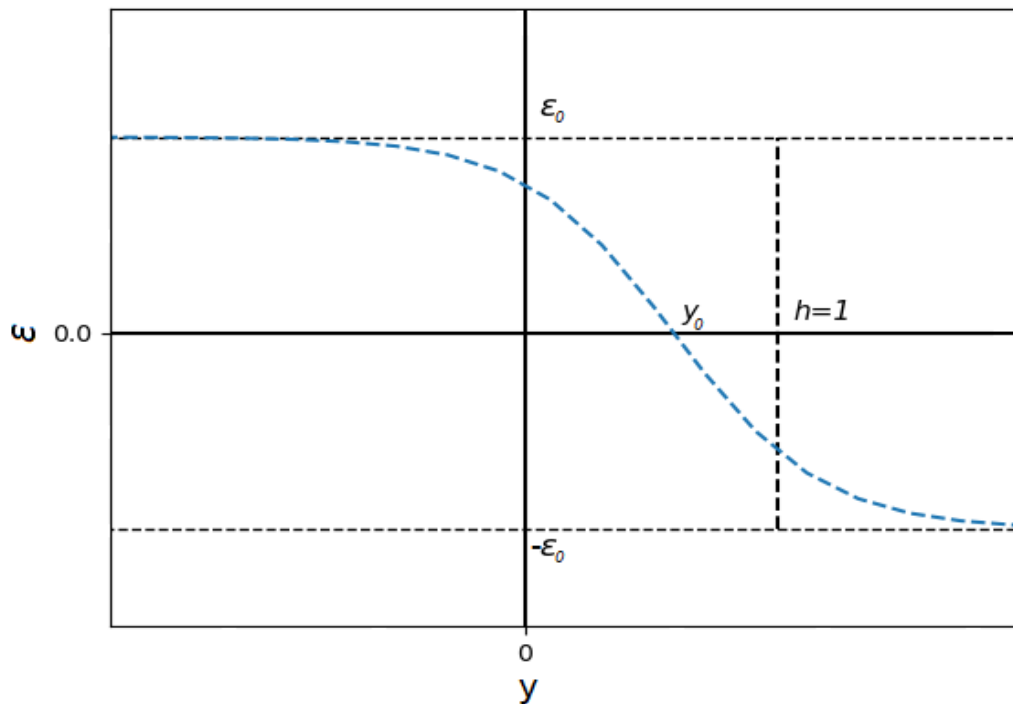


Рис. 2.2 – Координатна залежність зсувної деформації, отриманої при аналітичному розв'язку (2.20).

При використанні явної різницевої схеми похідні апроксимуються наступним чином (аналогічно для напруження σ та температури T):

$$\nabla^2 \varepsilon \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j}{H^2}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\Delta}, \quad (2.23)$$

де $\Delta = \frac{t_N}{N}$ – крок за часом, $H = \frac{y_M}{M}$ – крок по координаті, показує відстань між вузлами сітки по вертикалі та горизонталі, M – кількість кроків по координаті, N – кількість кроків по часу. Кінцеві розрахункові співвідношення приймають такий вигляд:

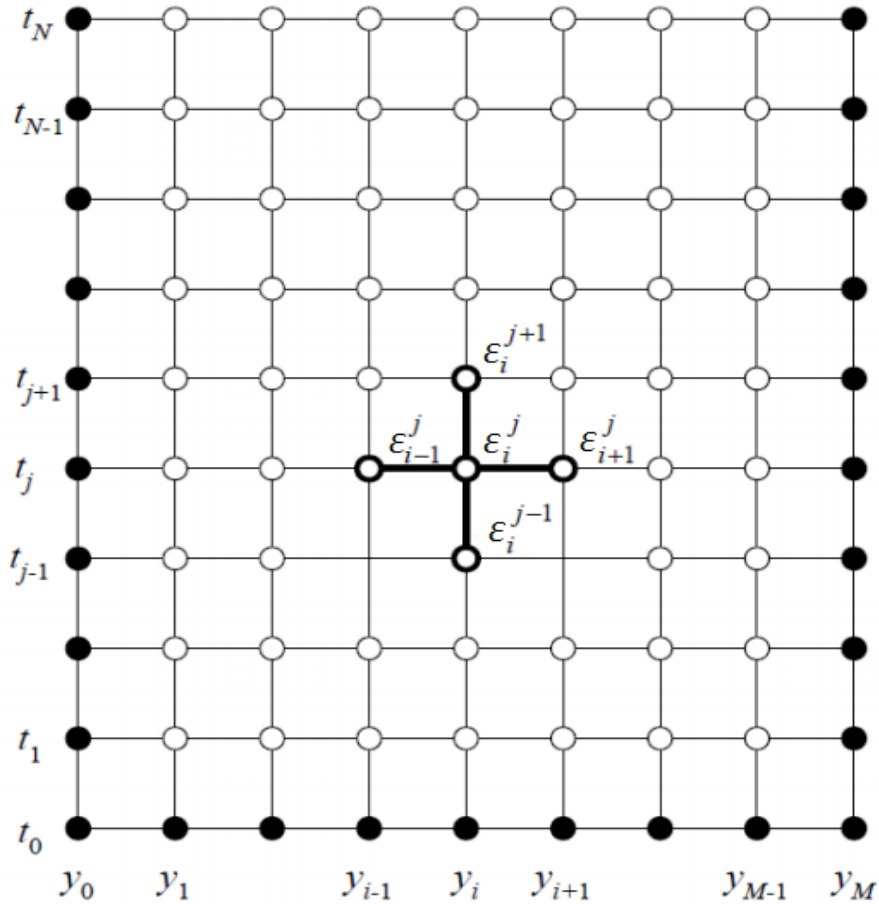


Рис. 2.3 – Сітка, яка задає просторове розбиття для чисельного розв’язання рівнянь (2.1) - (2.3) на прикладі деформації ε .

