Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Навчально-науковий інститут
бізнесу, економіки і менеджменту

Коломієць С.В., Діденко І.В.

КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ

Конспект лекцій

У двох частинах

Частина 1

Суми
Сумський державний університет
2022

Кількісні методи в економіці : конспект лекцій : у 2 ч. / укладачі: С. В. Коломієць, І. В. Діденко. – Суми : Сумський державний університет, ННІ БіЕМ, 2022. – Ч. 1. – 153 с.

Кафедра економічної кібернетики

ЗМІСТ **С.**

ВСТУП

Конспект лекцій у двох частинах складено відповідно до програми навчальної дисципліни «Кількісні методи в економіці» для студентів економічних спеціальностей освітнього ступеня «бакалавр» денної та заочної форм навчання.

Метою навчальної дисципліни «Кількісні методи в економіці» є забезпечення ґрунтовного засвоєння основ математичного апарату, необхідного для розв’язування теоретичних і прикладних завдань економіки та управління, побудови економіко-математичних моделей та їхнього аналізу.

Математичні методи дозволяють отримати більш повні, глибокі знання про кількісні та якісні сторони економічних явищ і процесів. Здебільшого математичні методи використовують для розв’язання класичних задач оптимізації, імітації, прогнозування.

Перша частина конспекту лекцій містить матеріал, у якому розкрито теми змісту дисципліни «Кількісні методи в економіці»:

1. Теоретичні основи кількісних методів моделювання та прогнозування економічних процесів.
2. Методи і моделі лінійної алгебри: елементи теорії матриць і визначників.
3. Методи і моделі лінійної алгебри: загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
4. Методи і моделі векторної алгебри та аналітичної геометрії.
5. Граничний аналіз в економіці.
6. Методи і моделі диференціального числення функції багатьох змінних в економіці.
7. Оптимізаційні моделі економіки.

Теми 5, 6 запропоновано студентам для самостійного вивчення.

Матеріал першої частини конспекту лекцій є базовим для подальшого вивчення навчальної дисципліни «Кількісні методи в економіці» та засвоєння інструментарію, що використовують під час кількісного аналізу економічних процесів та прогнозування. Автори під час складання конспекту лекцій мали на меті забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного курсу з «Кількісних методів в економіці», сприяти розвитку навичок щодо використання математичних методів в економіці.

У конспекті лекцій насамперед викладено основний теоретичний матеріал (означення, твердження, теореми тощо), запропоновано приклади розв'язування типових задач. Наприкінці кожної теми наведені питання для самоперевірки засвоєння матеріалу.

Рекомендована література допоможе читачеві поглибити та поширити власну поінформованість із питань, що його зацікавили.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КІЛЬКІСНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

План

1.1 Кількісні методи в економічних дослідженнях.

1.2 Історія застосування математичних методів в економіці.

1.3 Теоретичні засади математичного моделювання та класифікація моделей.

1.4 Порядок побудови економіко-математичних моделей.

1.1 Кількісні методи в економічних дослідженнях

Застосування кількісних методів і математичних моделей в економіці набуває останнім часом усе більшого значення для успішної підприємницької діяльності, розроблення оптимальної стратегії у великому та малому бізнесі, в ефективному управлінні фінансовими ресурсами тощо.

Математичні методи є потужним апаратом для більш глибокого аналізу економічних процесів і явищ. Специфіка математичних методів полягає в тому, що вони не можуть обмежуватися лише однією сферою, а проникають в усі економічні сфери та можуть бути використані для аналізу різних економічних процесів і явищ. Математичні моделі є спрощеним поданням ситуації, але навіть ідеалізація нерідко дозволяє глибше вникнути в суть проблеми та дослідити економічний процес. Здійснюючи вплив на параметри моделі (вибираючи їх, керуючи ними), можна провести якісний аналіз економічного процесу, зробити висновки загального характеру.

Як свідчить економічна теорія, в економіці діють певні стійкі кількісні закономірності, які можуть бути математично описані. Кількісні методи в економічному дослідженні – поняття дуже широке, яке охоплює різні підходи, інструменти, способи вимірювання, опису, аналізу та прогнозування економічних явищ і процесів. Серед кількісних методів – різноманітні статистичні методи оброблення соціально-економічних даних, мікро- та макроекономічні моделі з відповідним математичним апаратом тощо.

Історично склалося так, що кількісні методи – це, насамперед, методи вимірювання, які завжди були в економіці. Але кількісні методи – це не тільки засоби математичної інтерпретації економічних законів і процесів, це математичний інструментарій, який дозволяє виявити та теоретично сформулювати економічні закони, ухвалювати оптимальні рішення.

Загалом, економіко-математичні методи стають важливим інструментом отримання більш глибоких і повних знань про кількісні та якісні сторони економічного механізму тих чи інших процесів і явищ. Здебільшого кількісні методи використовують для побудови економіко-математичних моделей, розв’язання класичних задач оптимізації, прогнозування, імітації.

Серед основних труднощів застосування – забезпечення адекватності моделі до об’єкта дослідження.

Згідно з економічною енциклопедією, кількісні методи в економіці – це сукупність методів оброблення статистичних даних для теоретичного аналізу законів розвитку економічної системи і регулювання макро- та мікроекономічних процесів.

Основні кількісні методи в економіці:

– облік виробництва, обміну, розподілу і споживання продукції та витрат ресурсів у натуральному і грошовому вираженні;

– статистичні;

– моделювання економічних процесів.

Застосування кількісних методів в економіці ґрунтується на засвоєнні необхідної бази математичних знань. Використання кількісних методів в економіці не надає однозначних відповідей чи рекомендацій, проте сприяє проведенню імітаційних розрахунків із використанням моделей під час вибору різноманітних співвідношень параметрів або сценаріїв дій. Для того, щоб зрозуміти, як використовують кількісні методи для аналізу економіки, необхідно досконало знати основи вищої математики, теорії ймовірностей і математичної статистики.

У структурі економіко-математичних методів можна виділити дисципліни та їхні розділи, які становлять теоретичну основу математичного моделювання:

– економічну кібернетику (системний аналіз економіки, теорію економічної інформації тощо);

– економетрику (кореляційний аналіз, регресійний аналіз, багатомірний аналіз, факторний аналіз, дисперсійний аналіз тощо);

– математичну економіку (теорію економічного росту, теорії виробничих функцій, міжгалузеві баланси, національні рахунки, аналіз попиту та пропозицій, глобальне моделювання тощо);

– методи дослідження операцій (математичне програмування, теорію масового обслуговування, методи керування запасами, теорію ігор тощо);

– експертні методи економіки (математичні методи аналізу і планування економічних експериментів, імітаційне моделювання, ділові ігри, методи експертних оцінок тощо);

– методи прогнозування.

Різноманітність математичних методів можна звести до трьох основних видів: аналітичних, графічних і чисельних.

За допомогою аналітичних методів з’являється можливість провести дослідження в загальному вигляді, незалежно від чисельних параметрів системи. Отримані характеристики моделі в аналітичній формі та виявлені аналітичні залежності дозволяють використовувати інші методи, зокрема методи оптимізації, та отримати співвідношення, які характеризують поведінку системи під час зміни її параметрів. Проте через громіздкість аналітичних виразів або неможливість їхнього отримання, складність розв’язування алгебраїчних рівнянь вищих порядків тощо, аналітичні методи застосовують лише для найпростіших моделей.

Графічні методи наочні, зручні, якщо не вимагають високої точності, або коли інтерес становить якісна картина процесів. В економіці графічні методи здебільшого використовують під час статистичного оброблення результатів спостережень. Проте їхнє застосування обмежено можливостями побудови на площині або в тривимірному просторі.

Особливістю чисельних методів є те, що схему обчислень задають формулою або точним алгоритмом, виконання якого призводить до бажаного результату. З розвитком обчислювальної техніки чисельні методи стали незамінним засобом під час вивчення економічних явищ і процесів.

Зауважимо, що поєднання методів математичного моделювання та програмних продуктів, засобів комп'ютерної техніки є головним інструментом використання кількісних методів в економіці.

1.2 Історія застосування математичних методів в економіці

Сучасна економічна теорія як на мікро-, так і на макрорівні, містить як необхідний елемент математичні моделі й методи. Використання математики в економіці дозволяє виділити й формально описати найбільш істотні зв'язки економічних змінних і об'єктів. Із сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна одержати висновки, адекватні досліджуваному об'єкту. Методами математики й статистики можна визначити кількісті залежності, притаманні економічному об'єкту чи процесу. Врешті-решт, використання мови математики дозволяє точно й компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття й висновки.

Математичні моделі почали використовуватися під час дослідження економіки досить давно. Прагнення використовувати математику як засіб дослідження в економіці виявив один із засновників економічної науки – Уільям Петті (1623–1687), який у передмові до наукової роботи «Політична арифметика» зазначав, що він обрав незвичайний спосіб дослідження, оскільки замість того, щоб використовувати слова тільки в порівняльному ступені та користуватися умоглядними аргументами, він намагається висловлювати свої думки мовою чисел.

Першою у світі моделлю в економіці вважають модель французького вченого, лейб-медика короля Людовика XV Франсуа Кене (1694–1774), який у 1758 році опублікував роботу «Економічні таблиці», де була зроблена спроба кількісно описати національну економіку.

Засновником математичної школи в економіці вважають французького вченого О. Курно (1801–1877). У 1838 році він опублікував наукову роботу «Дослідження математичних принципів багатства», де вперше було використано кількісні методи для аналізу конкуренції на ринку товарів за різних ринкових ситуацій. Наступними роками відбувалась інтенсивна математизація економічної теорії. Помітний внесок у становлення математичної школи економічної теорії зробили Г. Госсен (1810–1858), Л. Вальрас (1834–1910), У. Джевонс (1835–1882), Ф. Еджворд (1845–1926), В. Парето (1848–1923), В. Дмитрієв (1868–1913).

Засновники математичної школи розглядали математичні методи, математичне моделювання зв’язків між елементами економічної системи саме як метод дослідження, а не як методи ілюстрації економічних законів і положень. Представники математичної школи намагалися за допомогою математичних методів досліджувати весь економічний процес загалом, отримати загальну картину взаємозв’язків усіх явищ господарської діяльності, законів рівноваги економічної системи.

Особливе місце в економіко-математичних дослідженнях належить роботам з теорії збалансованого бюджету споживача Євгена Слуцького (1880–1958), теорії довгих хвиль Миколи Кондратьєва (1892–1938), економічним моделям Василя Леонтьєва (1905–1999), теорії оптимального виробничого планування Леоніда Канторовича (1912–1986) тощо.

Кінець XX та початок XXI століття свідчить про високі темпи розвитку теорії та практики економіко-математичного моделювання. Переважна частина робіт з економіки, що отримали Нобелевську премію, мала економіко-математичне спрямування.

1.3 Теоретичні засади математичного моделювання та класифікація моделей

Моделювання – це універсальний спосіб дослідження процесів і явищ реального світу. Особливе значення моделювання набуває під час вивчення об'єктів, недоступних прямому вивченню або дослідженню, зокрема під час дослідження соціально-економічних явищ і процесів. Моделювання завжди має цільову спрямованість. Розрізняють: вербальне моделювання, геометричне моделювання, фізичне та інформаційне моделювання.

Вербальне моделювання – моделювання на основі використання розмовної мови.

Геометричне моделювання здійснюють на макетах або об'єктних моделях. Ці моделі передають просторові форми об'єкта, пропорції тощо.

Фізичне моделювання застосовують під час вивчення фізико-хімічних, технологічних, біологічних процесів, які відбуваються в оригіналах.

Інформаційне моделювання має фундаментальне значення в різних галузях науки: схеми, графіки, формули, рівняння, нерівності тощо.

Важлива роль серед методів інформаційного моделювання належить математичному моделюванню, моделюванню через застосування математичного апарату. Дослідження будь-якого об'єкта передбачає розкриття не тільки якісних, але й кількісних закономірностей, які і вивчають у математиці. Зокрема це стосується і економіки.

Економіко-математична модель – концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об’єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей, рівнянь тощо.

Математична модель – це об’єкт, який створює системний аналітик для отримання нових знань про об’єкт-оригінал, і який відображає лише суттєві, з погляду системного аналітика, властивості об’єкта-оригіналу.

Параметри, що описують економічні об’єкти, входять до моделі як відомі або невідомі величини. Відомі величини розраховують поза межами моделі і вводять у модель у готовому вигляді (екзогенні величини). Ендогенні (внутрішні) величини – це величини, які визначають внаслідок дослідження моделі.

Модель вважається адекватною об’єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення, на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу, відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи в зовнішньому середовищі.

Класифікують економіко-математичні моделі за різними ознаками.

За ознаками цільового призначення виділяють теоретичні та прикладні моделі.

Теоретичні моделі застосовують для вивчення загальних закономірностей і властивостей економічної системи.

Прикладні моделі надають можливість визначати та оцінювати параметри функціонування конкретних економічних об’єктів і надавати рекомендації щодо ухвалення практичних господарських рішень.

За ознакою масштабу (величини) об’єкта, що досліджують, моделі поділяють на макроекономічні та мікроекономічні.

Макроекономічні моделі описують економіку держави як єдине ціле, пов’язуючи між собою укрупнені матеріально-речовинні й фінансові показники: валовий національний продукт, національний дохід, сукупний попит, сукупні витрати, інвестиції, зайнятість, інфляцію, процентну ставку, кількість грошей тощо.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або господарську поведінку окремої такої складової (галузі, регіону, фірми, споживача тощо).

За ознакою характеру залежності від часу виділяють статистичні та динамічні моделі.

Статистичні моделі – моделі, у яких значення всіх параметрів належать до одного проміжку часу.

Динамічні моделі – моделі, у яких параметри змінюються з часом.

За ознакою способу відображення часу виділяють неперервні та дискретні моделі.

Неперервні моделі – моделі, у яких час розглядають як неперервний фактор.

Дискретні моделі – моделі, у яких час розглядають як квантовий (дискретний) фактор.

За ознакою відображення причинно-наслідкових зв’язків виділяють детерміновані, стохастичні та теоретико-ігрові моделі.

Детерміновані моделі – моделі, у яких існують функціональні зв’язки.

Стохастичні моделі допускають наявність випадкового впливу на досліджувані показники та використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики.

Теоретико-ігрові моделі враховують вплив факторів, які мають більш високий ступінь невизначеності, ніж стохастична.

Найбільш поширеними та ефективними математичними методами, які використовують під час теоретичних і прикладних економічних досліджень є диференціальне числення, математична статистика, лінійна алгебра, математичне програмування, теорія графів, теорія ймовірностей і теорія ігор.

1.4 Порядок побудови економіко-математичних моделей

Математичне моделювання економічних процесів і явищ потребує широкого діапазону математичних теорій і методів. Застосування математичного апарату в економіці обґрунтовано засвоєнням необхідної бази математичних знань. Кількісні методи в економіці – методологічний інструмент у професійній діяльності економістів-аналітиків, який допомагає їм провести комплексний економічний аналіз і спрогнозувати наслідки ухвалених управлінських рішень, обґрунтувати ухвалення рішення.

Потрібно зазначити, що інструментарій математичного моделювання не дає однозначних відповідей чи рекомендацій, проте сприяє проведенню імітаційних розрахунків із використанням моделей у разі вибору різноманітних співвідношень параметрів або сценаріїв дій.

Порядок побудови економіко-математичної моделі:

– визначають об’єкт дослідження – економіка держави загалом, галузь, підприємство, певний соціально-економічний процес тощо;

– формулюють мету дослідження;

– у досліджуваному об’єкті виділяють структурні та функціональні елементи, найбільш істотні якісні характеристики цих елементів, які впливають на досягнення поставленої мети;

– вводять символічні позначення характеристик економічного об’єкта; визначають ендогенні та екзогенні, залежні та незалежні, відомі та невідомі змінні;

– формалізують взаємозв’язки між окремими параметрами моделі, тобто будують власне економіко-математичну модель;

– проводять розрахунки за моделлю та аналізують отримані результати;

– якщо результати є незадовільними з погляду адекватності досліджуваного процесу або явища, то повертаються до одного з пунктів і процес повторюється.

2 МЕТОДИ І МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ: ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ І ВИЗНАЧНИКІВ

План

2.1 Матриці. Основні види матриць

Поняття матриці має велике значення для економістів, бо значну частку математичних моделей економічних процесів записують у матричній формі.

Означення. Матрицею порядку називається прямокутна таблиця чисел, що містить m і n стовпців

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елемент матриці A розташований у i-му рядку та j-му стовпці, позначають a_{ij}.

Означення. Дві матриці A і B називаються рівними, якщо вони мають однаковий розмір і їхні відповідні елементи рівні

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Розглянемо основні види матриць.

Матриця-рядок – це матриця, яка складається лише з одного рядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Матриця-стовпець – це матриця, яка складається лише з одного стовпця

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Квадратною матрицею порядку n називається матриця, яка має n рядків і n стовпців

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці, у яких номер рядка дорівнює номеру стовпця, утворюють **головну діагональ матриці**: $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_n$.

Квадратна матриця, у якої тільки елементи, що стоять на головній діагоналі, не дорівнюють 0, називається **діагональною**.

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють 1, то матриця називається **одиничною** (позначається *E*).

Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд:

$$
E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Матриця, усі елементи якої дорівнюють 0, називається **нульовою** (позначається *O*).

Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі її елементи, розміщені під головною діагоналлю або над нею, дорівнюють нулю. Верхня трикутна матриця та нижня трикутна матриця мають відповідно вигляд

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

2.2 Операції над матрицями. Властивості операцій над матрицями

Додавання матриць

Означення. Сумою двох матриць A і B однакового розміру називається матриця C, кожен елемент якої визначається співвідношенням

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриці на число

Означення. Добутком матриці A на число λ називається матриця $B = \lambda A$, кожен елемент якої визначається співвідношенням

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, тоді $3A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}$.

Добуток матриць

Перемножити дві матриці можна тільки тоді, коли кількість стовпців першого множника (матриці) дорівнює кількості рядків другого множника (матриці).

Означення. Добутком матриці $A(m; n)$ на матрицю $B(n; p)$ називається матриця $C(m; p)$ кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Наприклад, задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Знайти AB і BA.

Оскільки A і B – квадратні матриці одного розміру, то існують добутки AB і BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 3\cdot 2 & 1\cdot 4 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 2 & 2\cdot 4 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 13 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 4\cdot 2 & 0\cdot 3 - 4\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 3\cdot 2 & -2\cdot 3 - 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Загалом, $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються переставними (комутативними).

Роль одиниці в разі знаходження добутку матриць відіграє одинична матриця, тобто $AE = EA = A$.

Цілим m **степенем квадратної матриці** A називається добуток m матриць, кожна з яких дорівнює A

$$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$$

За означенням $A^0 = E$, $A^1 = A$.

Можна показати, що $A^n \cdot A^m = A^{m+n}$, $\left(A^m\right)^n = A^{mn}$.

Властивості операцій над матрицями

1. $A + B = B + A -$ комутативність додавання.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C -$ асоціативність додавання.

3. $(AB)C = A(BC)$ − асоціативність множення.

4. $(A+B)C = AC + BC$ − дистрибутивність множення відносно додавання.

5. $A(B+C) = AB + AC.$

6. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B.$

7. $\lambda(AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B).$

Транспонування матриць

Транспонуванням матриці називається заміна її рядків на стовпці зі збереженням порядку їхнього запису. Операцію транспонування позначають буквою *T, tr* у показнику степеня або штрихом.

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -8 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.