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \frac{\Delta}{H^2} [D_\varepsilon(\varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j) + H^2(-\varepsilon_j^i + \sigma_j^i)], \quad (2.24)$$

$$\sigma_i^{j+1} = \sigma_i^j + \frac{\Delta}{\tau H^2} [D_\sigma(\sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j) + H^2(-\sigma_j^i + g\varepsilon_i^j T_i^j - g\varepsilon_i^j)], \quad (2.25)$$

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta}{\delta H^2} [D_\sigma(T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) + H^2(T_e - T_i^j - \sigma_j^i \varepsilon_i^j)]. \quad (2.26)$$

Знаючи набір значень на попередньому часовому шарі $\varepsilon_i^j, \sigma_i^j, T_i^j$ система рівнянь (2.24) - (2.26) містить $3N(M - 1)$ рівнянь і дозволяє знайти $\varepsilon_i^{j+1}, \sigma_i^{j+1}, T_i^{j+1}$. Додаючи до (2.24) - (2.26) необхідний набір початкових умов в момент часу $t = 0$, які додають $3(M + 1)$ рівнянь, а також граничні умови, що додають $6N$ рівнянь, таким чином, загальна кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $3(M + 1)(N + 1)$.

При русі поверхонь тертя, відповідно до рівнянь (2.1) - (2.3), в однорідному випадку ($\nabla^2 \equiv 0$) встановлюються стаціонарні значення деформації ε_0 , напруження σ_0 , і температури T_0 :

$$\sigma_0 = \frac{g\varepsilon_0(T - 1)}{1 + \varepsilon_0^2 g}, T_0 = \frac{T_e + \varepsilon_0^2 g}{1 + \varepsilon_0^2 g}, \varepsilon_0 = \frac{g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 - (T_e - (1 + g^{-1}))}. \quad (2.27)$$

Розглянемо два найпоширеніші фізичні випадки. У першому з них верхня поверхня, що треться, рухається зі швидкістю V , а нижня з такою ж швидкістю рухається в протилежному напрямку. При цьому напруження, деформація і температура у верхній поверхні дорівнюватимуть σ_0, ε_0 і T_0 відповідно. Значення температури біля межі нижньої поверхні також буде дорівнювати T_0 , оскільки згідно з (2.27) $T_0 = T_e$, а T_e представляє температуру поверхонь тертя, які є термостатом (зовнішнім середовищем). Зважаючи на симетрію розглянутої задачі, то напруження і деформація поблизу нижньої поверхні дорівнюють $-\sigma_0$ і $-\varepsilon_0$ відповідно. Тому виберемо початкові умови параметрів по товщині приповерхневого шару льоду таким чином:

$$\varepsilon_i^0 = -\varepsilon_0 + \frac{2i\varepsilon_0}{M}, \sigma_i^0 = -\sigma_0 + \frac{2i\sigma_0}{M}, T_i^0 = T_0, i = 0, 1, \dots, M. \quad (2.28)$$

Граничні умови будуть мати такий вигляд:

$$\varepsilon_0^j = -\varepsilon_0, \varepsilon_M^j = \varepsilon_0, \sigma_0^j = -\sigma_0, \sigma_M^j = \sigma_0, T_0^j = T_M^j = T_0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.29)$$

У разі іншого випадку нижня поверхня жорстко закріплена і не рухається, а верхня зсувається тільки з фіксованою швидкістю. Напруження, деформація і

температура у верхній поверхні будуть також рівні σ_0 , ε_0 і T_0 , а на нижній виконуватиметься рівність $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0$, оскільки за рахунок взаємодії атомів поверхні з атомами приповерхневого шару льоду нижній шар прилипає до поверхні. Температура приповерхневого шару льоду біля нижньої межі обирається, як і раніше, рівною T_0 .

У цій фізичній ситуації початкові умови можна записати так:

$$\varepsilon_i^0 = \frac{i\varepsilon_0}{M}, \sigma_i^0 = \frac{i\sigma_0}{M}, T_i^0 = T_0 \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (2.30)$$

а граничні:

$$\varepsilon_0^j = 0, \varepsilon_M^j = \varepsilon_0, \sigma_0^j = 0, \sigma_M^j = \sigma_0, T_0^j = T_M^j = T_0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.31)$$

Координату y будемо вимірювати в одиницях товщини приповерхневого шару льоду h , її нижня границя дорівнює 0, а верхня 1. Таким чином, отримуємо замкнену систему рівнянь, що дає можливість на розв'язання поставленої задачі.