Діагональна матриця внаслідок транспонування не змінюється. Зокрема, для одиничної матриці маємо $E^T = E.$

Матриця A називається **симетричною**, якщо $A^T = A,$ і **кососиметричною**, якщо $A^T = -A.$

Для елементів a_{ij} симетричної матриці виконується рівність

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, ..., n).$$

Для елементів a_{ij} кососиметричної матриці виконується рівність

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, ..., n).$$

У кососиметричної матриці діагональні елементи дорівнюють нулю, оскільки $a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, ..., n).$

Наприклад, матриця A є симетричною, а матриця B – кососиметричною

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування

1. $\left(A_{tr}\right)_{tr}=A.$
2. $\left(\lambda A\right)_{tr}=\lambda\cdot A_{tr}.$
3. $\left(A+B\right)_{tr}=A_{tr}+B_{tr}.$
4. $\left(AB\right)_{tr}=B_{tr}\cdot A_{tr}.$

2.3 Поняття про блочні матриці

Матриця, що має більш як один рядок і стовпець, може бути розбита на блоки прямими, проведеними між рядками і (або) стовпцями, тобто записана у вигляді блочної матриці

$$X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix},$$

де блоки X_{ij}, Y_{ij} $(i, j=1, 2)$ самі є матрицями, які називаються **підматрицями**.

Розіб’ємо матрицю X на блоки горизонтальними та вертикальними лініями

$$X=\left(\begin{array}{cc:cc}x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ \hdashline x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}\\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{array}\right)$$

і позначимо

$$X_{11} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad X_{12} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{pmatrix};$$

$$X_{21} = \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}, \quad X_{22} = \begin{pmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Матрицю Y подамо в такому самому вигляді. Утворені матриці можна додати одну до одної або перемножити, оперуючи з підматрицями так, як з елементами цих матриць.

Додавши матриці X і Y, отримаємо

$$X + Y = \left(\begin{array}{c:c} X_{11} + Y_{11} & X_{12} + Y_{12} \\ \hdashline X_{21} + Y_{21} & X_{22} + Y_{22} \end{array}\right).$$

Унаслідок множення матриць X і Y отримаємо

$$XY = \left(\begin{array}{c:c} X_{11} & X_{12} \\ \hdashline X_{21} & X_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} Y_{11} & Y_{12} \\ \hdashline Y_{21} & Y_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} \\ \hdashline X_{21}Y_{11} + X_{21}Y_{21} & X_{21}Y_{12} + X_{22}Y_{22} \end{array}\right).$$

Наведемо приклад використання теорії матриць. Нехай підприємство з m видами ресурсів (кількість ресурсів) виготовляє n видів продукції (кількість товарів). На виробництво однієї одиниці j-го виду продукції використовують a_{ij} одиниць i-го виду ресурсу (a_{ij} – норма витрат (кількість одиниць) i-го ресурсу, які необхідні для виробництва одиниці j-го товару).

Тоді матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею норм витрат (технологічною матрицею).

Нехай b_i – максимальна кількість одиниць i-го ресурсу, що можна використати у виробництві, x_j – запланований рівень виробництва одиниць j-го товару, c_j – прибуток від реалізації одиниці j-го товару.

Загальна кількість одиниць i-го ресурсу, що використовують у виробництві згідно із планом, дорівнює

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \; i = 1, 2, \dots, m.$$

Оскільки вона не повинна перевищувати максимальної кількості одиниць i-го ресурсу, яку можна використати у виробництві, то

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i \text{, де } x_j \ge 0.$$

Якщо перейти до матричної форми, отримаємо нерівність

$$AX \le B,$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Якщо вказана нерівність виконується, тоді план є допустимим.

Загальний прибуток визначають як

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n ,$$

або

$$Z = CX \text{ , де } C = \left(c_1 \; c_2 \; \ldots \; c_n \right).$$

З економічного погляду завдання полягає в тому, що треба так запланувати виробництво товарів, щоб загальний прибуток був максимальним (задача лінійного програмування).

2.4 Визначники квадратних матриць

Означення. Визначником квадратної матриці 2-го порядку називається число, яке обчислюють за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

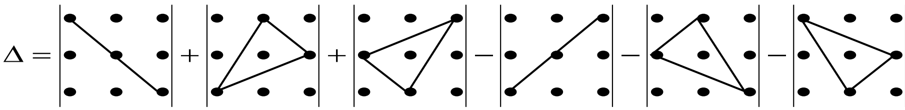
Наприклад, $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - \left(-2\right) \cdot 1 = 28 + 2 = 30.$

Поняття «визначник» (від латинського determino – визначаю) ввів німецький математик Г. В. Лейбніц (1646 – 1716).

Означення. Визначником квадратної матриці 3-го порядку називається число, яке обчислюють за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Правило обчислення визначника третього порядку називається *правилом трикутників* (*правило Саррюса*): добуток елементів, що стоять на головній діагоналі і у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі, беруть зі знаком «+», а добуток елементів, що стоять на іншій (побічній) діагоналі і у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі, беруть зі знаком «–»



Наприклад,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1+(-1)\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot1-2\cdot(-1)\cdot2=2+2-1-1-1+4=5.$$

Визначники квадратних матриць n-го порядку

Означення. Визначником квадратної матриці n -го порядку називається число, яке позначають

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Розглянемо в цьому визначнику деякий елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} пов’язано з мінором співвідношенням

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Теорема. Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків кожного елемента будь-якого рядка (стовпця) на його алгебраїчне доповнення.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$ – розгортання за елементами i-го рядка

або

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$ – розгортання за елементами j-го стовпця.

Основні властивості визначників

1. Визначник матриці не змінюється в разі її транспонування.
2. Визначник змінює знак на протилежний, якщо в ньому переставити два рядки (стовпці).
3. Визначник із двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю.
4. Визначник, що містить нульовий рядок (стовпець), дорівнює нулю.
5. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
6. Визначник не зміниться, якщо до кожного елемента будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільне число.
7. Сума добутків кожного елемента будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного рядка (стовпця) дорівнює нулю.
8. Визначник добутку двох матриць дорівнює добутку визначників, тобто $\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B)$.

Наприклад, необхідно обчислити визначник 4-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Записуємо розклад визначника за елементами третього рядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = 0 + 0 + a_{33}A_{33} + 0 =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(20 + 12 + 0 - 0 - 2 - 15\right) = 2 \cdot 15 = 30.$$

2.5 Обернена матриця

Означення. Квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається невиродженою.

Означення. Квадратна матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається виродженою.

Означення. Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо виконується співвідношення

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Теорема. Кожна невироджена квадратна матриця має обернену, яку знаходять за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\Delta(A)$ – визначник матриці A,

A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

Щоб дістати матрицю, обернену до матриці A, потрібно:

1. Знайти визначник матриці A:

– якщо $\Delta = 0$ – обернена матриця не існує;

– якщо $\Delta \neq 0$ – обернена матриця існує.

2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

3. Побудувати матрицю, у якої на місцях елементів стоять їхні алгебраїчні доповнення

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Транспонувати отриману матрицю A'

$$\left(A'\right)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця називається приєднаною.

5. Кожен елемент приєднаної матриці поділити на величину визначника

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A'\right)^T.$$

6. Зробити перевірку $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$

Основні властивості обернених матриць

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$
2. $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}.$
3. $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$
4. $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}.$

2.6 Ранг матриці

Розглянемо матрицю $A\left(m; n\right)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Викреслимо в цій матриці k рядків і k стовпців так, щоб дістати квадратну матрицю k-го порядку. Визначник отриманої матриці називається мінором k-го порядку матриці A.

Наприклад, знайти мінори 2-го порядку матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$M_1=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\end{vmatrix}=5-0=5, \quad M_2=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-8-15=-23,$$

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4-0=4.$$

Означення. Рангом матриці A називається найвищий порядок мінорів цієї матриці, серед яких є ненульовий.

Позначають $rgA, r(A), rang(A)$.

З означення рангу матриці випливає, що

1) $rgA \le \min(m;n)$;

2) $rgA=0,$ тоді і тільки тоді, коли A – нульова матриця;

3) якщо A – квадратна матриця n-го порядку, то $rgA=n,$ тоді і тільки тоді, коли A – невироджена матриця.

Для знаходження рангу матриці будемо використовувати метод елементарних перетворень.

Означення. Елементарними перетвореннями матриці називаються:

1) відкидання нульового рядка (стовпця);

2) множення всіх елементів рядка (стовпця) на число, що не дорівнює нулю;

3) переставлення яких-небудь рядків (стовпців);

4) додавання до елементів якого-небудь рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне число;

5) транспонування матриці.

Теорема. Ранг матриці не змінюється під час виконання елементарних перетворень.

Отже, за допомогою елементарних перетворень матрицю A приводять до східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

де $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r, \quad r \leq n.$

Ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків східчастої (трикутної) матриці.

Наприклад, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Помножимо спочатку перший рядок на (-4) і додамо до другого, а потім помножимо перший рядок на (-5) і додамо до третього. Унаслідок отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix},$$

розділимо 2-й рядок на (-3), а другий – на (-6), отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

потім другий рядок помножимо на (-1) і додамо до третього, тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rgA = 2$.

Наприклад, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи елементарні перетворення, отримаємо

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Залишилось три ненульових рядки східчатої матриці, отже, $rgA = 3$.

Слід матриці

Означення. Слідом матриці A називають суму всіх елементів головної діагоналі матриці та позначають trA,

тобто

$$trA = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}.$$

Властивості сліду матриці

1) $trA = trA^T$;

2) $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha trA + \beta trB$;

3) $tr(AB) = tr(BA)$;

4) $trE_n = n$, де E_n – одинична матриця n-го порядку.

2.7 Модель Леонтьєва (лінійна балансова модель)

Одним із відомих прикладів застосування апарату лінійної алгебри в економічних дослідженнях є побудована Василем Леонтьєвим (1906–1999 рр.) модель **міжгалузевого балансу**, яка характеризує міжгалузеві виробничі зв’язки економіки країни. Модель Леонтьєва є основою планування і прогнозування міжгалузевих виробничих зв’язків як у грошовій, так і в натуральній формах.

Розглянемо принципи побудови моделі міжгалузевого балансу. Розглянемо економічну систему, яка складається з n пов’язаних між собою галузей виробництва. Продукцію кожної галузі частково використовують на зовнішнє споживання (кінцевий продукт), частково – як сировину в інших галузях (виробничі потреби).

Введемо позначення: X_i – обсяг валової продукції кожної з галузей, тобто загальний обсяг продукції, що виготовляє i-та галузь $\left(i = \overline{1, n} \right)$; Y_i – обсяг кінцевої продукції i-ї галузі $\left(i = \overline{1, n} \right)$, тобто кількість продукції, що використовують зовні m галузей-виробників (на експорт, на споживання всередині країни) або на поповнення товарних запасів тощо; x_{ij} – внутрішнє споживання: кількість продукції i-ї галузі, яку використовують для виробництва продукції j-ї галузі; зокрема всередині самої галузі $\left(j = \overline{1, m} \right)$.

Валовий обсяг продукції i-ї галузі дорівнює сумарному обсягу продукції, яку споживають n галузей, та кінцевої продукції, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i , \quad i = \overline{1, n} . \tag{2.1}$$

Рівняння (2.1) називаються **співвідношеннями балансу.**

Рівняння (2.1) можна записати у вигляді

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n \right), \tag{2.2}$$

де a_{ij} – технологічні коефіцієнти внутрігалузевого споживання або прямі (внутрішні) витрати, тобто величини, які визначають кількість одиниць продукції i-ї галузі, що використовується для виробництва однієї одиниці продукції j-ї галузі. Відповідно

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} . \tag{2.3}$$

Співвідношення (2.2) можна записати в матричному вигляді

$$X = AX + Y, \tag{2.4}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X – матриця-стовпець валового випуску всіх видів продукції;
A – матриця прямих витрат (технологічні коефіцієнти);
Y – матриця-стовпець кінцевого попиту.

Матричне рівняння (2.4) називають **балансовою моделлю виробництва** або **моделлю міжгалузевого балансу виробництва**. Основне завдання міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такої матриці X валової продукції, яка за відомої матриці A прямих витрат забезпечить задану матрицю Y кінцевої продукції.

Рівняння (2.4) можна переписати у вигляді

$$(E - A)X = Y. \tag{2.5}$$

Якщо $|E - A| \neq 0,$ то отримаємо

$$X = (E - A)^{-1} Y = S \cdot Y. \tag{2.6}$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається **матрицею повних витрат**, а різниця матриць повних і прямих витрат, тобто матриця $K = S - A$ називається **матрицею непрямих або опосередкованих витрат.** Звичайно на підставі економічного змісту задачі $x_{ij} \geq 0, y_{ij} \geq 0$ та $a_{ij} \geq 0.$

Питання для самоперевірки

1. Що називається матрицею?
2. Назвіть основні види матриць.

3. Що називається сумою двох матриць A і B?

4. Що називається добутком двох матриць A і B?

5. За якої умови добуток двох матриць A і B існує?

6. Що називається транспонуванням матриці?

7. Назвіть основні властивості операцій над матрицями.

8. Що називається визначником квадратної матриці другого порядку, третього порядку?

9. Що називається мінором елемента визначника n-го порядку?

10. Як можна обчислити визначник n-го порядку?

11. Назвіть основні властивості визначників.

12. Яка матриця називається виродженою (невиродженою)?

13. Яка матриця називається оберненою до квадратної матриці?

14. Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці.

15. Сформулюйте основні властивості обернених матриць.

16. Що називається мінором матриці?

17. Що називається рангом матриці?

18. Що називається елементарними перетвореннями матриці?

19. Що називається слідом матриці?

20. Сформулюйте властивості сліду матриці.

3 ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

План

3.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення.

3.2 Системи n лінійних рівнянь із n невідомими. Метод оберненої матриці. Формули Крамера.

3.3 Системи m лінійних рівнянь із n невідомими. Метод Гаусса. Метод Жордана – Гаусса.

3.4 Однорідні системи лінійних рівнянь.

3.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь – одне з найважливіших завдань обчислювальної математики, до якого зводиться багато економічних задач.

Розглянемо систему, що містить m лінійних рівнянь із n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3.1)$$

де

a_{ij} – коефіцієнти при невідомих,

$x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі,

$b_1, b_2, \dots, b_n$ – вільні члени.

Означення. Сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називається розв'язком системи (3.1), якщо підстановка цих чисел замість невідомих у систему перетворює кожне з рівнянь системи на тотожність.

Означення. Система лінійних рівнянь, яка не має жодного розв'язку, називається **несумісною**.

Якщо ж система має хоча б один розв'язок, то вона називається **сумісною**.

Означення. Система лінійних рівнянь, що має лише один розв'язок, називається **визначеною**.

Якщо ж система має безліч розв'язків, то вона називається **невизначеною**.

Означення. Система лінійних рівнянь, усі вільні члени якої дорівнюють нулю, називається **однорідною**.

Якщо ж хоча б один вільний член не дорівнює нулю, то система називається **неоднорідною**.

Розглянемо систему (3.1).

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & & ... & & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею (основною матрицею) системи (3.1), матриця

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \; ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

називається розширеною матрицею системи (3.1).

Відповідь на запитання про сумісність системи лінійних рівнянь дає теорема.

Теорема Кронекера – **Капеллі**. Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеною матриці системи. Якщо

1) $rgA = rgA_p = n$ – система має лише один розв’язок;

2) $rgA = rgA_p < n$ – система має безліч розв’язків;

3) $rgA \neq rgA_p$ – система не має жодного розв’язку.

Приклад

Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв’язання

Виконавши елементарні перетворення над розширеною матрицею системи, отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Отже,

$$rgA = 2,\ rgA_p = 3,\ rgA \neq rgA_p,$$

тобто система – несумісна.

3.2 Системи n лінійних рівнянь із n невідомими

Система n лінійних рівнянь із n невідомими має вигляд

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\qquad\qquad \ldots. \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

Розглянемо такі два методи розв'язування системи (3.2): метод оберненої матриці та метод Крамера.

1. Метод оберненої матриці (матричний метод)

Введемо позначення

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$ – задана матриця системи,

$$
B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}
$$ – заданий стовпець вільних членів,

$$
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}
$$ – стовпець невідомих.

Тоді систему рівнянь (3.2) можна записати в матричній формі

$$
A \cdot X = B \tag{3.3}
$$

Розв'язок системи (3.2) шукаємо в припущенні, що $\Delta A \neq 0,$ тобто існує обернена матриця A^{-1}. Помноживши зліва обидві частини рівняння (3.3) на A^{-1}, отримаємо

$$\begin{aligned} &A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \\ &E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \\ &X = A^{-1} \cdot B. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Матричний метод використовують тільки в тому разі, коли
– кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих;
– визначник матриці системи не дорівнює нулю.

2. Правило Крамера

Теорема. Якщо визначник матриці системи (3.2) не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, що знаходять за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\, ...,\, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – визначник матриці системи,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – визначник, отриманий із визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Приклад

Розв’язати систему рівнянь матричним методом та за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Розв’язання

Розв’язуємо систему матричним методом.

1. Введемо позначення

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Тоді система в матричній формі записується у вигляді $A \cdot X = B,$ звідки $X = A^{-1} \cdot B.$

Знайдемо обернену матрицю.

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 1 + 48 - 20 + 8 - 9 = -2 \neq 0$,

тобто обернена матриця існує;

2) використавши алгоритм знаходження оберненої матриці, отримаємо

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-11 & -8 & 7\\ -13 & -10 & 9\\ -19 & -14 & 13\end{pmatrix};$$

3) тоді, $X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-11 & -8 & 7\\ -13 & -10 & 9\\ -19 & -14 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -5\\ -4\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-10\\ -12\\ -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 10\end{pmatrix}.$

Отже, $x_1=5, x_2=6, x_3=10.$

2. Розв'язуємо систему за формулами Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & -4\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}=-2,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ -5 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -3\end{vmatrix}=-30-5-48+20+8+45=-10,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -5 & -4\\ 4 & -4 & -3\end{vmatrix}=30-4-32+20-32+6=-12,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 5 & -5\\ 4 & 1 & -4\end{vmatrix}=-40+2+60-40+10-12=-20,$$

Тоді

$$x_1=\frac{-10}{-2}=5;\ x_2=\frac{-12}{-2}=6;\ x_3=\frac{-20}{-2}=10.$$

Відповідь: $(5;6;10)$.

Недоліком розв'язування систем n лінійних рівнянь із n невідомими за допомогою матричного методу та правила Крамера є велика громіздкість, яка пов'язана з обчисленням визначників і знаходженням оберненої матриці. Тому ці методи викликають більш теоретичну зацікавленість і не можуть бути застосовані під час розв'язування економічних задач, у яких потрібно розв'язувати системи, що містять велику кількість рівнянь і невідомих (не завжди однакову). Хоча з використанням різних програмних засобів, зокрема MS Excel, метод оберненої матриці та формули Крамера зручно використовувати для розв'язування систем n лінійних рівнянь із n невідомими, якщо значення n достатньо велике.

3.3 Системи m лінійних рівнянь із n невідомими

Розглянемо систему (3.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь називають

1) множення будь-якого рівняння на число, що не дорівнює нулю;

2) переставлення рівнянь;

3) додавання до одного рівняння системи іншого, помноженого на довільне число.

Під час виконання елементарних перетворень система перебудовується в рівносильну, тобто множини розв'язків цих систем однакові.

Метод Гаусса

Метод Гаусса (метод послідовного виключення змінних) полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система (3.1) перебудовується в рівносильну так, що змінна x_1 виключена з усіх рівнянь, крім 1-го, змінна x_2 виключена з усіх рівнянь, крім 1-го та 2-го, змінна x_3 виключена з усіх рівнянь, крім 1-го, 2-го та 3-го тощо.