Для розв'язання обираємо крок по часу $\Delta = 10^{-6}$ та крок по координаті $H=0.01$. Отримуємо, що координата y ділиться на $M=100$ частин. Для переходу від зсувної деформації ε до статичної сили тертя використаємо формулу

$$F_e(t) = AG_\varepsilon \varepsilon(t), \quad (2.32)$$

де A – контактуюча площа (м^2), а G_ε – релаксований модуль зсуву. Приймаємо, що сила тертя вимірюється в одиницях AG_ε . Подібну формулу використаємо для переходу від напруження σ до кінетичної сили тертя

$$F_v(t) = A\sigma(t). \quad (2.33)$$

2.3.2 Результати

На наступних рисунках буде показана координатна залежність кінетичної сили тертя, статичної сили тертя та температури на різних часових шарах і еволюція системи до стаціонарного стану. На рис. 2.4 та 2.5 показані результати чисельного розв'язання обраних рівнянь. Рис. 2.4 відповідає випадку коли зсув поверхонь тертя відбувається у протилежних напрямках (використовуються

початкові умови (2.28) та граничні (2.29)), а рис. 2.5 відповідає ситуації, коли зсувається тільки верхня поверхня, а нижня у стані спокою (відповідно початкові умови (2.30) і граничні (2.31)). На обох графіках зображена еволюція за часом статичної сили тертя F_e , кінетичної сили тертя F_v та температури приповерхневого шару льоду T .

Криві наведені для 4 послідовних моментів часу. Штрихові лінії на рис. 2.4 і 2.5 представляють початкові умови, тобто описують просторовий розподіл величин в момент часу $t = 0$. Тому чим далі від штрихової лінії знаходиться крива на графіку, тим пізнішому моменту часу вона відповідає. Криві на обох малюнках відповідають часовим шарам 5000, 70 000 і 1 000 000. Враховуючи крок інтегрування за часом $\Delta = 10^{-6}$ отримаємо такі значення моменту часу $t = 0.005, 0.07, 1.0$. Остання крива, отримана для моменту часу $t = 1.0$, на обох рисунках з подальшим плином часу не змінює вигляд, тобто представляє стаціонарні значення. Як видно із рис. 2.4, 2.5 і вставок на них, статична сила тертя F_e змінюються з часом повільніше, ніж кінетична сила тертя F_v та температура. Це пов'язано з тим, що час релаксації деформації ε вибрано в 15 разів більшим, ніж часи релаксації двох інших параметрів. У цьому випадку виконується синергетичний принцип підпорядкування, коли зміни напруження σ і температури T йдуть за зміною деформації ε .

Зазначимо, що у рис. 2.4 криві симетричні щодо серединного приповерхневого шару льоду, в області у якій кінетична та статична сили тертя дорівнюють нулю. Це відбувається за рахунок того, що поверхні, які труться, зсуваються в протилежних напрямках з однаковими швидкостями. При цьому, відповідно до залежності $T(y)$, якщо рухатися від центру приповерхневого шару льоду у напрямку до будь-якої з поверхонь (в перпендикулярному до них напрямку), то температура T спочатку збільшується, а потім знову починає зменшуватись, поки біля поверхонь не прийме значення T_c . Залежності на рис. 2.5 фактично повторюють праву частину графіків, наведених на рис. 2.4 при $y > 0.5$, тобто розподіли, що спостерігаються на рис. 2.4 вище за центр системи. Це

цілком зрозуміло, тому що у випадку, показаному на рис. 2.5, нижня поверхня спочиває, і біля неї реалізуються значення $F_e = F_v = 0$, так само як і в серединному приповерхневому шару льоду на рис. 2.4.

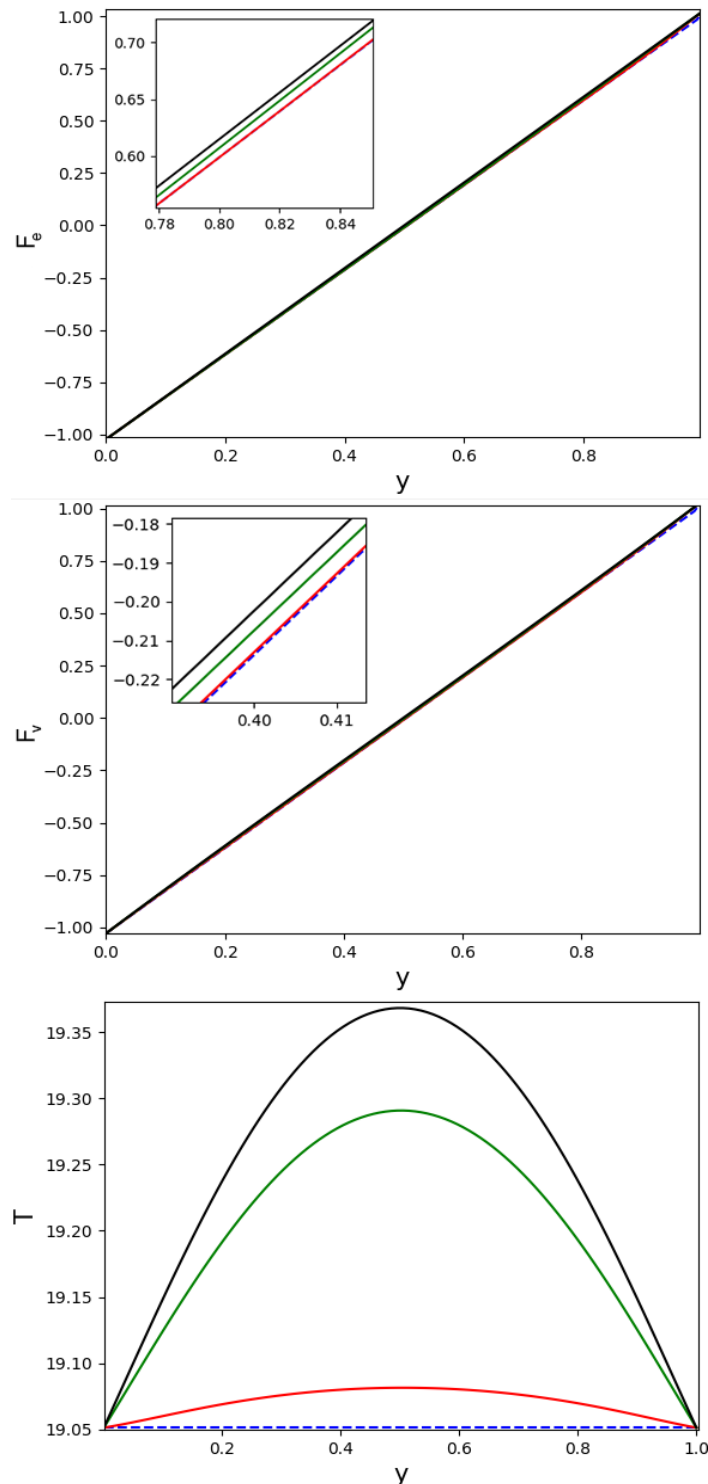


Рис. 2.4 – Координатні профілі залежності статичної F_e та кінетичної F_v сил тертя, температури T , отримані в результаті чисельного розв'язання рівнянь (2.1) – (2.3) з параметрами $g = 0.05$, $T_e = 20$, $\tau = \delta = 0.15$, $D_e = 0.4$, $D_\sigma = D_T = 0.2$ при початкових та граничних умовах (2.28) та (2.29).