Для цього потрібно виконати перетворення;

1) нехай $a_{11} \neq 0$. Помноживши по черзі 1-ше рівняння системи на числа $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, … $-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$ і додавши отримані рівняння відповідно до 2-го, 3-го, … m-го рівнянь, виключимо змінну x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого. Отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \qquad .... \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

де $a_{ij}^{(1)}$ – коефіцієнти, отримані після першого перетворення;

2) нехай $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Помноживши по черзі 2-ге рівняння системи на числа $-\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, -\dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, … $-\dfrac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ і додавши отримані рівняння відповідно до 3-го, 4-го, … m-го рівнянь, виключимо змінну x_2 з усіх рівнянь, починаючи із третього, тощо.

Під час перетворення системи можуть з'явитися рівняння

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0 \quad \text{(нульове)}$$

або

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b \quad \text{(суперечливе).}$$

Нульове рівняння відкидаємо, оскільки воно містить безліч розв'язків. Якщо ж система містить суперечливе рівняння, то вона несумісна.

За допомогою елементарних перетворень систему (3.1) можна звести до рівносильної вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad \ldots. \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.5}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad \ldots. \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}. \end{cases} \tag{3.6}$$

У випадку (3.5) система має єдиний розв'язок.

З останнього рівняння знаходимо x_n, підставляючи його в попереднє рівняння, знаходимо x_{n-1} тощо, $x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$ (так званий «зворотний хід»).

У випадку (3.6) система має безліч розв'язків. Змінні $x_{k+1}, \ldots, x_n$ оголошують вільними (вони можуть набувати будь-які значення) і переносять у праву частину кожного з рівнянь. Для того, щоб знайти загальний розв'язок системи, необхідно базисні невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_k$ виразити через вільні.

Отже, якщо кількість невідомих сумісної системи рівнянь дорівнює n, а кількість рівнянь унаслідок послідовного виключення змінних дорівнює k, тоді, якщо

1) $k = n$ – система має єдиний розв'язок;

2) $k < n$ – система має безліч розв'язків. У цьому разі k невідомих будуть базисними, а $n - k$ – вільними.

Зауваження. Під час розв'язування системи лінійних рівнянь елементарні перетворення виконують не над рівняннями системи, а над рядками розширеної матриці системи.

Метод Жордана – Гаусса

Метод Жордана – Гаусса (метод повного виключення змінних) полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система (3.1) перебудовується в рівносильну так, що змінна x_1 виключена з усіх рівнянь, крім 1-го, змінна x_2 виключена з усіх рівнянь, крім 2-го, змінна x_3 виключена з усіх рівнянь, крім 3-го тощо, причому коефіцієнт біля x_i обов'язково дорівнює 1 (тобто за допомогою елементарних перетворень основна матриця системи (3.1) зводиться до одиничної n-го порядку). Після виконання перетворень система (3.1) матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = b_1^{(n)}, \\ \quad x_2 \qquad = b_2^{(n)}, \\ \quad \ldots \qquad\quad \ldots \\ \qquad\quad x_n = b_n^{(n)}, \end{cases} \tag{3.7}$$

або

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad + a_{1r+1}^{(r)} x_{r+1} + \cdots + a_{1n}^{(r)} x_n = b_1^{(r)}, \\
\quad x_2 \qquad\quad + a_{2r+1}^{(r)} x_{r+1} + \cdots + a_{2n}^{(r)} x_n = b_2^{(r)}, \\
\quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad\qquad x_r + a_{rr+1}^{(r)} x_{r+1} + \cdots + a_{rn}^{(r)} x_n = b_r^{(r)}.
\end{cases}
\qquad (3.8)
$$

У випадку (3.7) шукані невідомі дорівнюють вільним членам перетвореної системи (у цьому разі система має єдиний розв'язок), у випадку (3.8) легко можна знайти загальний розв'язок системи рівнянь.

Аналогічно, як і в разі застосування методу Гаусса, якщо кількість невідомих сумісної системи рівнянь дорівнює n, а кількість рівнянь унаслідок повного виключення змінних дорівнює k, тоді, якщо

1) $k = n -$ система має єдиний розв'язок;
2) $k < n -$ система має безліч розв'язків. У цьому разі k невідомих будуть базисними, а $n-k$ – вільними.

Приклад

З пункту А до пункту В необхідно перевезти обладнання трьох типів: I типу – 19 одиниць, II типу – 20 одиниць і III типу – 37 одиниць. Для перевезення обладнання підприємство може використовувати три види транспорту. Кількість обладнання кожного типу, що може вмістити певний вид транспорту, подано в таблиці.

Тип обладнання	**Вид транспорту**		
	T_1	**T_2**	**T_3**
I	3	2	1
II	4	1	2
III	3	5	4

Визначити, скільки одиниць транспорту кожного виду потрібно для перевезення обладнання з пункту А до пункту В.

Розв'язання

Нехай для перевезення обладнання необхідно x_1 одиниць першого виду транспорту, x_2 одиниць другого виду транспорту, x_3 одиниць третього. На підставі умови задачі отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 19, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 37. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 2.$

Отже, для перевезення заданого за умовою задачі типу обладнання необхідно 3 одиниці першого виду транспорту, 4 одиниці другого виду транспорту і 2 одиниці третього виду транспорту.

3.4 Однорідні системи лінійних рівнянь

Розглянемо однорідну систему m лінійних рівнянь із n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Система (3.9) завжди сумісна, бо вона має нульовий розв'язок $(0; 0; ...; 0)$.

Теорема. Однорідна система лінійних рівнянь має безліч розв'язків, тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи менше за кількість невідомих системи.

У разі, коли кількість рівнянь однорідної системи дорівнює кількості невідомих, маємо

1) якщо $\Delta \neq 0$ – система має тільки нульовий розв'язок;

2) якщо $\Delta = 0$ – система має безліч розв'язків.

Приклад

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо визначник матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 + 36 - 30 - 6 + 8 = 11 \neq 0.$$

Визначник матриці системи не дорівнює нулю, отже, однорідна система лінійних рівнянь має тільки нульовий розв'язок. Отже, $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$

Відповідь: $(0; 0; 0)$.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має система лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
3. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною (несумісною)?
4. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається визначеною (невизначеною)?
5. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною (неоднорідною)?
6. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.

7. Унаслідок дослідження на сумісність системи чотирьох лінійних рівнянь із чотирма невідомими $rgA = rgA_p = 3.$ Який висновок можна зробити про кількість розв'язків системи?

8. Унаслідок дослідження на сумісність системи п'яти лінійних рівнянь із чотирма невідомими $rgA = rgA_p = 4$. Який висновок можна зробити про кількість розв'язків системи?

9. Запишіть формули, за якими можна розв'язати систему n лінійних рівнянь із n невідомими матричним методом.

10. Запишіть формули Крамера.

11. У якому разі для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь можна застосовувати метод оберненої матриці та формули Крамера?

12. Що називають елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь?

13. У чому полягає суть метода Гаусса?

14. У чому полягає суть метода Жордана – Гаусса?

15. У чому полягає принципова відмінність метода Гаусса від метода Жордана – Гаусса?

16. Які рівняння можуть виникнути в системі лінійних рівнянь унаслідок застосування метода Гаусса (Жордана–Гаусса)?

17. Унаслідок розв'язання сумісної системи лінійних рівнянь із n невідомими методом Гаусса, залишилось k рівнянь, причому $k = n.$ Який висновок можна зробити про кількість розв'язків системи?

18. Унаслідок розв'язання сумісної системи лінійних рівнянь з n невідомими методом Жордана – Гаусса, залишилось k рівнянь, причому $k < n.$ Який висновок можна зробити про кількість розв'язків системи?

19. Чи можна внаслідок розв'язання однорідної системи лінійних рівнянь отримати висновок, що система несумісна?

20. У якому разі однорідна система лінійних рівнянь має безліч розв'язків?

4 n-ВИМІРНИЙ ВЕКТОР І ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР

План

4.1 n-вимірний вектор. Лінійні операції над векторами.
4.2 Вимірність і базис векторного простору.
4.3 Власні вектори та власні значення матриць.
4.4 Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі).
4.5 Рівняння прямої на площині. Різні види рівнянь.
4.6 Основні задачі на пряму на площині.
4.7 Рівняння прямої як математична модель економічних задач.

4.1 n-вимірний вектор і векторний простір

Означення. Сукупність n упорядкованих дійсних чисел, записаних у вигляді матриці-рядка або матриці-стовпця, називається n-вимірним вектором

$$\bar{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \quad \text{або} \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називаються **компонентами вектора**.

Поняття n-вимірного вектора широко застосовують в економіці, зокрема певний набір товарів можна охарактеризувати вектором $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а відповідні ціни – вектором $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

На підставі означення n-вимірного вектора можна зробити висновок, що дії над векторами виконують як і дії над матрицями.

Тобто:

1) два n-вимірні вектори $\overline{a}\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ і $\overline{b}\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати;

2) $\overline{a} \pm \overline{b} = \left(a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ \ldots;\ a_n \pm b_n\right)$;

3) $\lambda\overline{a} = \left(\lambda a_1; \lambda a_2; \ldots; \lambda\, a_n\right)$.

Лінійні операції над векторами мають властивості

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;

2) $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;

3) $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;

4) $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$;

5) $\alpha\left(\beta\overline{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\overline{a}$;

6) $\alpha\left(\beta\overline{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\overline{a}$;

7) $\alpha\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$;

8) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

Означення. Множина векторів із дійсними координатами, у якій визначені операції додавання векторів і множення вектора на число, які задовольняють зазначеним властивостям, називається векторним простором $\left(R\right)$.

Варто відзначити, що під $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ можна розглядати не лише вектори, а й елементи будь-якої природи. У цьому разі відповідна множина векторів називається лінійним простором і позначається $\left(V\right)$.

Наприклад,

V – множина матриць фіксованого порядку;

V – множина числових функцій, визначених на деякій фіксованій множині.

4.2 Вимірність і базис векторного простору

Означення. Лінійною комбінацією векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на деякі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\,\bar{a}_n.$$

Означення. Сукупність векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, тобто

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\,\bar{a}_n = \bar{0}, \quad \text{якщо } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Означення. Сукупність векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору за умови, що хоча б один із коефіцієнтів $\alpha_i \neq 0$.

Означення. Базисом n-вимірного простору називається сукупність n-лінійно незалежних векторів цього простору

Теорема. Будь-який вектор $\bar{a}$ може бути поданий єдиним способом у вигляді лінійної комбінації базисних векторів цього простору

$$\bar{a} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\,\bar{a}_n.$$

Коефіцієнти цієї лінійної комбінації $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ називаються координатами вектора $\bar{a}$ у вибраному базисі.

Вище було розглянуто поняття лінійного (векторного) простору, у якому можна додавати вектори та множити вектори на число, а тепер розглянемо спосіб вимірювання довжин і кутів через означення скалярного добутку.

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\bar{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ і $\bar{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ називається число, яке обчислюється за формулою

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Зокрема, якщо $\overline{a}=\left(a_1;a_2;\ldots;a_n\right)$ – вектор обсягу різних товарів, а $\overline{b}=\left(b_1;b_2;\ldots;b_n\right)$ – вектор їхніх цін, тоді скалярний добуток $\overline{a}\cdot\overline{b}$ визначає сумарну вартість цих товарів.

Властивості скалярного добутку

1) $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{a}\right)$;

2) $\left(\overline{a},\overline{b}+\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\overline{b}\right)+\left(\overline{a},\overline{c}\right)$;

3) $\left(\alpha\overline{a},\overline{b}\right)=\alpha\left(\overline{a},\overline{b}\right)$;

4) $\left(\overline{a},\overline{a}\right)>0,$ якщо $\overline{a}$ – ненульовий вектор, $\left(\overline{a},\overline{a}\right)=0,$ якщо $\overline{a}$ – нульовий вектор.

Означення. Лінійний (векторний) простір, у якому визначений скалярний добуток векторів, що задовольняє наведеним властивостям, називається евклідовим простором.

Означення. Довжиною (нормою) вектора $\overline{a}$ в евклідовому просторі називається квадратний корінь із його скалярного квадрата

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2},\ \text{де}\ \overline{a}^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

Означення. Два вектори називаються ортогональними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Вектори $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ утворюють ортонормований базис, якщо вони попарно ортогональні і норма кожного з них дорівнює одиниці $\left(\left(\overline{e}_i,\overline{e}_j\right)=1,\left|\overline{e}_i\right|=1\right)$.

Вектори

$\overline{e}_1(1;0;0;\ldots;0),\ \overline{e}_2(0;1;0\ldots;0),\ \overline{e}_3(0;0;1;\ldots;0),\ \overline{e}_n(0;0;0;\ldots;1)$ утворюють ортонормований базис. Це найпростіший базис простору R^n, тому вважають, що координати довільного вектора задаються в ортонормованому базисі.

Зокрема, якщо $\overline{a}\left(-2;3;1;-5\right)$, тоді

$$\overline{a} = -2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + \overline{e}_5 - 5\overline{e}_4,$$

де $\overline{e}_1(1;0;0;0)$, $\overline{e}_2(0;1;0;0)$, $\overline{e}_3(0;0;1;0)$, $\overline{e}_4(0;0;0;1)$.

Приклад

Довести, що вектори $\overline{a}_1(3;2;1)$, $\overline{a}_2(-1;-2;4)$, $\overline{a}_3(3;0;1)$ утворюють базис простору R^3 та знайти координати вектора $\overline{b}(2;2;5)$ у цьому базисі.

Розв'язання

Доведемо, що вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ утворюють базис простору R^3. Складемо лінійну комбінацію цих векторів і дорівняємо її до нуля

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \alpha_3\,\overline{a}_3 = \overline{0},$$

тоді

$$\alpha_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Отже, маємо однорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}3\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0,\\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0,\\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0.\end{cases}$$

Знайдемо визначник матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix} = 26 \neq 0,$$

отже, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, тобто сукупність векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ лінійно незалежна, тобто вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ утворюють базис простору R^3.

Знайдемо координати вектора $\overline{b}$ у цьому базисі

$$\overline{b} = \beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + \beta_3\,\overline{a}_3,$$

$$\beta_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix} + \beta_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}.$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3 = 2, \\ 2\beta_1 - 2\beta_2 = 2, \\ \beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1, \beta_3 = -1.$

Отже, $\overline{b} = 2\overline{a}_1 + \overline{a}_2 - \overline{a}_3.$

4.3 Власні вектори і власні значення матриць

Означення. Ненульовий вектор X називають **власним** або **характеристичним вектором** матриці A, якщо існує таке дійсне число λ, що

$$AX = \lambda X \tag{4.1}$$

Число λ називається **власним** або **характеристичним числом (значенням)** матриці A, що відповідає власному вектору X.

Оскільки $EX = X$, маємо $AX = \lambda(EX)$ або $AX = (\lambda E)X$, тоді

$$(A - \lambda E)X = \overline{0}. \tag{4.2}$$

Якщо матричне рівняння (4.2) записати в розгорнутому вигляді, отримаємо

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Отже, задачу зведено до розв'язування однорідної системи лінійних рівнянь, яка має безліч розв'язків за умови, що визначник системи (4.3) дорівнює нулю

$$\Delta\left(A-\lambda E\right) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.4)$$

Розкриття визначника (4.4) дозволяє отримати многочлен n-го степеня від λ: $P_n(\lambda) = \Delta(A-\lambda E)$, який називається **характеристичним многочленом** матриці A. Співвідношення

(4.4) можна надати у вигляді рівняння $P_n(\lambda)=0$, яке називають **характеристичним рівнянням** матриці A.

Якщо X – власний вектор матриці A, то існує єдине число λ, що задовольняє умову $AX=\lambda X$.

Вектор X тоді і тільки тоді є власним вектором матриці A, що відповідає власному числу λ, коли його координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є ненульовим розв'язком однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A-\lambda E)X=\overline{0}$. Зауважимо, що власні вектори, що відповідають різним власним числам, є **лінійно незалежними**.

Алгоритм знаходження власних чисел і власних векторів матриці A

1. Скласти характеристичне рівняння (4.4) та знайти власні числа матриці, які є розв'язком рівняння (4.4). За основною теоремою алгебри рівняння $P_n(\lambda)=0$ має n коренів, якщо кожний із них рахувати стільки разів, яка його кратність.

2. Підставити по черзі власні числа в систему (4.3) і знайти відповідні їм нетривіальні розв'язки, Унаслідок чого отримаємо множину власних векторів, що відповідають кожному власному числу.

Якщо ранг матриці системи (4.3) дорівнює k, причому $k<n$, то деякі координати власних векторів, кількість яких дорівнює $n-k$, вважають вільними. Саме це і забезпечує нескінченність множини власних векторів, що відповідають певному власному числу.

Приклад

Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Складемо характеристичне рівняння матриці

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda)+3=0,$$

$$\lambda^2-6\lambda+8=0,$$

$$\lambda_1=2, \lambda_2=4.$$

Отже, отримали власні числа $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4.$

2. Знайдемо множини $X^{(1)}, X^{(2)}$ усіх власних векторів, що належать знайденим власним числам. Для цього записуємо систему однорідних лінійних рівнянь, коефіцієнти якої отримуємо з елементів матриці $A-\lambda E$ після підстановки значення відповідного власного числа. Отже,

$$\lambda_1=2: \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1+3x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2=4: \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1+ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t \end{cases} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Надаючи параметру t довільних значень, отримаємо сукупність колінеарних між собою власних векторів.

Розглянемо приклад застосування понять власних векторів і власних чисел у одній із багатьох задач економічного змісту.

4.4 Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Практично всі країни, крім внутрішнього товарообміну, здійснюють зовнішній товарообмін, тобто займаються зовнішньою торгівлею. Торгівлю вважають **збалансованою** або **бездефіцитною**, якщо для кожної країни прибуток від торгівлі не менше за обсяг коштів, які вона вкладає в товарообіг (внутрішній і зовнішній).

Постановка завдання. Декілька країн здійснюють взаємний товарообмін. Відома частка бюджетних коштів, що витрачає кожна країна на закупівлю товарів в іншої країни, зважаючи на внутрішній товарообіг. Яким повинно бути співвідношення бюджетів партнерів, для того щоб забезпечити бездефіцитність торгівлі?

Побудова математичної моделі. Введемо позначення кількісних характеристик – величин, якими описують торгівлю, і визначимо зв'язок між ними. Нехай $K_1, K_2, ..., K_n$ – країни, що беруть участь у міжнародній торгівлі. Частки коштів, які витрачає країна K_j на закупівлю товарів у країни K_i, зважаючи на внутрішній товарообіг $(j = i)$, позначимо через a_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (4.5)$$

Матрицю, елементами якої є числа a_{ij}, називають **структурною матрицею торгівлі**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця описує взаємодію країн у процесі міжнародної торгівлі. Співвідношення (4.5) означає, що сума елементів кожного стовпця матриці дорівнює 1. Якщо обсяг коштів, які витрачає кожна країна на торгівлю, позначити відповідно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то прибуток p_i кожної країни K_i від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становитиме

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \qquad (4.6)$$

де $i = \overline{1, n}$.

Для того щоб для кожної країни торгівля була збалансованою, за означенням повинна виконуватись умова $p_i \ge x_i, \quad i = \overline{1, n},$ тобто прибуток від торгівлі повинен бути не меншим від витрат. Проте виконання наведеної вимоги як нерівності є неможливим для всіх країн у сукупності.

Дійсно,

$$p_i \ge x_i,\ i = \overline{1, n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (4.7)$$

Групуючи в лівій частині доданки, що містять кожне із x_j, отримаємо

$$x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \ldots + x_n \sum_{i=1}^{n} a_{in} \ \ge\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \quad (4.8)$$

На підставі співвідношення (4.5), отримаємо

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ \ge\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \qquad (4.9)$$

Отже, збалансована торгівля можлива тільки в разі знака рівності. Це цілком зрозуміло не тільки з аналітичного викладу, а й з економічного погляду: усі країни в сукупності не можуть отримувати прибуток, для жодної із країн не може виконуватися знак строгої нерівності $p_i > x_i$.

Отже, умовою збалансованої торгівлі є рівність $p_i = x_i, \; i = \overline{1, n},$ з якої отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i, \; i = \overline{1, n},$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = x_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = x_2, \\ \ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = x_n. \end{cases} \tag{4.10}$$

Розглянемо **вектор** (бюджетних) **коштів** $X = \left(x_1, \, x_2, \ldots, \, x_n \right)^T$ та подамо систему (4.10) в матричній формі

$$AX = X. \tag{4.11}$$

Аналіз (4.11) доводить, що вектор коштів X повинен бути власним вектором структурної матриці торгівлі A, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Відповідно розв’язання задачі зведено до відшукання цього власного вектора X, компоненти якого встановлюють співвідношення між бюджетами країн, які беруть участь у товарообміні.

Розглянемо товарообмін між трьома країнами. Нехай структурна матриця торгівлі країн K_1, K_2, K_3 має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Необхідно знайти вектор коштів, компонентами якого є частки від загального обсягу торгівлі, які повинна вкладати кожна із країн у зовнішній товарообіг для того, щоб торгівля була збалансованою.

Шуканий вектор коштів є власним вектором структурної матриці, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Його компоненти утворюють ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$(A - E)X = \overline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи систему, отримаємо загальний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 3/4t, \end{cases}$$

де x_2, x_3 – базисні змінні, x_1 – вільна змінна.

Отже, що для того щоб торгівля була збалансованою, необхідно, щоб кошти, які вкладає в зовнішній товарообіг кожна країна, співвідносилися як $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 4 : 3$.

4.5 Рівняння прямої на площині. Різні види рівнянь

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами:

1) точкою і вектором, паралельним даній прямій;
2) двома точками;
3) точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої;
4) точкою і кутовим коефіцієнтом прямої.

Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

Векторне та канонічне рівняння прямої

Нехай у прямокутній системі координат xOy задана точка $M_0(x_0; y_0)$ та вектор $\bar{s}$. Необхідно скласти рівняння прямої, що проходить через M_0 паралельно вектору $\bar{s}$.

Означення. Будь-який ненульовий вектор $\bar{s}$ паралельний заданій прямій, називається напрямним вектором цієї прямої.

Точка M_0 і напрямний вектор прямої цілком визначають пряму, оскільки через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\bar{s}$.

Нехай $M(x; y)$ (рис. 4.1) – довільна точка прямої.

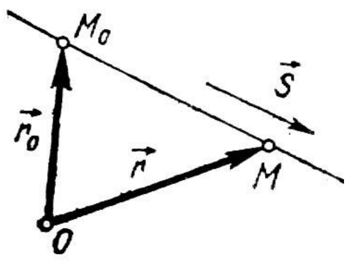


Рисунок 4.1

Розглянемо радіуси-вектори $\overline{r_0} = \overline{OM_0}$ та $\overline{r} = \overline{OM}$ точок M_0 і M. Оскільки $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$, вектори $\overline{M_0M}$ і $\overline{s}$ колінеарні, то отримаємо векторне рівняння прямої

$$\overline{r} - \overline{r_0} = \overline{s}t, \tag{4.12}$$

де t – параметр.

Якщо в рівнянні (4.12) перейти до координат, тоді $\left(\overline{x - x_0; y - y_0}\right) = \left(\overline{lt; mt}\right)$, звідки

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt. \tag{4.13}$$

Виключивши з рівнянь (4.12) параметр t, отримаємо

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{4.14}$$

Рівняння (4.13) називають **параметричними рівняннями прямої**, а рівняння (4.14) – її **канонічним рівнянням.**

Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині xOy задано точку $M_0(x_0; y_0)$ і вектор $\overline{n}(A; B)$. Необхідно скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно до вектора $\overline{n}(A; B)$.

Означення. Будь-який ненульовий вектор $\overline{n}(A; B)$, перпендикулярний до заданої прямої, називається нормальним вектором цієї прямої.

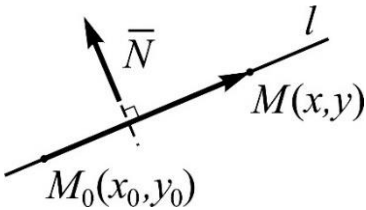


Рисунок 4.2

Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x,y)$ (рис. 4.2) і розглянемо вектор $\overline{M_0M}\left(x-x_0;y-y_0\right)$. Оскільки вектори $\overline{n}$ і $\overline{M_0M}$ перпендикулярні, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_0)+B\left(y-y_0\right)=0. \qquad (4.15)$$

Рівняння (4.15) називається рівнянням **прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.**

Рівняння (4.15) можна звести до вигляду

$$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0,$$

$$Ax+By=C=0. \qquad (4.16)$$

Рівняння (4.16) називають **загальним рівнянням прямої**.

Дослідження загального рівняння

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат xOy залежно від значень коефіцієнтів $A, B, C.$

1. Якщо $A=0$, то пряма $By+C=0$ паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0;-\frac{C}{B}\right)$.

2. Якщо $B=0$, то пряма $Ax+C=0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A};0\right)$.

3. Якщо $C=0$, то пряма $Ax+By=0$ проходить через початок координат, оскільки координати точки $O(0;0)$ задовольняють рівняння прямої.

4. Якщо $A=C=0$, то рівняння $By=0$ або $y=0$ визначає вісь Ox.

5. Якщо $B=C=0$, то рівняння $Ax=0$ або $x=0$ визначає вісь Oy.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма l утворює з віссю Ox кут α і перетинає вісь Oy в точці $B(0;b)$ (рис. 4.3).

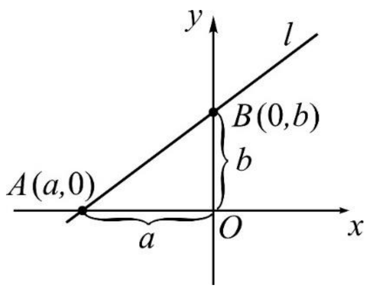


Рисунок 4.3

Означення. Тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої

$$k=tg\alpha.$$

У цьому разі **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** має вигляд

$$y = kx + b. \tag{4.17}$$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$ з даним кутовим коефіцієнтом k має вигляд

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right). \tag{4.18}$$

Рівнянням прямої, що проходить
через дві задані точки

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1; y_1\right)$ та $M_2\left(x_2; y_2\right)$ дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор

$$\overline{s} = \overline{M_1M}_2\left(x_2 - x_1; y_2 - y_1\right).$$

Використовуючи рівняння (4.14), отримаємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.19}$$

Рівняння (4.19) називається **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

Зокрема, якщо пряма проходить через точки $A\left(a; 0\right)$ та $B\left(0; b\right)$ тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 4.4), то з рівняння (4.19) маємо

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \quad \text{або} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{4.20}$$

Рівняння (4.20) називається рівнянням прямої у відрізках на осях.

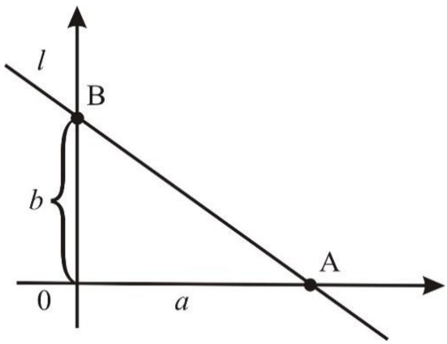


Рисунок 4.4

4.6 Основні задачі на пряму на площині

1. Точка перетину двох прямих

Нехай дві прямі задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (l_1),$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (l_2).$$

Щоб знайти точку перетину прямих необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \tag{4.21}$$

Якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0,$$

то прямі перетинаються в одній точці $M_0(x_0; y_0)$, яка є розв'язком системи (4.21).

Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, причому $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, система (4.21) не має розв'язків, отже, прямі l_1 та l_2 – паралельні.

Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$ причому $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$ то система (4.21) має безліч розв'язків, отже, прямі l_1 та l_2 збігаються.

2. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дві прямі задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (l_1),$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (l_2).$$

Кут між цими прямими дорівнює куту між нормальними векторами цих прямих $\bar{n}_1(A_1; B_1)$ і $\bar{n}_2(A_2; B_2)$.

Використовуючи формулу скалярного добутку векторів, отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{4.22}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ колінеарні, тому координати цих векторів пропорційні, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ – **умова паралельності двох прямих**.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ перпендикулярні, скалярний добуток векторів дорівнює нулю, отже, $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ – **умова перпендикулярності прямих** l_1 **і** l_2.

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2,$ де $k_1 = tg\alpha_1,\ k_2 = tg\alpha_2$ – кутові коефіцієнти, то кут між ними можна знайти за формулою

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2},$$

отже,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{4.23}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $tg\varphi = 0$, тому маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, $k_1 = k_2$ – **умова паралельності двох прямих**.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^0$ і $tg\varphi$ не існує, тому знаменник дробу дорівнює нулю, тобто $k_1 k_2 + 1 = 0$, звідки, $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ – **умова перпендикулярності прямих** l_1 **і** l_2.

Формули (4.22), (4.23) дозволяють визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються в разі перетину двох прямих.

Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Якщо потрібно знайти гострий кут, то вираз справа в (4.23) записують за модулем.

3. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ **до прямої** $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

4.7 Рівняння прямої як математична модель економічних задач

В економічних дослідженнях достатньо часто використовують так звані виробничі функції.

Виробнича функція – залежність результату виробництва від факторів, що на нього впливають. Зокрема:

– залежність попиту на товар від ціни на нього $Q = f(p)$, де p – ціна на одиницю продукції, Q – кількість проданого товару. Ця функція є спадною;

– залежність ринкової ціни від кількості запропонованої продукції $p = F(Q)$. Ця функція є спадною;

– залежність доходу підприємства від вартості виробленої продукції $R = v(h)$.

Указані функції можуть бути як елементарними, зокрема лінійними, так і складеними. У разі лінійної залежності використовують функцію $y = kx + b$, графіком якої є пряма.

Розглянемо деякі приклади застосування лінійної залежності.

Модель «попит – пропозиція». **Закон попиту** – закон, згідно з яким зниження ціни зумовлює відповідне зростання величини попиту, і навпаки. **Закон попиту та пропозиції** – ціна будь-якого товару змінюється, щоб урівноважити попит. **Рівновага товарного ринку** – стан ринку, коли для продажу пропонують таку кількість товару, за яку споживач готовий купити товар. **Рівноважна ціна** P^* – ціна, яка врівноважує попит і пропозицію. **Рівноваговий обсяг** Q^* – обсяг пропозиції та обсяг попиту в умовах, коли врівноважують попит і пропозицію. Якщо попит на товар перевищує пропозицію товару, виникає **дефіцит пропозиції**, або **надлишковий попит**. Якщо попит на товар менший за пропозицію товару, виникає **надлишок пропозиції, або дефіцит попиту**.

Економічну модель, що описує процес ціноутворення на ринку, називають моделлю **«попит – пропозиція»**. У випадку лінійної залежності обсягів попиту і пропозиції від ціни товару і навпаки отримують найпростішу математичну модель.

Розглянемо задачу. Витрати на виробництво x_1 одиниць деякого товару становлять y_1 грн., а на виробництво x_2 одиниць витрати становлять y_2 грн. Знайти функцію витрат виробництва і витрати на x_3 одиниць товару за умови, що функція лінійна.

Розв'язання

Математична модель задачі має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$y-y_1=(x-x_1)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

$$y-y_1=x\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-x_1\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

$$y=x\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+y_1-x_1\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Отже, отримали лінійну функцію витрат. Підставляючи конкретне значення змінної x (кількості одиниць деякого товару), можна знайти витрати виробництва на задану кількість товару.

Знання властивостей лінійної функції дозволяє розв'язувати такі задачі.

Витрати на перевезення продукції двома видами транспорту задані відповідно функціями $y_1=f_1(x)$ і $y_2=f_2(x)$, де x – відстань у сотнях км, y – транспортні витрати в ум. од. Необхідно знайти відстань, починаючи з якої більш економічним буде другий вид транспорту. Знайти найбільш економічний варіант перевезення.

Лінійну залежність використовують також для розв'язання задач лінійного програмування графічним методом, у разі парного регресійного аналізу та багатьох інших задач.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення n-вимірного вектора.

2. Сформулюйте правила суми, різниці двох n-вимірних векторів, множення n-вимірного вектора на число.

3. Які властивості мають лінійні операції над векторами?

4. Дайте означення лінійно залежної та лінійно незалежної сукупності векторів.

5. Що називається базисом n-вимірного простору?

6. Дайте означення скалярного добутку двох n-вимірних векторів.

7. Дайте означення власного вектора матриці A.

8. Дайте означення власного значення матриці A.

9. Дайте означення характеристичного многочлена матриці A.

10. Сформулюйте алгоритм визначення власних чисел і власних векторів матриці A.

11. Запишіть векторне, канонічне, параметричні рівняння прямої.

12. Дайте означення нормального вектора прямої.

13. Запишіть загальне рівняння прямої.

14. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

15. Запишіть рівняння прямої у відрізках на осях.

16. Як можна знайти точку перетину двох прямих?

17. Як можна визначити кут між двома прямими?

18. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, заданих загальними рівняннями.

19. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами.

20. Наведіть приклади використання лінійної залежності в економіці.

5 ГРАНИЧНИЙ АНАЛІЗ В ЕКОНОМІЦІ

План

5.1 Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної.

5.2 Основні правила диференціювання. Таблиця похідних.

5.3 Застосування похідної в економічних розрахунках.

5.4 Еластичність функції, застосування еластичності в економічному аналізі.

5.1 Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної

Теоретичний аналіз різних явищ економіки використовує граничні величини, зокрема гранична ціна, граничні витрати, граничний прибуток, гранична продуктивність, гранична корисність, гранична схильність до споживання тощо. Усі ці величини пов'язані з поняттям похідної.

Розглянемо задачі, що приводять до поняття похідної функції.

1. Нехай функція $u = u(t)$ визначає кількість виробленої продукції u за час t. Необхідно знайти продуктивність праці в момент часу t_0. За проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від $u_0 = u(t_0)$ до $u + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$, тоді середню продуктивність праці за проміжок часу Δt визначають як

$$z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}.$$

Отже, продуктивність праці в момент часу t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за час від t_0 до $t_0 + \Delta t$ за умови, що $\Delta t \to 0$, тобто

$$z=\lim_{\Delta t\to 0} z_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

2. Розглянемо задачу про миттєву швидкість. Нехай уздовж деякої прямої рухається точка за законом $s=s(t)$, s – шлях, t – час, необхідно знайти швидкість точки в момент часу t_0. До моменту часу t_0 пройдений шлях дорівнює $s_0=s(t_0)$, а до моменту часу $t_0+\Delta t$ пройдений шлях дорівнює

$$s_0+\Delta s=s(t_0+\Delta t),$$

тоді за проміжок часу Δt середню швидкість визначають як $v_{cp}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Середня швидкість тим точніше визначає миттєву швидкість у момент часу t_0, чим менше Δt. Швидкість точки в момент часу t_0 дорівнює границі середньої швидкості за проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ за умови, що $\Delta t\to 0$, отже

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Для розв’язання багатьох різних задач необхідно знайти границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Ця границя відіграє важливу роль у математичному аналізі, є основним поняттям диференціального числення.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Надамо x_0 приріст Δx, відповідний приріст функції $f(x)$ дорівнює $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Розглянемо відношення

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо існує границя цього відношення за умови, що $\Delta x \to 0,$ то її називають похідною функції $f(x)$ у точці x_0 і записують

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

Означення. Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x)$ у точці x_0 до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Поряд із позначенням $f'(x_0)$ для похідної використовують позначення

$$y', y'_x, f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}.$$

Економісти використовують позначення $Mf(x) = f'(x).$

Операція знаходження похідної від функції називається **диференціюванням** цієї функції.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці $x = x_0$, то функція називається **диференційовною** в цій точці.

Якщо функція диференційовна в кожній точці деякого інтервалу $(a;b),$ то вона називається диференційовною на інтервалі $(a;b).$

Геометричний зміст похідної. Похідна функції $f(x)$ у точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x,$ тобто $f'(x_0) = tg\alpha.$

У кожній точці $x,$ у якій границя (5.1) існує, **похідна** $f'(x)$ **характеризує швидкість зміни процесу**, який описує задана функція $f(x).$

5.2 Основні правила диференціювання. Таблиця похідних

1. Похідна сталої дорівнює нулю

$$(C)' = 0.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак похідної

$$(Cu)' = C \cdot u'.$$

3. Похідна алгебраїчної суми скінченного числа диференційовних функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі похідних цих функцій

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'.$$

4. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу та першої функції на похідну другої функції

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

5. Похідна дробу дорівнює дробові, знаменником якого є квадрат знаменника даного дробу, а чисельником – різниця між добутками знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

6. Похідна складеної функції. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x $(\varphi'(x))$, а функція $y = f(u)$ має похідну у відповідній точці u, то і складена функція $y = f(\varphi(u))$ має похідну в точці x, причому

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad \text{або} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

7. Похідна функції, заданої неявно. Якщо функція задана неявно, тобто у вигляді $F(x; y) = 0$, то для знаходження похідної $y'(x)$ необхідно знайти похідні від правої і лівої частин заданого співвідношення за правилом диференціювання складеної функції $y(x)$. Із отриманого рівняння визначають $y'(x)$.

Подамо **таблицю похідних основних елементарних функцій**.

№ n/n	Функція	Похідна
1	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
2	$y = e^x$	$y' = e^x$
3	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
4	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
5	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
6	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
7	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
13	$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Використовуючи таблицю похідних основних елементарних функцій і правило диференціювання складеної функції, можна отримати **таблицю похідних складених функцій**.

№ n/n	Функція	Похідна
1	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
3	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
4	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
6	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
7	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
8	$y = tgu$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9	$y = ctgu$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12	$y = arctgu$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

5.3 Застосування похідної в економічних розрахунках

У практиці економічних досліджень широкого застосування набули виробничі функції, які використовують для встановлення залежностей, наприклад, випуску продукції від затрат ресурсів, витрат виробництва від обсягу продукції тощо. Якщо припустити, що виробничі функції диференційовні, то важливе значення мають їхні диференціальні характеристики, пов'язані з поняттям похідної.

Розглянемо окремі види виробничих функцій.

1. Нехай **виробнича функція** $K = K(x)$ − **функція витрат виробництва**, що залежить від кількості продукції. Припустимо, що кількість продукції збільшилася на Δx. Кількості продукції $x+\Delta x$ відповідають витрати виробництва $K(x+\Delta x)$, тобто приросту виробництва Δx відповідає приріст витрат виробництва продукції $\Delta K(x) = K(x+\Delta x) - K(x)$. Середній приріст витрат виробництва визначається величиною $\frac{\Delta K(x)}{\Delta x}$.

Границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x}$ називають **граничними витратами виробництва**.