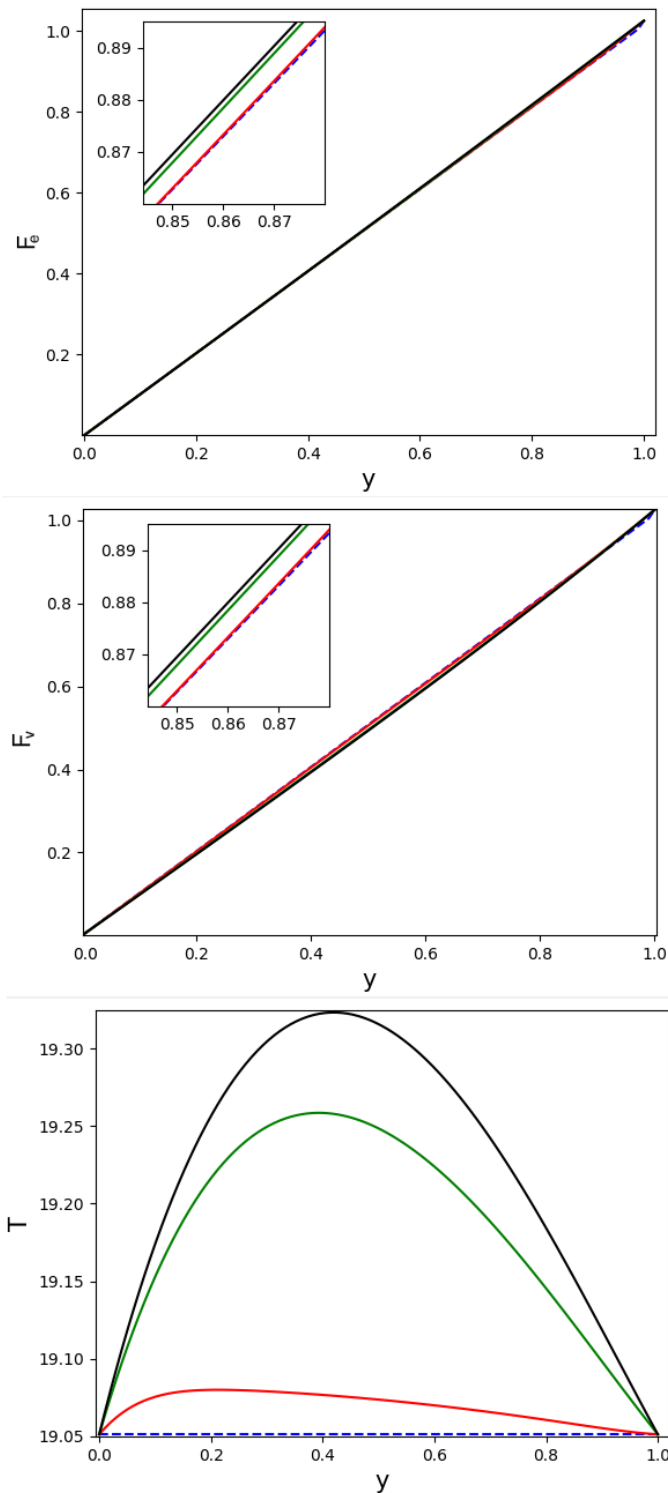


Рис. 2.5 – Координатні профілі залежності статичної F_e та кінетичної F_v сил тертя, температури T , отримані в результаті чисельного розв'язання рівнянь (2.1) – (2.3) з параметрами $g = 0.05$, $T_e = 20$, $\tau = \delta = 0.15$, $D_\varepsilon = 0.4$, $D_\sigma = D_T = 0.2$ при початкових та граничних умовах (2.30) та (2.31).

Рис. 2.4 і 2.5 при різному наборі параметрів D_σ , D_ε та D_T можуть показувати різну поведінку. Це в тому числі означає, що вид кривої статичної сили тертя F_e змінюється по товщині приповерхневого шару льоду. Рис. 2.4 і 2.5 показують часову еволюцію основних параметрів. Зазначимо, що залежно від початкових умов характер еволюції може бути дуже різним, але при фіксованих параметрах у результаті встановлюються стаціонарні розподіли величин F_e , F_v , T за товщиною приповерхневого шару льоду. Саме вони і визначають у результаті режим тертя.

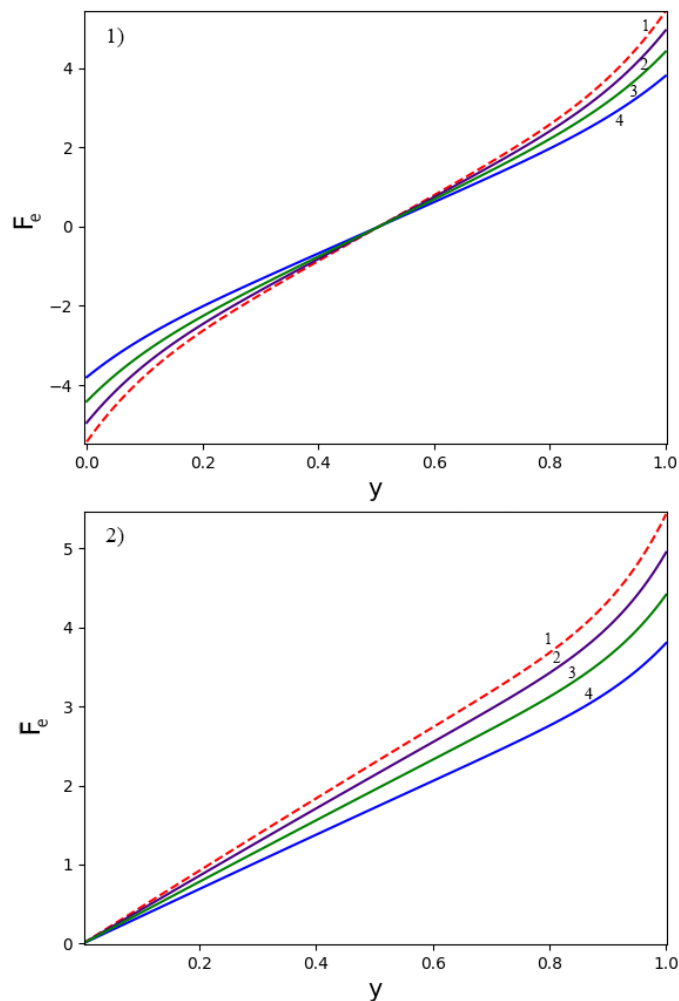


Рис. 2.6 – Координатна залежність стаціонарних профілів статичної сили тертя $F_e(y)$, отримана з використанням параметрів з рис. 2.3 та $D_\varepsilon = 0.03$, $D_\sigma = D_T = 0$. Криві 1-4 відповідають температурам $T_e = 5, 10, 15, 20$; 1) початкові та граничні умови (2.28) та (2.29); 2) початкові та граничні умови (2.30) та (2.31).

Для рис. 2.6 та 2.7 був обраний момент часу $t = 1$. На рис. 2.6 наведені стаціонарні розподіли статичної сили тертя F_e за товщиною приповерхневого шару льоду при різних температурах поверхонь T_e . Графіки демонструють той факт, що зі зростанням температури зростає відносна швидкість руху поверхонь, оскільки в'язкість приповерхневого шару льоду зменшується і вона стає рідкішою.