З'ясуємо економічний зміст граничних витрат. Зважаючи, що $\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} \approx K'(x)$ за малих значень Δx, а реальний економічний зміст мають лише цілі x, то можна записати

$$K(x+1) - K(x) \approx K'(x),\ \Delta x = 1.$$

Отже, **функція** $K'(x)$ **визначає, на скільки зміняться витрати в разі збільшення обсягу виробництва на одиницю**.

Граничні витрати виробництва дорівнюють швидкості зміни витрат виробництва.

Наприклад, якщо $K(x)=100x-0,05x^2$, то граничні витрати дорівнюють $K'\left(x\right)=100-0,1x.$

Зокрема, $K'\left(10\right)=100-1=99.$ Це означає, що в разі збільшення обсягу виробництва з 10 до 11 одиниць, витрати виробництва зростуть на 99 одиниць.

2. Нехай **виробнича функція** $y=f\left(x\right)$ **установлює залежність випуску продукції** y **від затрат ресурсу** $x.$ Тоді границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ називається **граничним продуктом**.

3. Якщо позначити через $U\left(x\right)$ **прибуток від продажу** x **одиниць товару**, то границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta U(x)}{\Delta x}=U'(x)$ називається **граничним прибутком**.

4. Наведемо приклад застосування диференціального числення в економічній теорії. Нехай x – кількість реалізованої продукції, $R\left(x\right)$– функція доходу, $C\left(x\right)$ – функція витрат. Позначимо функцію прибутку через $\Pi\left(x\right),$ тоді

$$\Pi\left(x\right)=R\left(x\right)-C\left(x\right).$$

Цілком зрозуміло, що оптимальним рівнем виробництва є такий, за якого прибуток є максимальним, тобто таке значення $x,$ за якого функція $\Pi\left(x\right)$ набуває максимального значення. Зважаючи на необхідну умову існування екстремуму, маємо

$$\Pi'\left(x\right)=0.$$

Оскільки

$$\Pi'\left(x\right)=R'\left(x\right)-C'\left(x\right),$$

маємо

$$R'\left(x\right)-C'\left(x\right)=0,$$

$$R'\left(x\right)=C'\left(x\right).$$

Отже, якщо рівень випуску продукції є оптимальним для виробника, то граничний дохід дорівнює граничним витратам:

$$MR(x) = MC(x),$$

де $MR(x)$ – граничний дохід;

$MC(x)$ – граничні витрати.

Отже, щоб прибуток був максимальним, необхідно, щоб граничний дохід дорівнював граничним витратам.

Це твердження відоме як один із базових законів теорії виробництва: оптимальний для виробника рівень випуску товару визначається рівністю граничних витрат і граничного доходу

$$MR(x) = MC(x).$$

Друге важливе поняття теорії виробництва – це рівень найбільш економічного виробництва, тобто виробництва, за якого середні витрати на виробництво товару мінімальні.

Відповідний економічний закон стверджує: рівень найбільш економічного виробництва визначається рівністю середніх і граничних витрат.

Нехай x – кількість виробленої продукції, $C(x)$ – функція витрат. Розглянемо функцію середніх витрат, яка визначається за формулою $AC(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Мінімального значення функція $AC(x)$ набуває в критичній точці, звідки $AC'(x) = 0$. Зважаючи, що $AC'(x) = \dfrac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$, отримаємо

$$C'(x) \cdot x - C(x) = 0,$$

$$C'(x) \cdot x = C(x),$$

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Отже,

$$MC(x) = AC(x).$$

Використання наприкінці XIX століття граничних (маржинальних) величин істотно змінило способи аналізу та предмет економічної теорії. Економісти почали здебільшого використовувати математичний апарат для доведення економічних законів. Період початку використання елементів диференціального числення в економіці назвали маржинальною революцією.

5.4 Еластичність функції, застосування еластичності в економічному аналізі

Важливе значення в економічних розрахунках мають **коефіцієнти еластичності**. Пов'язано це з тим, що в багатьох практичних задачах зручно обчислювати процент приросту незалежної змінної, що відповідає проценту приросту аргументу.

Нехай задана функція $y = f\left(x\right)$, Δy і Δx – відповідно прирости залежної і незалежної змінних.

Тоді $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, а відносний приріст залежної змінної буде $\dfrac{\Delta y}{y}$. Розглянемо відношення відносного приросту функції до відносного приросту незалежної змінної, тобто $\dfrac{\Delta y}{y} : \dfrac{\Delta x}{x}$. Це відношення показує, у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної. Тоді, якщо існує похідна функції $y = f\left(x\right)$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{x}{\Delta x}\right) = f'(x) \cdot \frac{x}{y}.$$

Означення. Границя відношення відносного приросту функції $y = f\left(x\right)$ до відносного приросту незалежної змінної, коли $\Delta x \to 0$, називається **еластичністю функції** $y = f\left(x\right)$ за змінною x.

Еластичність функції $y = f(x)$ позначають символом $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

За означенням еластичність допускає таку економічну інтерпретацію: **еластичність функції** – це наближений процентний приріст функції, що відповідає приросту незалежної змінної на 1 %.

Величина еластичності $E_x(y)$ за заданого значення x називається **коефіцієнтом еластичності**.

Якщо $|E_x(y)| < 1,$ то функція називається нееластичною (відносний приріст спадає).

Якщо $|E_x(y)| > 1,$ то функція називається еластичною (відносний приріст зростає).

Властивості еластичності

Нехай $f = f(x), g = g(x),$ тоді

1. $E_x(f \pm g) = \dfrac{f \cdot E_x g \pm g \cdot E_x f}{f \pm g}.$
2. $E_x(f \cdot g) = E_x f + E_x g.$
3. $E_x\left(\dfrac{f}{g}\right) = E_x f - E_x g.$

Використовуючи означення еластичності, можна знайти еластичність елементарних функцій:

1. $y = x^n, \quad E_x\left(x^n\right) = n.$
2. $y = a^x, \quad E_x\left(a^x\right) = x \ln a.$
3. $y = ax + b, \; E_x\left(ax + b\right) = \dfrac{ax}{ax + b}.$

Як відомо, поняття функції часто використовують під час прогнозування попиту, пропозиції та ціни товару. Розглянемо як приклад, **еластичність попиту за ціною**. Функціональна залежність між попитом і ціною дозволяє поставити у відповідність ціні p попит $q = f\left(p\right)$.

Проте в багатьох економічних дослідженнях необхідно визначити не величину попиту, а його зміну, викликану відповідною зміною ціни. Згідно з означенням еластичністю попиту за ціною на продукцію буде функція $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$, яка вказує, на скільки відсотків зміниться попит, якщо ціна зросте на 1 %.

У більшості прикладів зі збільшенням ціни продукції попит на неї спадає. Отже, справедлива нерівність $\frac{dq}{dp} < 0.$ Щоб не було від'ємних чисел під час вивчення еластичності попиту, позначимо $E_p(q) = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}.$

Якщо $E_p(q) > 1,$ то підвищення ціни на 1 % відповідає зниженню попиту більше ніж на один процент. У цьому разі зазначають, що попит еластичний.

Якщо $E_p(q) = 1,$ то підвищення ціни на 1 % відповідає зниженню попиту рівно на 1 %. У цьому випадку відзначають, що попит нейтральний.

Якщо $E_p(q) < 1,$ то підвищення ціни на 1 % відповідає зниженню попиту менше ніж на один процент. У цьому разі зазначають, що попит нееластичний.

Попит на товар є еластичним, якщо невелика зміна ціни товару призводить до значної зміни попиту на товар. Якщо зміна ціни призводить до порівняно невеликої зміни попиту на товар, попит є нееластичним.

Коефіцієнти еластичності є тим інструментом, що достатньо часто використовують для формування ціни товару на основі оцінювання попиту.

Оскільки на попит впливають різні фактори, то виникає необхідність вивчення впливу кожного фактору на величину попиту. З цією метою використовують коефіцієнт еластичності попиту за ціною, коефіцієнт еластичності попиту за доходом, коефіцієнт перехресної еластичності попиту.

Еластичність пропозиції визначають аналогічно еластичності попиту. Для диференційовної функції $S = S\left(p\right)$ формула еластичності набуває вигляду

$$E_p(S) = \frac{p}{S(p)} \cdot \frac{dS}{dp}.$$

На відміну від формули еластичності попиту, у формулі еластичності пропозиції відсутній знак «–», оскільки з ростом ринкової ціни на товар пропозиції на цей товар зростають, тобто функція $S = S\left(p\right)$ є зростаючою, звідки $\frac{dS}{dp} > 0.$ Пропозиція називається еластичною, якщо $E_p(S) > 1,$ нееластичною, якщо $0 < E_p(S) < 1,$ нейтральною, якщо $E_p(S) = 1.$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення похідної функції.
2. Який геометричний зміст похідної?
3. Який економічний зміст похідної?
4. Чому дорівнює похідна сталої величини?
5. Сформулюйте правила диференціювання суми, добутку, частки двох функцій.
6. Сформулюйте правило диференціювання складеної функції.
7. Сформулюйте правило диференціювання неявно заданої функції

8. Запишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.

9. Запишіть таблицю похідних складених функцій.

10. Що називається граничними витратами виробництва?

11. Який економічний зміст граничних витрат виробництва?

12. Що називається граничним продуктом? Граничним прибутком?

13. Дайте означення еластичності функції.

14. Дайте означення коефіцієнта еластичності.

15. Чому дорівнює еластичність суми, добутку та частки двох функцій?

16. Чому дорівнює еластичність лінійної функції?

17. Чому дорівнює еластичність степеневої функції?

18. За якою формулою визначається еластичність попиту за ціною?

19. Який попит називається еластичним, нееластичним, нейтральним?

20. Наведіть приклади використання еластичності в економіці.

6 МЕТОДИ І МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМІЦІ

План

6.1 Функція багатьох незалежних змінних, основні означення.

6.2 Частинні похідні функції двох незалежних змінних.

6.3 Частинні похідні вищих порядків. Екстремум функції двох незалежних змінних.

6.4 Умовний екстремум.

6.5 Метод найменших квадратів.

6.6 Задачі оптимізації в економіці.

6.1 Функція двох незалежних змінних, основні означення

Будь-який економічний процес або явище залежить від кількох факторів. Під час вивчення залежностей в економіці використовують функції багатьох незалежних змінних. Зокрема витрати виробництва, продуктивність праці, попит на певний товар є функціями багатьох змінних.

Означення. Змінна величина z називається функцією багатьох незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, якщо кожному набору значень $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ із множини X за певним правилом або законом ставиться у відповідність одне, цілком певне, значення величини z із множини Z, тобто $z = f\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$. Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають **незалежними змінними або аргументами функції**, z – **залежною змінною або функцією**. Кількість незалежних змінних може бути довільною.

Найпростішим випадком функції багатьох незалежних змінних є функція двох незалежних змінних $z = f\left(x; y\right)$.

Як і функція однієї змінної, функція двох незалежних змінних може бути задана табличним, аналітичним або графічним способом.

Основні означення, які належать до функції кількох змінних, є узагальненням відповідних означень для функції однієї змінної.

Означення. Змінна величина z називається функцією двох незалежних змінних x і y, якщо кожній парі значень $(x; y)$ із множини D ставиться у відповідність одне визначене значення z із множини Z: $z = f(x; y)$.

Означення. Множина D називається областю визначення функції z, а множина Z – множиною її значень. Змінні x, y називаються аргументами функції z.

Означення. Областю визначення функції двох незалежних змінних $z = f(x; y)$ називається множина пар значень за яких функція z визначена.

Оскільки пара значень $(x; y)$ визначає точку на площині xOy, то область D – частина площини xOy.

Якщо у просторі задана прямокутна декартова система координат і D – область визначення функції $z = f(x; y)$, то її графіком називають множину точок цього простору з координатами $(x; y; f(x; y))$.

Означення. Лінією рівня функції $z = f(x; y)$ називають множину точок площини xOy, у яких функція z набуває однакового значення.

Отже, лінія рівня функції $z = f(x; y)$ – лінія у площині xOy, яка задана рівнянням $f(x; y) = C, C = const$.

Поняття границі та неперервності функції $z = f(x; y)$ у точці вводять аналогічно цим поняттям для функції однієї змінної.

Означення. Дійсне число A називається границею функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якої послідовності точок з області визначення функції $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \ldots, M_n(x_n, y_n)$, що збігається до точки $M_0(x_0, y_0)$, відповідна послідовність значень функції $f(M_1),\ f(M_2), \ldots,\ f(M_n)$ збігається до числа A.

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо границя функції в цій точці дорівнює значенню функції в цій точці

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0). \qquad (6.1)$$

Якщо позначити різниці $x - x_0 = \Delta x,\quad y - y_0 = \Delta y$, $f(x;\ y) - f(x_0;\ y_0) = \Delta f(x_0;\ y_0)$, то рівність (6.1) матиме вигляд

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x; y) = 0, \qquad (6.2)$$

тобто неперервність функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0,\ y_0)$ означає, що нескінченно малим приростам Δx і Δy аргументів x і y відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta f(x_0;\ y_0)$.

Якщо рівність (6.1) не виконується, то функцію $z = f(x; y)$ називають **розривною в точці** $M_0(x_0,\ y_0)$. Множина точок розриву функції $z = f(x; y)$ може утворювати лінію.

Наприклад, функція $z = \dfrac{1}{x - y}$ розривна в кожній точці прямої $y = x$, оскільки вона не визначена в кожній точці цієї прямої.

6.2 Частинні похідні функції двох незалежних змінних

Нехай задані функція $z = f(x; y)$ і точка $(x; y) \in D$. Частинним приростом функції z за змінною x називається різниця $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y)$.

Частинним приростом функції z за змінною y називається різниця $\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x; y)$.

Означення. Частинною похідною функції $z = f\left(x;\, y\right)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту функції за змінною x до приросту аргументу Δx за умови, що приріст Δx прямує до нуля

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}. \qquad (6.3)$$

Аналогічно визначають означення частинної похідної функції $z = f\left(x;\, y\right)$ за змінною y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \qquad (6.4)$$

Під час знаходження частинних похідних функції двох незалежних змінних користуються вже відомими правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи другу змінну сталою.

Приклад

Знайти частинні похідні функції $y = 5x^3y^2 - 3\cos x + 7y$.

Розв’язання

Використовуючи правило знаходження похідної функції $z = f\left(x;\, y\right)$, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y^2 \cdot 3x^2 + 3\sin x = 15x^2y^2 + 3\sin x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3 \cdot 2y + 7 = 10x^3y + 7.$$

Аналогічно розглядають поняття частинних похідних функцій трьох і більше змінних.

Частинні похідні функції декількох змінних визначають і обчислюють також у припущенні, що змінюється тільки одна з незалежних змінних, а інші залишаються сталими.

Частинна похідна функції декількох змінних має той самий механічний зміст, що і похідна функції однієї змінної – це швидкість зміни функції за умови зміни одного з аргументів.

Повний диференціал функції $z = f(x; y)$

Означення. Повним приростом функції $z = f(x; y)$ у точці $(x; y)$ називається різниця

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y),$$

де Δx і Δy – довільні прирости аргументів.

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається диференційовною в точці $M(x; y)$ якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta f(x; y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x; y)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x; y)\Delta y + \alpha(x; y; \Delta x; \Delta y)\Delta x +$$
$$+\beta(x; y; \Delta x; \Delta y)\Delta y,$$

де $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0.$

Теорема (достатні умови диференційовності). Якщо функція $z = f(x; y)$ має неперервні частинні похідні в точці $M(x; y)$, то вона диференційовна в цій точці.

Означення. Повним диференціалом функції $z = f(x; y)$ називається головна частина повного приросту Δz, лінійна щодо приростів аргументів Δx і Δy, тобто

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{6.5}$$

Диференціали незалежних змінних збігаються із їхніми приростами, тобто

$$dx = \Delta x,\ dy = \Delta y,$$

отже, повний диференціал функції $z = f\left(x; y\right)$ обчислюють за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогічно, повний диференціал функції трьох змінних $u = f\left(x; y; z\right)$ обчислюють за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Функції багатьох незалежних змінних часто застосовують у різних галузях знань, зокрема і в економіці.

Прикладом використання функцій багатьох змінних в економіці є виробничі функції.

Виробнича функція – це функція $z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, незалежні змінні якої є обсягами ресурсів, що використовують у виробництві, а значення функції визначає обсяг виробленої продукції. Для певного виробництва виробнича функція може пов'язувати обсяг продукції у вартісному або кількісному вигляді з людськими ресурсами, обсягами сировини, енергії, основним капіталом тощо. Такі функції описують технологію певного підприємства.

Зокрема нехай задана виробнича функція $z = f\left(x; y\right)$, яка визначає витрати виробництва залежно від кількості x і y двох видів продукції. Припустимо, що кількість виробництва першого виду продукції змінилася на Δx, тоді функція $z = f\left(x; y\right)$ отримає приріст

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y),$$

тоді відношення $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ характеризує середній приріст виробничої функції в разі збільшення змінної x на Δx. Якщо перейти до границі, отримаємо граничні витрати виробництва на одиницю продукції x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогічно, граничні витрати виробництва на одиницю продукції y визначають як

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Еластичність функції $z = f\left(x; y\right)$

Як і в разі функції однієї незалежної змінної, для функції двох незалежних змінних розглядають поняття еластичності функції.

Частинним коефіцієнтом еластичності функції $z = f\left(x; y\right)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ за її аргументом називається границя відношення відносного частинного приросту функції за цим аргументом до відносного приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, за умови, що значення всіх інших аргументів цієї функції залишаються сталими.

Еластичність функції $z = f\left(x; y\right)$ за аргументом x визначається співвідношенням

$$E_x(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z}. \qquad (6.6)$$

Для визначення еластичності функції $z = f\left(x; y\right)$ за аргументом y використовують співвідношення

$$E_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y} \right) = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}. \qquad (6.7)$$

Еластичність за деяким фактором наближено визначає відношення темпів приросту функції до темпів приросту цього фактору за незмінного значення всіх інших, тобто еластичність визначає, на скільки відсотків зміниться випуск продукції, якщо витрати будь-якого ресурсу збільшують на 1 % за незмінного обсягу іншого ресурсу.

За означенням коефіцієнта еластичності можна зробити висновок, що він є величиною безвимірною, а за модулем може бути більше, менше, або дорівнювати одиниці.

Функцію $z = f(x; y)$ за певним аргументом вважають:

1) еластичною, якщо відповідний частинний коефіцієнт еластичності за абсолютною величиною більше одиниці;

2) нееластичною, якщо коефіцієнт еластичності – менше ніж одиниця;

3) нейтральною, якщо коефіцієнт еластичності за модулем дорівнює одиниці.

6.3 Частинні похідні вищих порядків. Екстремум функції двох незалежних змінних

Нехай функція $z = f(x; y)$ має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, які є функціями двох змінних. Від вказаних похідних можна знову знайти частинні похідні

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Одержані частинні називають **частинними похідними другого порядку функції** $z = f(x; y)$. Отже, частинними похідними другого порядку функції $z(x; y)$ називають похідні від похідних першого порядку.

Частинні похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають **мішаними**.

Доведено, що за умови їхньої неперервності вони рівні, тобто результат не залежить від порядку диференціювання

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \qquad (6.8)$$

У разі розривності мішаних частинних похідних рівність (6.8) може і не виконуватись.