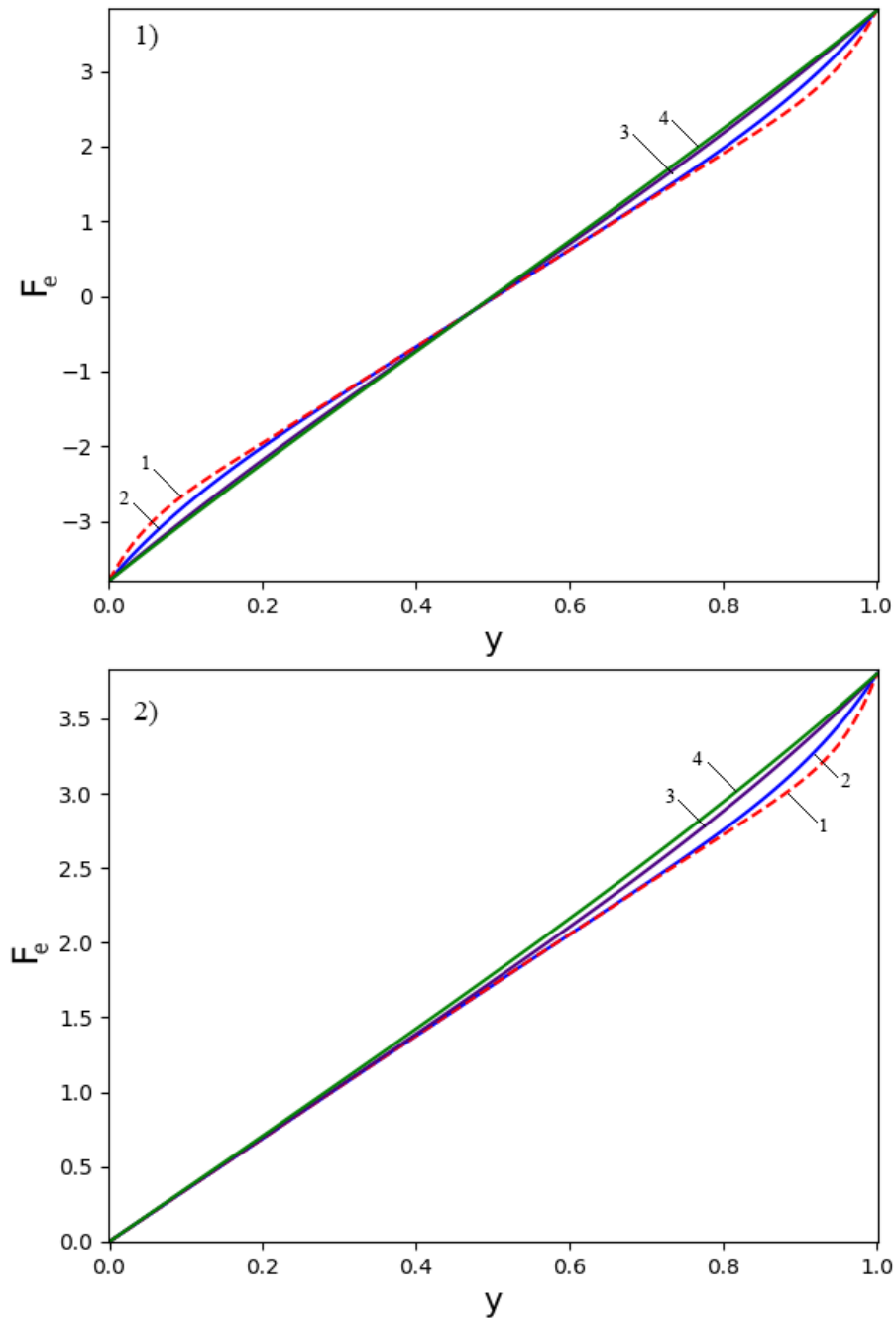


Рис. 2.7 – Координатна залежність стаціонарних профілів статичної сили тертя $F_e(y)$, отримані з використанням параметрів з рис. 2.3 та $D_\sigma = D_T = 0$, $T_e = 20$.

Криві 1-4 відповідають $D_\varepsilon = 0.01, 0.03, 0.3, 0.7$; 1) початкові та граничні умови (2.28) та (2.29); 2) початкові та граничні умови (2.30) та (2.31).

На рис. 2.7 показано вплив на режим тертя коефіцієнта D_ε при $D_\sigma = D_T = 0$. У цьому випадку встановлюються такі самі залежності, як і на попередніх рисунках. На графіках можна побачити, що зі збільшенням коефіцієнта D_ε приповерхневий шар льоду набуває ньютонівських властивостей, оскільки реалізується відповідна залежність $V(y)$. На рис. 2.7 добре видно, що при зменшенні коефіцієнта D_ε приповерхневий шар льоду твердне, оскільки зі збільшенням D_ε зростає товщина приповерхневого шару, який зсувається зі швидкістю, що дорівнює швидкості руху верхньої поверхні V_0 .