Від частинних похідних другого порядку також можна знаходити частинні похідні, які називають **частинними похідними третього порядку**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \qquad \text{тощо.}$$

Екстремум функції двох незалежних змінних

Означення. Функція $z = f(x; y)$ має в точці $P_1(x_1; y_1)$ локальний максимум, якщо існує окіл точки P_1, у якому для кожної точки $P(x; y)$ виконується нерівність $f(P_1) \geq f(P)$, тобто приріст $\Delta f(P_1)$ зберігає знак у деякому околі точки P_1.

Означення. Функція $z = f(x; y)$ має в точці $P_2(x_2; y_2)$ локальний мінімум, якщо існує окіл точки P_2, у якому для кожної точки виконується нерівність $f(P_2) \leq f(P)$, тобто приріст $\Delta f(P_2)$ зберігає знак у деякому околі точки P_2.

Теорема (необхідні умови екстремуму). Нехай $P_0(x_0; y_0)$ – точка локального екстремуму функції $z = f(x; y)$. Якщо в цій точці існують частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}(P_0)$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}(P_0)$, то вони дорівнюють нулю.

Означення. Точка $P_0\left(x_0; y_0\right)$, у якій частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю або не існують, називається критичною (або стаціонарною) точкою функції $z = f\left(x; y\right)$.

Нехай $P_0\left(x_0; y_0\right)$ – стаціонарна точка функції $z = f\left(x; y\right)$.

Позначимо

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2}$$

і покладемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тоді справедлива **теорема (достатні умови екстремуму)**: якщо $\Delta > 0$, то функція має в точці P_0 екстремум, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$; якщо $\Delta < 0$, то в точці P_0 екстремуму немає; якщо $\Delta = 0$, то запитання про існування екстремуму залишається відкритим.

6.4 Умовний екстремум

Нехай потрібно знайти екстремум функції $z = f\left(x; y\right)$ за умови, що на незалежні змінні x і y накладені додаткові обмеження: $\varphi\left(x; y\right) = 0$. Геометрично це означає, що точка $P\left(x; y\right)$ лежить на лінії, визначеній рівнянням $\varphi\left(x; y\right) = 0$.

Для розв'язання задачі на умовний екстремум застосовують методи виключення невідомих і невизначених множників Лагранжа.

1. **Метод виключення невідомих.** Якщо рівняння $\varphi\left(x; y\right)$ можна розв'язати відносно однієї із змінних, тобто подати в явному вигляді цю змінну як функцію другої змінної, то, підставивши розв'язок рівняння зв'язку у вираз для функції

$z = f(x; y)$, отримаємо нову функцію, яка залежить тільки від однієї змінної. Локальний екстремум цієї нової функції і буде умовним локальним екстремумом функції $z = f(x; y)$. Отже, завдання пошуку умовного екстремуму можна звести до розв'язання задачі про визначення локального екстремуму функції однієї змінної, тобто до пошуку безумовного екстремуму.

2. **Метод невизначених множників Лагранжа.** Якщо рівняння зв'язку не можна розв'язати відносно будь-якої змінної, то для знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x; y)$ за наявності співвідношення $\varphi(x; y) = 0$ застосовують метод невизначених множників Лагранжа. Суть методу полягає в тому, щоб перейти від задачі про пошук умовного екстремуму функції двох змінних до задачі про пошук безумовного екстремуму функції трьох змінних.

Згідно з цим методом складають так звану **функцію Лагранжа**

$$L(\lambda; x; y) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y), \tag{6.9}$$

де λ – невизначений сталий множник (*множник Лагранжа*).

Функцію Лагранжа досліджують на екстремум.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Нехай функція $L(\lambda; x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0; \lambda)$ досягає екстремуму. Тоді, якщо функції $f(x; y)$ та $\varphi(x; y)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні першого порядку за змінними x та y, то частинні похідні першого порядку функції $L(\lambda; x; y)$ за змінними λ, x, y у точці $M_0(x_0; y_0; \lambda)$ дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x; y) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Отже, розв'язуючи систему (6.10), можна знайти координати стаціонарних точок. Умова (6.10) є необхідною, але не є достатньою умовою існування екстремуму.

Теорема (достатня умова екстремуму). Нехай для функції $L(\lambda; x; y)$ точка $M_0(x_0; y_0; \lambda)$ є стаціонарною. Тоді, якщо функція в цій точці має похідні другого порядку та другий диференціал за фіксованого значення λ

$$d^2L = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} dy^2, \quad (6.11)$$

то при $d^2L > 0$ у стаціонарній точці, функція досягає мінімуму, а при $d^2L < 0$ – максимуму.

Схема дослідження на екстремум функції Лагранжа**:**

1) скласти функцію Лагранжа (6.9);

2) скласти систему (6.10) та розв'язати її, тобто знайти стаціонарні точки;

3) перевірити достатню умову екстремуму в кожній стаціонарній точці;

4) зробити висновки.

6.5 Метод найменших квадратів

У соціально-економічних дослідженнях важливо визначити аналітичні залежності між різними величинами. Побудова відповідних залежностей дозволяє зрозуміти вплив між різними факторами та спрогнозувати сценарій розвитку економічного явища або процесу. Одним із методів одержання таких формул є метод найменших квадратів.

Нехай треба встановити залежність між величинами x і y (установити загальну тенденцію залежності y від x) у вигляді $y = f(x)$. Формули, отримані на основі вимірювань і спостережень, називаються емпіричними. Задача знаходження емпіричних формул розбивається на два етапи:

1) установлення виду залежності (лінійна, квадратична, логарифмічна тощо);
2) визначення відповідних параметрів функції $y = f(x)$.

Нехай треба встановити залежність між величинами y і x, значення яких подано в таблиці

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

У прямокутній декартовій системі координат будуємо точки $M_i(x_i;\ y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n.$ Припустимо, що вони ґрупуються навколо деякої прямої лінії. Тоді природно вважати, що між величинами y і x існує залежність виду

$$y = ax + b. \qquad (6.12)$$

Розглянемо різницю δ_i (відхилення) між точним значенням функції в точці x_i і відповідним значенням із таблиці

$$\delta_i = ax_i + b - y_i,\ \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Числа δ_i можуть бути додатними, від'ємними, нулями. Складемо функцію

$$S(a;b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a + bx_i - y_i\right)^2. \qquad (6.13)$$

Функція $S(a;b)$ є функцією двох незалежних змінних a і b. Потрібно так підібрати параметри a і b, щоб за заданих x_i

та y_i функція $S(a;b)$ набувала мінімального значення. У такому разі відхилення точок $(x_i; y_i)$ від прямої (6.12) буде мінімальним. Отже, необхідно дослідити функцію $S(a;b)$ на екстремум.

Знайдемо критичні точки функції (6.13)

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(a + bx_i - y_i\right) = 2an + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(a + bx_i - y_i\right)\cdot x_i = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0.$$

Отримали лінійну систему двох рівнянь із двома невідомими a і b

$$\begin{cases} b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + an = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{6.14}$$

Позначимо

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}.$$

Тоді система (6.14) матиме вигляд

$$\begin{cases} b\overline{x^2} + a\overline{x} = \overline{xy}, \\ b\overline{x} + a = \overline{y}. \end{cases} \tag{6.15}$$

Розв'язуючи систему (6.15), отримаємо значення параметрів a і b, за яких рівняння $y=ax+b$ найкраще визначає залежність між y та x за результатами спостережень.

Зауваження. Припустимо, що між y і x існує квадратична залежність $y = ax^2 + bx + c$.

Значення параметрів a, b, c необхідно підібрати так, щоб сума квадратів різниць $\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)$ була найменшою.

Тоді

$$d(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Необхідна умова існування екстремуму

$$\left\{ \frac{\partial d}{\partial a} = 0, \frac{\partial d}{\partial b} = 0, \frac{\partial d}{\partial c} = 0. \right.$$

6.6 Задачі оптимізації в економіці

Однією з поширених галузей застосування функції кількох змінних є розв'язання задач оптимізації. Математична дисципліна, яка розглядає теорію побудови математичних моделей задач оптимізації та методи їхнього розв'язання, називається математичним програмуванням.

Прикладом задачі математичного програмування є задача про оптимальне використання сировини, задача про оптимальний склад суміші, транспортна задача, яка передбачає оптимізацію перевезень, матрична гра, згідно з якою здійснюється оптимізація ймовірностей застосування тієї чи іншої стратегії, тощо. Хоча всі ці задачі є задачами на умовний екстремум і для їхнього розв'язання можна застосовувати метод Лагранжа, у межах математичного програмування розробляють спеціальні методи, призначені для розв'язання саме цих типів задач.

Однією із класичних задач математичного програмування є задача оптимального використання сировини під час складання плану роботи підприємства з метою одержання максимального прибутку від реалізації продукції.

Задача про використання сировини. Нехай підприємство випускає n видів продукції, для виробництва якої використовують m видів сировини. Потреби в сировині певного виду для виготовлення одиниці продукції, кількість сировини та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці. Скільки одиниць продукції кожного виду треба виробити, щоб отримати максимальний прибуток?

Задача про використання сировини

Вид сировини	**Продукція**				**Кількість сировини**
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибуток	C_1	C_2		C_n	

Складемо математичну модель задачі. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – кількість продукції відповідного найменування, що виробляє підприємство. Тоді за даними таблиці математична модель задачі матиме вигляд

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \quad \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отже, розв’язок задачі про використання сировини зведено до розв’язку системи m лінійних нерівностей із n невідомими. Зрозуміло, що система має безліч розв'язків і серед них потрібно знайти такий, при якому функція Z досягає максимального значення. Загалом маємо задачу на умовний екстремум функції n змінних, у якій на невідомі x_j накладають обмеження у вигляді системи нерівностей. Для розв'язання задачі використовують методи математичного програмування.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення функції багатьох незалежних змінних.
2. Дайте означення функції двох незалежних змінних.
3. Що називається областю визначення функції двох незалежних змінних? Областю значень?
4. Що називається лінією рівня функції двох незалежних змінних?
5. Дайте означення границі функції двох незалежних змінних.
6. Дайте означення частинної похідної функції $z = f(x; y)$ за змінною x.
7. Дайте означення частинної похідної функції $z = f(x; y)$ за змінною y.
8. За яким правилом обчислюються частинні похідні функції $z = f(x; y)$?
9. Дайте означення повного приросту функції $z = f(x; y)$.

10. Дайте означення повного диференціалу функції $z = f(x; y)$.

11. Запишіть формулу для обчислення диференціалу функції $z = f(x; y)$.

12. За яким співвідношенням визначають еластичність функції $z = f(x; y)$ за аргументом x?

13. За яким співвідношенням визначають еластичність функції $z = f(x; y)$ за аргументом y?

14. У якому разі функція $z = f(x; y)$ є еластичною, нееластичною, нейтральною?

15. Як знайти частинні похідні другого порядку від функції $z = f(x; y)$?

16. Як знайти частинні похідні третього порядку від функції $z = f(x; y)$?

17. Які частинні похідні другого порядку функції $z = f(x; y)$ називаються мішаними?

18. Сформулюйте необхідні умови існування екстремуму функції $z = f(x; y)$.

19. Сформулюйте достатні умови існування екстремуму функції $z = f(x; y)$.

20. У чому полягає суть методу Лагранжа знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x; y)$?

7 ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ

План

7.1 Сутність і класифікація оптимізаційних задач.

7.2 Лінійні оптимізаційні моделі економіки.

7.3 Постановка задач лінійного програмування, їхні моделі та основні форми.

7.4 Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування.

7.5 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

7.6 Поняття про симплексний метод.

7.7 Поняття про взаємно двоїсті задачі.

7.8 Математична модель транспортної задачі.

7.9 Оптимальний план транспортної задачі. Метод потенціалів.

7.1 Сутність і класифікація оптимізаційних задач

Дослідження економічних процесів і явищ пов'язане з певними труднощами, оскільки потрібно проводити аналіз складних соціально-економічних систем, відтворення яких у реальному житті для проведення експериментів практично неможливе. Крім того, економіст не може контролювати всі фактори, що впливають на економічний процес, та отримує дані лише емпіричним або розрахунковим способом. Джерелом емпіричних даних є досвід інших країн, підприємств, суб'єктів господарювання тощо. Розрахунки здійснюють на підставі певного спрощеного уявлення про об'єкт дослідження, який економіст подає у вигляді моделі.

Математична модель – це досить точний опис задачі за допомогою математичного апарату (різних функцій, рівнянь, систем рівнянь, нерівностей тощо).

Послідовність використання математичних моделей під час дослідження економічних процесів і систем така:

– формулюють економічну проблему;

– створюють математичну модель задачі, у якій логічні зв'язки між елементами економічної системи перетворюються на математичні співвідношення: функції, рівняння, нерівності тощо;

– розв'язують математичну задачу, перевіряють правильність розв'язку;

– отриманий розв'язок пояснюють мовою економіки, аналізують результат.

Велику групу математичних методів в економіці утворюють оптимізаційні методи, що дозволяють оптимізувати результатів різних видів діяльності з урахуванням наявних ресурсів.

Розроблено математичні методи, які дозволяють за допомогою відповідних розрахунків знаходити найкращий варіант із всіх можливих. Розділ математики, який вивчає ці методи, називається математичним програмуванням.

Математичне програмування – це розділ математики, який розробляє теорію і чисельні методи розв'язку оптимізаційних задач, у яких цільову функцію досліджують на екстремум, а система обмежень наведена у вигляді лінійних або нелінійних рівнянь чи нерівностей.

Початок розвитку математичного програмування поклав у 1939 році математик Леонід Віталійович Канторович у роботі «Математичні методи організації і планування підприємства».

Для розв'язання конкретної оптимізаційної задачі потрібно побудувати математичну модель.

Побудова математичних моделей містить такі два етапи:

– мету задачі подають у вигляді залежності від невідомих величин (наприклад, мета – прибуток від реалізації виробленої продукції, сумарні витрати на перевезення вантажів тощо). Отриманий вираз називається цільовою функцією, функцією цілі, функціоналом або критерієм ефективності даної задачі;

– на підставі умови конкретної задачі, формулюють обмеження, які повинні бути накладені на невідомі величини (змінні). Обмеження – сукупність рівнянь або нерівностей.

Розглянемо конкретний приклад.

Задача оптимального виробничого планування

Нехай для виробництва трьох видів продукції A_1, A_2, A_3 використовують ресурси $B_1, B_2, B_3, B_4,$ запаси яких становлять b_1, b_2, b_3, b_4 одиниць відповідно. Відомі норми витрат a_{ij} кожного виду ресурсу B_i на виготовлення одиниці продукції A_j, а також прибуток c_j від виробництва та реалізації кожного виду продукції.

Ресурси	**Продукція**			**Запаси**
	A_1	A_2	A_3	
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
B_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	b_4
Прибуток (ум.од.)	c_1	c_2	c_3	

Необхідно знайти план виробництва, щоб максимізувати загальний прибуток.

Припустимо, що для того, щоб максимізувати загальний дохід, потрібно виготовляти x_1 одиниць продукції A_1, x_2 одиниць продукції A_2 та x_3 одиниць продукції A_3. Зважаючи, що прибуток від реалізації однієї одиниці продукції A_1 становить c_1 ум. од, тоді прибуток від планової кількості x_1 одиниць становитиме c_1x_1, а отже, загальний прибуток становитиме $F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, отже, отримали функцію мети

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max.$$

Знайдемо систему обмежень для змінних задачі. Зважаючи, що витрати ресурсу B_1 на виробництво запланованих обсягів продукції x_1, x_2, x_3 становитимуть відповідно $a_{11}x_1, a_{12}x_2, a_{13}x_3$ одиниць, а запас ресурсу B_1 не повинен перевищувати b_1 умовних одиниць, отримаємо нерівність

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1.$$

Аналогічні нерівності можна отримати і за іншими видами ресурсів, тобто отримаємо систему обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le b_4. \end{cases}$$

Додавши умову невід'ємності змінних

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

отримаємо математичну модель задачі:

– знайти максимум лінійної функції цілі

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

– за наявності лінійної системи обмежень-нерівностей

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \\ i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

де $x_j \ge 0$, n – кількість видів продукції; m– кількість видів ресурсів.

Отже, задача математичного програмування полягає в тому, щоб з усіх допустимих варіантів значень змінних (невідомих моделей) знайти такі, за яких функція цілі (критерій оптимальності) досягає екстремуму.

Для побудови математичної моделі конкретної економічної задачі необхідно:

– вибрати змінні задачі;

– скласти систему обмежень;

– задати цільову функцію.

Розглянемо класифікацію задач математичного програмування:

– задачі лінійного програмування, якщо критерій ефективності та функції обмежень лінійні;

– задачі цілочислового програмування в разі, коли змінні набувають цілих значень;

– задачі нелінійного програмування, якщо критерій ефективності і (або) система обмежень задаються нелінійними функціями;

– задачі дробово-лінійного програмування, якщо цільова функція є відношенням двох многочленів;

– задачі параметричного програмування, якщо дані в задачі вважають не сталими величинами, а функціями, що залежать від деякого параметра;

– задачі опуклого програмування, якщо цільова функція та функції обмежень мають властивості опуклості;

– задачі динамічного програмування, якщо змінна часу і критерій ефективності виражається не в явному вигляді, як функція змінних, а через рівняння, які описують перебіг операцій із часом;

– задачі стохастичного програмування, якщо функції цілі містять випадкові величини;

– якщо через досить велику кількість розв’язків точний оптимум знайти не вдається, то звертаються до методів евристичного програмування, яке дозволяє скоротити кількість варіантів і знайти, якщо не оптимальний розв’язок, то достатньо наближений до нього розв’язок.

Із зазначених методів математичного програмування найбільш поширеним є лінійне програмування.

7.2 Лінійні оптимізаційні моделі економіки

Розглянемо типові задачі лінійного програмування.

1. Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток від одиниці реалізованої продукції. Відомі обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність).

Критерії оптимальності – максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

2. Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин і потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності – мінімальна вартість раціону.

3. Транспортна задача: розглядають певну кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників і забезпечення вимог споживачів.

Критерії оптимальності – мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

4. Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядають кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляють на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами в такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності – мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

5. Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна кількість кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожну роботу може виконувати тільки один кандидат. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади.

Критерій оптимальності – максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

6. Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планують діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задано суму коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів.

Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного півперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Критерії оптимальності – максимальний сумарний дохід за весь період.

7.3 Постановка задач лінійного програмування, їх моделі та основні форми

Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, k, \tag{7.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = k+1, \ldots, n, \tag{7.3}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, l,\ \ l \le n, \tag{7.4}$$

де a_{ij}, b_i, c_j – задані постійні величини.

Функція (7.1) називається **цільовою функцією (або лінійною формою)** задачі (7.1)–(7.4), а умови (7.2)–(7.4) – обмеженнями даної задачі.

Стандартною (або симетричною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції (7.1) за умови виконання умов (7.2) і (7.4), де $k = m$ і $l = n$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

або

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

Канонічною (або основною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції (7.1) за умови виконання умов (7.3) і (7.4), де $k = 0$ і $l = n$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

Якщо цільову функцію F досліджують на екстремум типу **мінімум,** то відзначають, що задача задана в **першій** канонічній формі, якщо на екстремум типу **максимум – у другий**.

Сукупність чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють обмеженням задачі (7.2)–(7.4), називається **допустимим розв’язком (або планом)**.

Допустимий план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається **опорним планом** задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень (7.3), а також обмеження (7.4) щодо невід’ємності змінних.

Опорний план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається **невиродженим,** якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він **вироджений**.

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, за якого цільова функція задачі (7.1) набуває свого максимального (мінімального) значення, називається **оптимальним**.