ВИСНОВКИ

1. Модель представлена системою трьох одновимірних диференціальних параболічних рівнянь в частинних похідних. На основі явної двошарової різницевої схеми записаний аналітичний вид чисельної процедури розв'язання рівнянь, включаючи початкові і граничні умови.
2. Побудовано розподіли поточних і стаціонарних значень статичної сили тертя, кінетичної сили тертя та температури. Розглядалися два випадки: 1) верхня і нижня поверхні рухаються з рівними за величиною швидкостями у протилежних напрямках; 2) верхня поверхня зсувається по нерухомій нижній.
3. Визначено залежності напружень, деформації та температури від координати в нормальному напрямку до поверхні на різних часових рядах. Показано, що з плином часу встановлюється стаціонарний розподіл сил тертя і температури по товщині приповерхневого шару льоду.
4. Значення кінетичної та статичної сил тертя у приповерхневому шарі льоду при віддаленні від поверхонь тертя монотонно зростають, тоді як координатна залежність температури має немонотонний вигляд.
5. Стаціонарні значення статичної сили тертя у приповерхневому шарі льоду при збільшенні температури поверхонь тертя зменшуються, що свідчить про перехід поверхні у більш рідиноподібний стан, при цьому координатна залежність має монотонно зростаючий вид.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. A. Khomenko, D. Logvinenko, Time series analysis of friction force at self-affine mode of ice surface softening // *Condensed Matter Physics*. – 2021. – V. 24, No. 4.
2. Alexei Khomenko, Denis Logvinenko, Periodic stick–slip mode of ice surface premelting during friction // *Physica B: Condensed Matter*. – V.618, 2021, 413160.
3. D.T. Logvinenko, A.V. Khomenko, Ya.V. Khyzhnya. Nonlinear model of ice surface softening during friction taking into account spatial heterogeneity of temperature // *Журнал нано- та електронної фізики*. Вип. 12 (4), 2020, С. 04002-1 - 04002-6.
4. Логвиненко Д. Т. Інформатика, математика, автоматика. *Моделювання кінетики фрагментації металів при мегапластичній (інтенсивній) деформації* : тези доп. наук.-тех. конф., м. Суми, 23-26 квіт. 2019 р. Суми, Сумський державний університет 2019. С. 197.
5. Логвиненко Д. Т. Інформатика, математика, автоматика. *Врахування просторової неоднорідності температури в нелінійній моделі розм'якшення поверхні льоду при терті*: тези доп. міжнар. наук.-тех. конф., м. Суми, 20-24 квіт. 2020 р. Суми, Сумський державний університет 2020. С. 237.
6. Хоменко О.В., Логвиненко Д.Т., Хоменко К.П., Синергетична модель розм'якшення поверхні льоду при терті з врахуванням просторової неоднорідності напруження, деформації та температури // *Матеріали науково-технічної конференції «Інформатика, математика, автоматика»*. - Суми, 2021. - С.191.
7. Feltham, D. L., 2005: Granular flow in the marginal ice zone. *Philos. Trans. Roy. Soc.*, A363, 1677–1700.
8. Gray, J., and L. W. Morland, 1994: A two-dimensional model for the dynamics of sea ice. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, A347, 219–290.
9. King, J. C., M. J. Doble, and P. R. Holland, 2010: Analysis of a rapid sea ice retreat event in the Bellingshausen Sea. *J. Geophys. Res.*, 115, C12030.
10. Hibler, W. D. I., 1979: A dynamic thermodynamic sea ice model. *J. Phys. Oceanogr.*, 9, 815–846.
11. Heorton, H., 2013: Jet formation at the sea ice edge. Ph.D. thesis, University College London, 160 pp.
12. Feltham D.L. 2008 Sea ice rheology. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 40, 91–112.
13. Tsamados M, Feltham DL, Wilchinsky AV., 2013: Impact of a new anisotropic rheology on simulations of Arctic sea ice. *J. Geophys. Res. Oceans* 118, 91–107.

14. Golding N, Schulson EM, Renshaw CE., 2010: Shear faulting and localized heating in ice: the influence of confinement. *Acta Mater.* 58, 5043–5056.
15. Dansereau V, Weiss J, Saramito P, Lattes P., 2016: A Maxwell elasto-brittle rheology for sea ice modelling. *Cryosphere* 10, 1339–1359.
16. Hutchings JK, Roberts A, Geiger CA, Richter-Menge J., 2018: Corrigendum: Spatial and temporal characterisation of sea-ice deformation.
17. Hunke C, Lipscomb WH, Turner AK, Jeffery N, Elliott SM., 2013: CICE: the Los Alamos sea ice model, Documentation and software, Version 5.0. Technical Report LA-CC-06-012, Los Alamos National Laboratory.
18. Wilchinsky AV, Feltham DL, Hopkins MA., 2010: Effect of shear rupture on aggregate scale formation in sea ice. *J. Geophys. Res.* 115, C10002.
19. Wilchinsky AV, Feltham DL, Hopkins MA., 2011: Modelling the reorientation of sea-ice faults as the wind changes direction. *Ann. Glaciol.* 52, 83–90.
20. Arthern, R., Vaughan, D. G., Rankin, A., Mulvaney, R., & Thomas, E. In situ measurements of Antarctic snow compaction compared with predictions of models. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2010, 115, F03011.
21. A. Khomenko, Self-Similar Mode of Ice Surface Softening During Friction. *Tribol. Lett.* 66, 82 (2018).
22. Khomenko, A.V., Khomenko, K.P., Falko, V.V.: Nonlinear model of ice surface softening during friction. *Condens. Matter Phys.* 19(3), 33002 (2016)

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt
import numpy as np

n=1000000
m=100
g=0.05
Te=20
h=0.01
delta=0.000001
eps_0 = g/2+sqrt((g/2)**2-(Te-(1+(1/g))))
sig_0 = g*eps_0*((2*g*(eps_0)**2+1+Te)/(1+g*(eps_0)**2))
T_0 = (Te+g*(eps_0)**2)/(1+g*(eps_0)**2)
De = 0.4
Ds = 0.2
Dt = 0.2
tau = 0.15
d = 0.15

A=[]
def fillEPS(A): # заповняємо матрицю початковими та граничними умовами
    znach = -eps_0 #2.28 та 2.29
    #znach = 0 # 2.30 та 2.31
    for i in range(0,n):
        A.append([])
        for j in range(0,m):
            if j == 0:
                A[i].append(-eps_0) #2.28 та 2.29
                #A[i].append(0) #2.30 та 2.31
            else:
                if j ==m-1:
                    A[i].append(eps_0) #2.28 та 2.29
                    #A[i].append(eps_0) #2.30 та 2.31
                else:
                    if i==0:
                        znach+=2*eps_0/m #2.28 та 2.29
                        #znach += eps_0 / m #2.30 та 2.31
                        A[i].append(znach)
                    else:
                        A[i].append(0)

EPS=[]
fillEPS(EPS)

def fillSIG(A): # заповняємо матрицю початковими та граничними умовами
    znach = -sig_0 #2.28 та 2.29
    #znach = 0 #2.30 та 2.31
```

```

for i in range(0,n):
    A.append([])
    for j in range(0,m):
        if j == 0:
            A[i].append(-sig_0) #2.28 ma 2.29
            #A[i].append(0) #2.30 ma 2.31
        else:
            if j ==m-1:
                A[i].append(sig_0) #2.28 ma 2.29
                #A[i].append(eps_0) #2.30 ma 2.31
            else:
                if i==0:
                    znach+=2*sig_0/m #2.28 ma 2.29
                    #znach += eps_0 / m #2.30 ma 2.31
                    A[i].append(znach)
                else:
                    A[i].append(0)

SIG=[]
fillSIG(SIG)

def fillT(A): # заповняємо матрицю початковими та граничними умовами
    znach = T_0
    for i in range(0,n):
        A.append([])
        for j in range(0,m):
            if j == 0:
                A[i].append(T_0)
            else:
                if j ==m-1:
                    A[i].append(T_0)
                else:
                    if i==0:
                        znach=T_0
                        A[i].append(znach)
                    else:
                        A[i].append(0)

T=[]
fillT(T)

for j in range(0,n-1):
    for i in range(1,m-1):
        EPS[j+1][i] = EPS[j][i] + delta*(De*(EPS[j][i+1] - 2.0*EPS[j][i] + EPS[j][i-1])
+ h*h*(-EPS[j][i] + SIG[j][i]))/(h*h)
        SIG[j+1][i] = SIG[j][i] + delta*(Ds*(SIG[j][i+1] - 2.0*SIG[j][i] + SIG[j][i-1])
+ h*h*(-SIG[j][i] + g*EPS[j][i]*T[j][i] - g*EPS[j][i]))/(tau*h*h)
        T[j+1][i] = T[j][i] + delta*(Dt*(T[j][i+1] - 2.0*T[j][i] + T[j][i-1]) +
h*h*(Te-T[j][i]-SIG[j][i]*EPS[j][i]))/(d*h*h)

E0=[]
S0=[]
T0=[]

```

```

for i in range(0,m):
    chisl=EPS[0][i]
    E0.append(chisl)
    chisl = SIG[0][i]
    S0.append(chisl)
    chisl = T[0][i]
    T0.append(chisl)
E500=[]
S500=[]
T500=[]
for i in range(0,m):
    chisl = EPS[4999][i]
    E500.append(chisl)
    chisl = SIG[4999][i]
    S500.append(chisl)
    chisl = T[4999][i]
    T500.append(chisl)
E2500=[]
S2500=[]
T2500=[]
for i in range(0,m):
    chisl = EPS[69999][i]
    E2500.append(chisl)
    chisl = SIG[69999][i]
    S2500.append(chisl)
    chisl = T[69999][i]
    T2500.append(chisl)
E50000=[]
S50000=[]
T50000=[]
for i in range(0,m):
    chisl = EPS[999999][i]
    E50000.append(chisl)
    chisl = SIG[999999][i]
    S50000.append(chisl)
    chisl = T[999999][i]
    T50000.append(chisl)
y = np.linspace(0, 1, 100)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(y, E0, "--", color="blue")
ax.plot(y, E500, color="red")
ax.plot(y, E2500, color="green")
ax.plot(y, E50000, color="black")
plt.xlabel("y", fontsize=15)
plt.ylabel("Epsilon", fontsize=15)
plt.show()
fig1, ax1 = plt.subplots()
ax1.plot(y, S0, "--", color="blue")
ax1.plot(y, S500, color="red")
ax1.plot(y, S2500, color="green")
ax1.plot(y, S50000, color="black")
plt.xlabel("y", fontsize=15)
plt.ylabel("Sigma", fontsize=15)

```

```
plt.show()
fig2, ax2 = plt.subplots()
ax2.plot(y, T0, "--", color="blue")
ax2.plot(y, T500, color="red")
ax2.plot(y, T2500, color="green")
ax2.plot(y, T50000, color="black")
plt.xlabel("y", fontsize=15)
plt.ylabel("T", fontsize=15)
plt.show()
```