Значення цільової функції (7.1) за умови плану X будемо позначати через $F(X)$. Отже, X^* – оптимальний план задачі, якщо для будь-якого X виконується нерівність $F(X) \le F(X^*)$ (відповідно $F(X) \ge F(X^*)$).

Отже, у задачах лінійного програмування можна виділити два типи однорідних обмежень на вибір змінних: лінійні рівняння та лінійні нерівності. Залежно від системи обмежень розглядають такі задачі.

Загальна задача лінійного програмування – цільову функцію досліджують на максимум або мінімум; система обмежень складається з нерівностей і (або) рівнянь; на невідомі накладена умова невід'ємності.

Стандартна (симетрична) форма запису задачі лінійного програмування – цільову функцію досліджують на максимум; система обмежень складається з нерівностей типу $\le$; на невідомі накладена умова невід'ємності (перша стандартна форма). Цільову функцію досліджують на мінімум; система обмежень складається з нерівностей типу $\ge$; на невідомі накладена умова невід'ємності (друга стандартна форма).

Канонічна (основна) форма запису задачі лінійного програмування – цільову функцію досліджують на максимум (мінімум); система обмежень складається з рівнянь із невід'ємною правою частиною; на невідомі накладена умова невід'ємності.

Указані вище три форми задачі лінійного програмування еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою деяких перетворень може бути переписана у формі іншої задачі. Це означає, що якщо є спосіб знаходження розв’язку однієї з вказаних задач, то тим самим може бути визначений оптимальний план будь-якої із трьох задач.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі лінійного програмування до іншої, потрібно вміти, по-перше, зводити задачу мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності і навпаки, по-третє, замінювати змінні, які не підлягають умові невід’ємності.

У тому разі, коли потрібно знайти мінімум функції $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, можна перейти до знаходження максимуму функції $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$, оскільки $\min F = -\max(-F)$.

Обмеження-нерівність початкової задачі лінійного програмування, що має вигляд «$\leq$», можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід’ємної змінної, а обмеження-нерівність виду «$\geq$» – в обмеження-рівність відніманням із його лівої частини додаткової невід’ємної змінної. Отже, обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$$

перетвориться в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \geq 0), \quad (7.5)$$

а обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i \ -$$

в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \geq 0). \quad (7.6)$$

Водночас кожне рівняння системи обмежень

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$

можна записати у вигляді нерівностей

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \geq -b_i. \end{cases} \quad (7.7)$$

Число додаткових невід'ємних змінних, що вводяться, у разі перетворення обмежень-нерівностей в обмеження-рівність дорівнює числу перетворюваних нерівностей.

Додаткові змінні, що вводяться, мають цілком певний економічний зміст. Зокрема якщо в обмеженнях початкової задачі лінійного програмування відображається витрата і наявність виробничих ресурсів, то числове значення додаткової змінної в плані задачі, записаної у формі основної, дорівнює об'єму невживаного відповідного ресурсу.

Якщо змінна x_k не підлягає умові невід'ємності, то її потрібно замінити двома невід'ємними змінними u_k і v_k, прийнявши $x_k = u_k - v_k$.

7.4 Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Для кращого розуміння алгебраїчних властивостей задач лінійного програмування використовують їхню геометричну інтерпретацію.

Означення. Множина точок M називається **опуклою**, якщо разом із будь-якими двома її точками множині належить і відрізок, що їх сполучає.

Означення. Множина називається **обмеженою**, якщо її можна помістити в кулю (коло) скінченного радіуса з центром у будь-якій точці множини, і **необмеженою** в іншому разі.

Означення. Граничною називається така точка множини, у довільному околі якої є і точки, що належать множині, і точки, що їй не належать.

Означення. Сукупність граничних точок множини називається її границею.

Найпростіший приклад опуклої множини – опуклий многокутник. Його границя складається з відрізків чи прямих.

Точки, у яких перетинаються відрізки чи прямі границі многокутника, називаються його вершинами.

Означення. Перетином областей називають множину точок, що належать кожній із цих областей.

Деякі задачі математичного програмування можна розв'язувати графічно. Графічний метод використовують для обмеженого типу задач, а саме – із двома (трьома) змінними. Графічний метод використовують для розв'язання задач типу

$$F(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min), \qquad (7.8)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le (\ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le (\ge) b_2, \\ \quad\quad\quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le (\ge) b_m, \end{cases} \qquad (7.9)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (7.10)$$

Цей метод ґрунтується на можливості графічного зображення області допустимих розв'язків задачі і знаходження серед них оптимального розв'язку.

Область допустимих розв'язків задачі будують як перетин областей розв'язків кожного із заданих обмежень (7.9), (7.10).

Областю розв'язків лінійної нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ є одна із двох півплощин, на які пряма $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$ поділяє координатну площину.

Теорема. Многокутник розв'язків завжди є опуклою фігурою.

Теорема. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у вершині многокутника розв'язків.

Отже, якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то максимального значення цільова функція задачі набуває в одній із вершин многокутника розв'язків.

Якщо максимального значення цільова функція задачі набуває більш ніж в одній вершині, то вона набуває його в будь-якій точці, що є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

7.5 Графічний метод знаходження розв'язків задачі лінійного програмування

Під час розв'язання задач лінійного програмування графічним методом для знаходження серед допустимих розв'язків оптимального розв'язку використовують лінії рівня та опорні прямі.

Лінією рівня називається пряма, на якій цільова функція набуває постійного значення. Рівняння лінії рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = l,$ де $l = const.$ Усі лінії рівня паралельні між собою. Їхня нормаль $\overline{n} = (c_1, c_2).$

Опорною прямою називається лінія рівня, яка має хоча б одну спільну точку з областю допустимих розв'язків і щодо якої ця область розміщена в одній з півплощин.

Область допустимих розв'язків будь-якої задачі може мати не більше ніж дві опорні прямі, на одній із яких може розміщуватись оптимальний розв'язок.

Значення цільової функції на лініях рівня зростають, якщо лінії рівня переміщувати в напрямку нормалі, та спадають, якщо лінії рівня переміщувати в протилежному напрямку.

Алгоритм графічного методу розв'язування ЗЛП

1. Побудувати многокутник розв'язків системи обмежень як перетин півплощин, що задаються нерівностями системи.

Якщо область допустимих розв'язків є пустою множиною, то задача не має розв'язків.

2. Побудувати нормаль ліній рівня $\overline{n} = (c_1, c_2)$ та одну з ліній рівня, що має спільну точку з областю.

3. Пересувати лінію рівня в напрямку $\overline{n} = (c_1, c_2)$ (якщо цільову функцію досліджують на максимум) та у протилежному напрямку (якщо цільову функцію досліджують на мінімум) до перетину з останньою точкою многокутника розв'язків.

4. Знайти координати побудованої точки та обчислити значення цільової функції в цій точці.

Якщо в разі пересування лінії рівня по області допустимих значень, лінія рівня потрапляє в нескінченність, то задача не має розв’язків через необмеженність цільової функції.

Якщо цільова функція набуває екстремуму у двох кутових точках, то задача має нескінченну множину розв’язків. Оптимальним розв’язком буде будь-яка випукла лінійна комбінація цих точок.

Приклад. Розв’язати графічним методом задачу лінійного програмування

$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язання

Зобразимо на площині систему координат x_1Ox_2 і побудуємо граничні прямі області допустимих розв’язків

$$(1): -2x_1 + 3x_2 = 12,\ (2):\ x_1 + x_2 = 9,\ (3): 3x_1 - 2x_2 = 12,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Область допустимих значень задачі визначається многокутником $OABCD$ (рис. 7.1).

Знайдемо $\overline{n}(2;4)$, побудуємо цей вектор так, щоб його початок розміщувався в початку координат. У напряму вектора $\overline{n}(2;4)$ переміщуємо лінію рівня (вона перпендикулярна до $\overline{n}$) до останньої точки перетину з многокутником розв’язків, в результаті одержуємо точку $B,$ яка є точкою перетину прямих (1) і (2).

Розв’язавши систему рівнянь (1) і (2), знаходимо координати точки B: $x_1 = 3; x_2 = 6.$

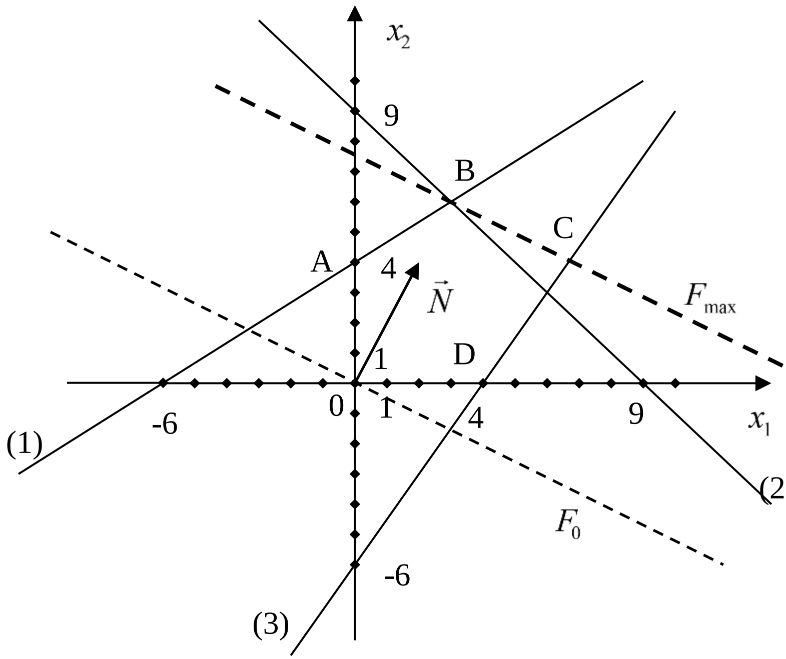


Рисунок 7.1

Це і буде оптимальний розв'язок даної задачі, якому відповідає максимальне значення цільової функції $F_{max} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 30.$

Відповідь: $x_1 = 3; x_2 = 6.$

Підкреслимо, що в разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі випадки:

1. Цільова функція набуває максимального (мінімального) значення у вершині многокутника розв'язків.

2. Максимального (мінімального) значення цільова функція набуває на стороні многокутника розв'язків, тобто задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Якщо цільова функція необмежена або система обмежень задачі несумісна, то задача лінійного програмування не має розв'язків.

7.6 Поняття про симплексний метод

Симплексний метод (симплекс-метод) дозволяє знайти оптимальний розв'язок задачі (якщо він існує) за кінцеве число кроків.

Ідея методу полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого так, щоб цільова функція оптимізовувалась (зростала чи спадала залежно від умови задачі).

Означення. Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати опорним.

Критерій оптимальності за симплекс-таблицями: якщо функція максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то **опорний план є оптимальним.** Коефіцієнти нульового можна інтерпритувати як приріст функції z у разі збільшення вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним – якщо коефіцієнт додатний.

Алгоритм роботи із симплекс-таблицями

1. Звести задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнити таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) і коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевірити задачу на оптимальність за критерієм.
4. Для визначення **ключового стовпця** знайти найбільший елемент (за модулем) у нульовому рядку під час дослідження цільової функції на максимум чи найменший елемент під час дослідження її на мінімум.
5. Для вибору **ключового елемента** знайти відношення вільних членів (чисел стовпчика «b_i (опорний план)») до відповідних додатних чисел ключового стовпчика й обрати серед них **найменше**.

6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця відмітити **ключовий елемент**.

7. Замість базисної невідомої ключового рядка ввести нову базисну невідому – невідому ключового стовпчика.

8. Для заповнення ключового рядка поділити всі відповідні елементи на ключовий елемент і записати отримані числа на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок нової таблиці називають **провідним**.

9. Усі інші рядки заповнити за методом Жордана – Гаусса.

10. Перевірити новий опорний план на оптимальність. Якщо він не є оптимальним, то треба повернутися до пункту 4, якщо новий опорний план є оптимальним, то задача розв’язана.

Розглянемо конкретний приклад.

На виготовлення двох видів продукції B_1 і B_2 використовують три види сировини A_1, A_2, A_3. Запаси сировини, норми їхніх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції подано у таблиці. Знайти розмір максимального прибутку, який можна одержати за наявності заданих запасів сировини.

Ресурси	**Продукція**		**Запаси ресурсів (ум. од)**
	B_1	B_2	
A_1	14	3	280
A_2	2	2	62
A_3	2	13	260
Прибуток (ум. од.)	15	18	

Розв’язання

Складемо математичну модель задачі. Нехай необхідно виготовляти x_j одиниць продукції j-го виду $(j=1, 2)$, тоді

$$F = 15x_1 + 18x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 3x_2 \le 280, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 62, \\ 2x_1 + 13x_2 \le 260, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2.$$

Зведемо задачу до канонічної форми

$$F - 15x_1 - 18x_2 = 0,$$
$$\begin{cases} 14x_1 + 3_2 + x_3 = 280, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 62, \\ 2x_1 + 13x_2 + x_5 = 260, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Складемо симплекс-таблицю та застосуємо симплекс-метод

№ Рядка	**Базис**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$\frac{b_i}{c_i}$
0	z	–15	**–18**	0	0	0	0	
1	x_3	14	3	1	0	0	280	$\frac{280}{3}$
2	x_4	2	2	0	1	0	62	$\frac{62}{2}$
3	$\underline{x_5}$	2	**13**	0	0	1	260	$\frac{260}{13}$
0	z	–15	**–18**	0	0	0	0	
1	x_3	14	3	1	0	0	280	
2	x_4	2	2	0	1	0	62	
3	$\underline{x_2}$	$\frac{2}{13}$	**1**	0	0	$\frac{1}{13}$	20	

№ рядка	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$\frac{b_i}{c_i}$
0	z	$-\frac{159}{13}$	0	0	0	$\frac{18}{13}$	360	
1	x_3	$\frac{176}{13}$	0	1	0	$-\frac{3}{13}$	220	16,25
2	$\underline{x_4}$	$\frac{22}{13}$	0	0	1	$-\frac{2}{13}$	22	13
3	x_2	$\frac{2}{13}$	1	0	0	$\frac{1}{13}$	20	130
0	z	$-\frac{159}{13}$	0	0	0	$\frac{18}{13}$	360	
1	x_3	$\frac{176}{13}$	0	1	0	$-\frac{3}{13}$	220	16,25
2	x_1	**1**	0	0	$\frac{13}{22}$	$-\frac{1}{11}$	13	13
3	x_2	$\frac{2}{13}$	1	0	0	$\frac{1}{13}$	20	130
0	z	0	0	0	$\frac{159}{22}$	$\frac{3}{11}$	519	
1	x_3	0	0	1	–8	1	44	
2	x_1	**1**	0	0	1	13/22	13	
3	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	18	

Оскільки нульовий рядок останньої таблиці не містить від'ємних елементів, то опорний план є оптимальним.

Отже, щоб отримати максимальний прибуток розміром 519 грн., необхідно виготовляти 13 одиниць продукції B_1 і 18 одиниць продукції B_2. Додаткова змінна x_3 вказує, що залишається 44 одиниці сировини A_1.

7.7 Поняття про двоїсті задачі

Використовуючи коефіцієнти задачі лінійного програмування, можна скласти ще одну задачу лінійного програмування, яка називається двоїстою до заданої задачі.

Нехай задача лінійного програмування задана у стандартній формі: знайти сукупність значень $(x_1, x_2, .., x_n)$, які задовольняють систему m обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{7.11}$$

і умови невід'ємності $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ... x_n \ge 0,$ для яких цільова функція

$$F(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... c_nx_n \to \max$$

досягає максимуму, тоді двоїстою до основної задачі називається задача:

знайти сукупність значень $(y_1, y_2, ..., y_m)$, які задовольняють систему n обмежень

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases} \tag{7.12}$$

і умови невід'ємності $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0,$ для яких функція $Z(Y) = b_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + ... b_my_m \to \min$ досягає мінімуму.

Першу з цих задач лінійного програмування називають прямою (основною) задачею, другу – двоїстою до прямої. Зауважимо, що двоїстою задачею до двоїстої буде знов пряма задача.

Економічну суть двоїстих задач можна пояснити на прикладі задачі про ресурси. Прямою буде задача: організувати випуск продукції так, щоб використовуючи наявні ресурси, отримати найбільший (максимальний) прибуток.

Двоїстою до неї: якою має бути ціна кожного ресурсу, щоб за заданих запасів і прибутках від одиниці продукції загальні витрати були найменшими (мінімальними).

Побудова двоїстої задачі

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі утворюються одна з одної транспонуванням

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \\ & & & \end{pmatrix}.$$

.

Побудуємо двоїсту задачу до задачі

$$F = -3x_1 - 4x_2 - 20 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -3x_1 - 2x_2 \le -6, \\ 9x_1 + 8x_2 \le 72, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

Для побудови двоїстої до заданої задачі складемо розширену матрицю системи A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -6 \\ 9 & 8 & 72 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Протранспонуємо отриману матрицю

$$\left(A_1\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & -1 \\ -2 & -2 & 8 & 1 \\ 4 & -6 & 72 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді двоїста задача формулюється так: знайти сукупність значень $\left(y_1, y_2, y_3\right)$ які задовольняють систему n обмежень

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 + 3y_3 \ge -1 \\ 2y_1 - 2y_2 + 8y_3 \ge 1 \end{cases}$$

і умови невід’ємності $y_i \ge 0, i = 1, 2, 3$ для яких функція $Z = 4y_1 - 6y_2 + 72y_3 + 5 \to \min$ досягає мінімуму.

Розглянемо основні теореми теорії двоїстості.

Основна нерівність теорії двоїстості

Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ – допустимі розв'язки прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X) \le Z(Y) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Достатня умова оптимальності

Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – допустимі розв'язки прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність $F(X^*) = Z(Y^*)$, то X^*, Y^* – оптимальні розв'язки відповідних задач.

Теорема (перша теорема двоїстості)

Якщо одна із прямої або двоїстої задач має оптимальний план, то й друга задача також має розв'язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій обох задач збігаються, тобто $\max F = \min Z$.

Якщо цільова функція однієї із пари двоїстих задач необмежена, то друга задача взагалі не має розв'язку.

Перша теорема двоїстості дає змогу в процесі розв'язування однієї задачі водночас знаходити план другої.

Економічний зміст першої теореми двоїстості

Максимальний прибуток $F_{\max}$ підприємство отримує за умови виробництва продукції згідно з оптимальним планом $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. Однак таку саму суму грошей $Z_{\min} = F_{\max}$ воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$.

За умов використання інших планів $X \ne X_{opt}$, $Y \ne Y_{opt}$, на підставі основної нерівності теорії двоїстості, можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції завжди менші, ніж витрати на її виробництво.

Друга теорема двоїстості

Для того, щоб плани X^* та Y^* прямої та двоїстої задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (7.13)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m} \qquad (7.14)$$

Взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Якщо внаслідок підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) у систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна i-та компонента оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна, то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічний зміст другої теореми двоїстості щодо оптимального плану X^* прямої задачі. Якщо для виготовлення всієї продукції в обсязі, що визначається оптимальним планом X^*, витрати одного i-го ресурсу строго менші, ніж його загальний обсяг b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу y_i^* (компонента оптимального плану двоїстої задачі) буде дорівнювати нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є «цінним».

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його наявному обсягу b_i, тобто його використано повністю, то він є «цінним» для виробництва, а його оцінка y_i^* буде строго більшою за нуль.

Економічний зміст другої теореми двоїстості щодо оптимального плану Y^* двоїстої задачі: у разі, коли деяке j-те обмеження виконується як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво j-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

Третя теорема двоїстості

Компоненти оптимального плану двоїстої задачі y_i^* $(i = \overline{1, m})$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ за відповідними аргументами b_i, $(i = \overline{1, m})$

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \qquad i = \overline{1, m}. \qquad (7.15)$$

Економічний зміст третьої теореми двоїстості

Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає змогу зіставляти непорівнянні речі. Очевидно, що неможливим є просте зіставлення величин, які мають різні одиниці вимірювання. Якщо взяти як приклад виробничу задачу, то цікавим є питання: як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватися в грошових одиницях) за зміни обсягів різних ресурсів (можуть вимірюватися в тоннах, м^2, люд./год, га тощо).

Використовуючи третю теорему двоїстості, можна легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення чи зменшення обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок зазначають, на яку величину змінюється цільова функція за зміни обсягу відповідного даній оцінці ресурсу $y_i^* = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Отже, за умови незначних змін b_i замість задачі лінійного програмування, поданій у канонічній формі

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, \quad (7.16)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (7.17)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (7.18)$$

маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Позначимо через X' оптимальний план нової задачі. Для визначення $F(X')$ не потрібно розв'язувати нову задачу лінійного програмування, а достатньо скористатися формулою $F\left(X'\right) - F\left(X^*\right) = y_i^* \Delta b_i$, де X^* – оптимальний план задачі (7.16–7.18).

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає суть задачі математичного програмування?

2. Наведіть класифікацію задач математичного програмування.

3. У чому полягає суть задачі визначення оптимального плану виробництва?

4. В чому полягає суть транспортної задачі?

5. Що називається загальною задачею лінійного програмування?

6. Що називається стандартною задачею лінійного програмування?

7. Що називається канонічною задачею лінійного програмування?

8. Що називається допустимим розв’язком (планом) задачі лінійного програмування?

9. Що називається опорним планом задачі лінійного програмування?

10. Що називається оптимальним планом задачі лінійного програмування?

11. Сформулюйте алгоритм графічного методу розв’язування задачі лінійного програмування.

12. У чому полягає ідея симплексного методу?

13. Сформулюйте критерій оптимальності задачі лінійного програмування за симплекс-таблицями.

14. Що таке ключовий стовпець, ключовий рядок, ключовий елемент?

15. Які задачі лінійного програмування називають двоїстими?

16. Сформулюйте правила побудови двоїстої задачі.

17. Який зв’язок між розв’язками двоїстих задач?

18. Яка ознака оптимальності розв’язків двоїстих задач?

19. Сформулюйте третю теорему двоїстості.

20. У чому полягає економічний зміст першої, другої, третьої теореми двоїстості?

7.8 Математична модель транспортної задачі

У математичному програмуванні сформовано певний набір класичних задач, математичні моделі яких широко використовують на практиці. До класичних задач математичного програмування можна віднести транспортну задачу, задачу про призначення, задачу оптимального розподілу ресурсів, задачу про дієту (суміш) тощо.

Серед спеціальних задач на практиці переважно застосовують так звану транспортну задачу та її різноманітні модифікації. Класична транспортна задача вимагає пошуку найбільш економного плану перевезень однорідного продукту (чи взаємозамінних продуктів) з пунктів виробництва чи зберігання (виробники, станції, склади тощо) до пунктів споживання (магазини, кіоски призначення тощо). Ефективність його оцінюють за критерієм найменшої вартості перевезення.
З економічного погляду це може бути, наприклад, найменша кількість витраченого бензину.

Нехай у m пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (склади, виробники тощо) зосереджено запаси однакової продукції в кількостях $a_1, a_2, \ldots, a_m$ відповідно. Цей запас продукції необхідно перевезти в n пунктів споживання $B_1, B_2, \ldots, B_n$, потреби яких становлять $b_1, b_2, \ldots, b_n$ відповідно. Відома вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту A_i до j-го пункту споживання B_j, яка позначається через c_{ij}.

Суть транспортної задачі полягає в тому, щоб перевезти всі (якщо це можливо) вантажі з пунктів A_i, задовольнивши водночас потреби всіх (якщо це можливо) споживачів B_j за мінімальних витрат на перевезення.

Означення. Транспортна задача, для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення, називається закритою транспортною задачею (задачею із правильним балансом)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (7.19)$$

Означення. Транспортна задача, для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення не дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення, називається відкритою транспортною задачею (задачею з неправильним балансом)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (7.20)$$

Усі дані транспортної задачі заносять у спеціальну таблицю, яку називають матрицею перевезень.

Пункти відправлення	**Пункти споживання**					**Запаси**
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Позначимо кількість вантажу, який потрібно перевезти з пункту A_i до пункту B_j через x_i. Це можна оформити у вигляді іншої таблиці. Більш зручно зводити ці дві таблиці в одну.

Складемо математичну модель із таких міркувань. Припустимо, що загальні запаси вантажів дорівнюють сумарним потребам споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	x_{11}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	x_{i1}	…	x_{ij}	…	x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	…	x_{mi}	…	x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Кількість вантажу, який потрібно перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення дорівнює $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, що за умовою задачі повинно дорівнювати b_j, отже, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots n.$

Аналогічно, з кожного пункту відправлення буде відвантажено таку кількість вантажу: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну суму перевезень, потрібно просумувати вартості всіх клітинок.

Тоді математична модель транспортної задачі матиме вигляд

$$z = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min. \qquad (7.21)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ \ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m, \\ x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ \ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n, \\ x_{ij}\ge 0,\, i=1,2,\ldots m;\ j=i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (7.22)$$

Отже, серед усіх невід'ємних розв'язків системи (7.22) необхідно знайти такий, за якого функція (7.21) набуває найменшого значення.

Математична модель транспортної задачі може бути записана в іншому вигляді

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min. \qquad (7.23)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\ldots,m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\ldots,n, \\ x_{ij}\ge 0,\, i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (7.24)$$

Зауважимо, що транспортна задача має розв'язок, якщо виконується балансна умова. Під час розв'язання транспортної задачі обов'язково необхідно перевірити виконання умови (7.19).

Можливі три випадки:

1) $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$ – задача є закритою;

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ – вводиться фіктивний пункт відправлення $\left(a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \right)$;

3) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ – вводиться фіктивний пункт споживання $\left(b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \right)$

У випадках 2) та 3) тарифи нових введених маршрутів (відповідно рядок або стовпчик у матриці перевезень) покладають рівними нулю.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, її можна розв'язувати і симплекс-методом. Проте існують більш прості методи розв'язання транспортної задачі.

Для знаходження першого опорного плану використовують кілька методів.

Діагональний метод полягає в послідовному заповненні клітинок матриці перевезень, починаючи з кутової, послідовно вичерпуючи запаси чи потреби. Усі клітинки заповнюються мінімальним числом, що є на перетині рядка запасів і стовпця потреб. Цей метод також має назву **метод північно-західного кута**.

Метод найменшої вартості полягає в тому, що заповнення починають із клітинки, яка має найменшу вартість перевезення, у ній проставляють мінімальне значення з перетину запасів і потреб. У розподільчій таблиці потрібно знайти клітинку (маршрут) з найменшим тарифом c_{ij}. Далі потрібно завантажити обрану клітинку максимально. Можливі три випадки:

1) $a_i < b_j$. Завантажують клітинку кількістю вантажу $x_{ij} = a_i$ (тим самим весь вантаж у i-го постачальника вивезений,

а потреба у вантажі споживача B_j : $b'_j = b_j - a_i$). Переходять до наступної (за мінімумом c_{ij}) клітинки;

2) $a_i > b_j$. Завантажують клітинку кількістю вантажу $x_{ij} = b_j$ (у такий спосіб потреба споживача B_j цілком задоволена, а у постачальника A_i залишилося вантажу: $a'_i = a_i - b_j$). Переходять до наступної (за мінімумом c_{ij}) клітинки;

3) $a_i = b_j$. Завантажують клітинку кількістю вантажу $x_{ij} = a_i = b_j$ (у такий спосіб весь вантаж у постачальника A_i вивезений, потреба споживача B_j цілком задоволена). У цьому разі опорний план задачі буде виродженим, і наступну за мінімумом c_{ij} клітинку i-го рядка (або j-го стовпця) завантажують фіктивним вантажем, рівним нулю. Переходять до наступної (за мінімумом c_{ij}) клітинки.

Так триває до повного заповнення. Якщо запаси чи потреби якогось пункту вже вичерпались, то варто занулити ті клітинки, що ще залишилися незаповненими в рядку (стовпці).

Метод осереднених коефіцієнтів полягає в обчислені середніх вартостей рядків і стовпців матриці перевезення за формулами

$$c_{Ai} = \frac{c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in}}{n}, \quad c_{Bi} = \frac{c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{mj}}{m}.$$

Після цього обчислюють усереднені коефіцієнти для кожної клітинки за формулою $k_{ij} = c_{ij} - \left(c_{Ai} + c_{Bj}\right)$. Потім заповнюють послідовно клітинки з найменшими значеннями усереднених коефіцієнтів. Цей метод є найскладнішим у застосуванні, проте отриманий опорний план – найкращий серед перерахованих.

Існують інші методи знаходження опорного плану, зокрема, метод подвійної переваги, метод апроксимації Фогеля.

Для контролю правильності заповнення матриці перевезень зручно використовувати такі твердження:

1. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі визначають за формулою $r = m + n - 1$, де m – число пунктів відправлення, n – число пунктів споживання.

2. Число базисних (заповнених) клітинок завжди дорівнює рангу матриці транспортної задачі. В іншому разі їх потрібно доповнити до відповідної кількості за рахунок вільних із базисним значенням нуль.

Потрібно зауважити, що під час побудови першого опорного плану в розрахунках фіктивні пункти не враховують, оскільки всі вартості в них найменші (нулі), на загальну вартість перевезень вони не впливають. Спочатку потрібно проводити заповнення в основній таблиці, а потім остачі внести у фіктивні клітинки.

7.9 Оптимальний план транспортної задачі. Метод потенціалів

Розв'язок транспортної задачі x_i називається **потенціальним**, якщо існує набір $m+n$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, для якого виконуються умови:

1) для кожного $x_{ij} > 0 : \alpha_i + \beta_j = c_{ij};$ (7.25)

2) для кожного $x_{ij} = 0 : \alpha_i + \beta_j < c_{ij}.$ (7.26)

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ називаються потенціалами пунктів відправлення; числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – потенціалами пунктів споживання.

Теорема. Опорний розв'язок x_i транспортної задачі є оптимальним тоді і тільки тоді, коли він є потенціальним.

Розглянемо алгоритм застосування **методу потенціалів**. Суть методу полягає в тому, що опорний план необхідно перевірити на оптимальність. Якщо план не оптимальний, його потрібно покращити його до оптимального. Під час використання методу потенціалів спочатку знаходять потенціали, які задовольняють рівність (7.25), тобто для всіх завантажених клітинок, а потім потрібно перевірити, чи виконуються нерівності (7.26) для всіх незавантажених клітинок.

Метод потенціалів

1. **Обчислення потенціалів.**

За побудованим опорним планом знаходять потенціали пунктів відправлення та пунктів споживання за правилом $\alpha_1 = 0; \quad \alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ для всіх завантажених клітинок.

2. **Перевірка оптимальності.**

Теорема. Для того, щоб опорний план транспортної задачі був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб оцінки незавантажених клітинок

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$$

були невід'ємними.

Під час знаходженні оцінок незавантажених клітинок можливі випадки:

– усі $\gamma_{ij} \geq 0,$ у цьому разі опорний план є оптимальним, задача розв'язана;

– серед оцінок є $\gamma_{ij} < 0,$ тобто знайдений розв'язок не є оптимальним, необхідно провести його оптимізацію.

3. **Оптимізація.**

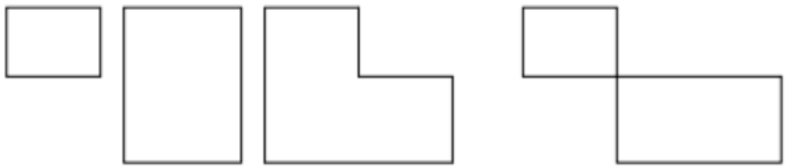
Обирають незавантажену клітинку x_{ij} із найменшою від'ємною оцінкою $\gamma_{\min}$ (або будь-яку з них, якщо таких клітинок декілька) і приєднують її до клітинок опорного плану. Для цієї клітинки будують цикл, утворений обраною клітинкою із клітинками опорного плану (завантаженими клітинками), з'єднуючи ці клітинки вертикальними та горизонтальними відрізками. У першу клітинку ставлять знак «+» (це означає, що клітинку потрібно завантажити). В усі інші клітинки по черзі ставлять знаки «–», «+», «–», … . Знак «–» означає, що клітинку потрібно розвантажити. Серед клітинок, яким відповідає знак «–» знаходять мінімально завантажену і весь вантаж цієї клітинки «переміщують» за циклом, тобто додають до вантажів усіх клітинок зі знаком «+» і віднімають від вантажів клітинок зі знаком «–».

Для отриманого розв'язку знову обчислюють потенціали, здійснюють перевірку оптимальності, за необхідності здійснюють оптимізацію.

Зауваження. Значення заповнених клітинок, які не беруть участь у циклі, переписують без змін.

Зауваження. Циклом матриці називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпцю.

Можливі види циклів подано на рисунку.



Перпендикулярні ламані в циклі можуть перетинатись і точка їхнього перетину не буде вважатися вершиною циклу.

Приклад. Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі, якщо задані витрати на перевезення одиниці вантажу від постачальників A_1, A_2, A_3 до споживачів $B_1, B_{2,} B_3, B_4$, запаси постачальників і потреби споживачів (в умовних одиницях).

Витрати на перевезення одиниці вантажу											
A_1				A_2				A_3			
B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4
8	5	4	6	8	5	2	1	3	5	6	7

Запаси постачальників			Потреби споживачів			
A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4
40	80	25	15	40	25	65

Розв'язання

Для заданої задачі: оскільки $\sum A_i = \sum B_j$ то транспортна задача є закритою.

Побудуємо транспортну таблицю (матрицю перевезень).

Постачальник	**Споживач**				**Запаси**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	8	5	4	6	**40**
A_2	8	5	2	1	**80**
A_3	3	5	6	7	**25**
Потреби	**15**	**40**	**25**	**65**	**145**

Перший опорний план складемо методом мінімальної вартості.

На кожному кроці будемо вибирати найменшу вартість і заповнювати клітинку, у якій вона записана, унаслідок цього отримаємо опорний план.

Постачальник	Споживач				Запаси
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	8	5 **30**	4 **10**	6	**40**
A2	8	5	2 **15**	1 **65**	**80**
A3	3 **15**	5 **10**	6	7	**25**
Потреби	**15**	**40**	**25**	**65**	**145**

Перевіряємо число завантажених клітинок

$$m+n-1=3+4-1=6.$$

Для пошуку оптимального опорного плану будемо використовувати метод потенціалів. Знайдемо оцінки базисних клітинок: $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$.

Постачальник	Споживач				α_i
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	8	5 **30**	4 **10**	6	$\alpha_1=0$
A2	8	5	2 **15**	1 **65**	$\alpha_2=-2$
A3	3 **15**	5 **10**	6	7	$\alpha_3=0$
β_j	$\beta_1=3$	$\beta_2=5$	$\beta_3=4$	$\beta_4=3$	

Знаходимо оцінки вільних клітинок $\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$.

$$\gamma_{11} = 8 - 5 = 3;$$
$$\gamma_{14} = 6 - 3 = 3;$$
$$\gamma_{21} = 8 - 1 = 7;$$
$$\gamma_{22} = 5 - 3 = 2;$$
$$\gamma_{33} = 6 - 4 = 2;$$
$$\gamma_{34} = 7 - 3 = 4.$$

Оскільки серед оцінок вільних клітинок не має від'ємних, то цей план є оптимальним

$$X_{onm} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 65 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$z_{\min} = 30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 2 + 65 \cdot 1 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 380 \text{ (ум. од)}$$

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає суть транспортної задачі?
2. Чим оцінюють ефективність розв'язку транспортної задачі?
3. Яка транспортна задача називається задачею із правильним балансом? Наведіть синоніми цієї назви.
4. Яка транспортна задача називається задачею із неправильним балансом? Наведіть синоніми цієї назви.
5. Що називається матрицею перевезень?
6. Побудуйте математичну модель транспортної задачі.
7. Під час виконання якої умови транспортна задача є закритою?

8. Під час виконання якої умови транспортна задача є відкритою?

9. Назвіть основні методи побудови першого опорного плану транспортної задачі.

10. Поясніть суть методу північно-західного кута.

11. Поясніть суть методу найменшої вартості.

12. Поясніть суть методу осереднених коефіцієнтів.

13. Чому дорівнює ранг матриці перевезень?

14. Що таке фіктивні клітинки? Для чого їх використовують?

15. Що називається потенціальним розв’язком транспортної задачі?

16. Поясніть суть методу потенціалів.

17. Як обчислюють невідомі потенціали завантажених клітинок?

18. Сформулюйте критерій оптимальності плану транспортної задачі.

19. Що називається циклом матриці перевезень?

20. Сформулюйте алгоритм застосування методу потенціалів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Математичне моделювання в економіці та менеджменті : текст лекцій для студентів спеціальності 073 «Менеджмент». Харків, 2018. 90 с.

2. Білоусова С. В. Ковальчук Т. В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навчальний посібник. Київ : Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с.

3. Вітлінсьий В. В., Терещенко Т. О., Савіна С .С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.

4. Вища математика : базовий підручник для вузів / під ред. В. С. Пономаренка. Харків : Фоліо, 2014. 669 с.

5. Вища математика для нематематичних спеціальностей : навальний посібник / С. С. Дрінь та ін. Київ : НаУКМА, 2017. 218 с.

6. Вища математика у прикладах і задачах для економістів : навчальний посібник / А. М. Алілуйко та ін. Тернопіль : ТНЕУ, 2017. 148 с.

7. Економіко-математичні методи та моделі : навчальний посібник / Н. Л. Воропай та ін. ; за ред. В. М. Мацкул Одеса : ОНЕУ, 2018. 404 с.

8. Козак Ю. Г., Мацкул В. М. Математичні методи та моделі для магістрів з економіки. Практичні застосування : навчальний посібник. Київ, 2017. 254 с.

9. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи та моделі : навчальний посібник. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 412 с.

10. Мацкул В.М. Вища математика для економістів : підручник. Одеса : ОНЕУ, 2018. 472 с.

11. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров та ін. Суми : СумДУ, 2017. 212 с.

12. Математичні моделі в економічних задачах : практикум (І курс) / уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. 57 с.

13. Основи економіко-математичного моделювання : навч. посіб. для студентів вищ. навч. закл. / Н. М. Лавріненко та ін. Львів : Магнолія 2006, 2018. 540 с.

14. Wilson Mixon. Introduction to Mathematical Economics, 2018. 362 p. URL: https://www.researchgate.net/publication/327076435_Introduction_to_Mathematical_Economics

15. Herbet Hamers, Bob Kaper, John Kleppe/ Mathematics for Business Economics, 2013. 215 p.

Навчальне видання

Коломієць Світлана Володимирівна,
Діденко ірина Вікторівна

КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ

Конспект лекцій

для студентів освітнього ступеня «бакалавр»
економічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання
У двох частинах
Частина 1

Відповідальний за випуск О. В. Кузьменко
Редактор І. О. Кругляк
Комп’ютерне верстання С. В. Коломієць

Підписано до друку 01.02.2022, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друку. арк. 9,3 Обл.-вид. арк. 8,98.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2062 від 17.12.2007.