УДК 539.2+519.6

КЕРУВАННЯ ХАОТИЧНОЮ ПОВЕДІНКОЮ СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ З МЕТОЮ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПРОСТОРОВО-ОДНОРІДНИХ СТАНІВ

І.О. Князь
Сумський державний університет

Розглянуто процедуру керування ансамблем осциляторів, зв'язаних у двовимірну ґратку, з метою стабілізації їх рухів на нестійкому граничному циклі, що вбудований в хаотичний аттрактор. Показана можливість стабілізації просторово-однорідних станів за рахунок послідовного корегувального впливу на окремі осцилятори.

ВСТУП

Присутність хаосу є невід'ємною частиною більшості нелінійних динамічних систем, що описують складні фізичні, хімічні, біологічні та соціальні процеси. Хаотичні системи характеризуються підвищеною чутливістю до малих збурень системних параметрів та початкових умов, у наслідок чого поведінка таких систем вважалася некерованою. Існувала думка, що досягти бажаної поведінки системи можливо лише пригнітивши хаос у ній нехай навіть великими і дорогими змінами у самій системі, що приведуть до зміни її динаміки в цілому. Однак в останній час прийшло розуміння особливої ролі хаосу у процесах самоорганізації різних природних явищ [1-5]. Було усвідомлено, що хаос не тільки не заважає, а скоріше є обов'язковою умовою працездатності складних систем. Тільки завдяки наявності хаотичного аттрактора, що містить, як правило, нескінченне число нестійких періодичних траєкторій, можна досягти якісної зміни динаміки системи (переходячи із околиці одного циклу в околицю іншого) малими збуреннями системних параметрів. У зв'язку з цим у проблемі керування хаосом природним чином з'явилася задача стабілізації не апріорі бажаних траєкторій хаотичних динамічних систем, а саме тих нестійких періодичних траєкторій, нескінченну кількість яких включає в себе хаотичний аттрактор [6-8]. У даній роботі ми розв'язуємо задачу керування просторово-часовим хаосом у двовимірній системі зв'язаних осциляторів.

МЕТОД

Розглянемо модель нелінійної автономної системи, що описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = F(x,\lambda), \tag{1}$$

де λ – керуючий параметр. Нехай нестійкий граничний цикл $x^*(t,\lambda^*)$ є шуканим розв'язком рівняння (1), який при $\lambda = \lambda^*$ має регулярний або сингулярний аттракор. Побудуємо перетин Пуанкаре S, що проходить через точку $x_0 = x^*(0,\lambda^*)$ циклу $x^*(t,\lambda^*)$. Розглянемо відображення Пуанкаре $x \to P(x,\lambda)$, в якому $P(x,\lambda)$ є точка першого повернення на поверхню S траєкторії системи (1), що починається у точці x при значенні параметру λ. Застосовуючи послідовність таких відображень, отримаємо дискретну динамічну систему

$$x_{n+1} = P(x_n,\lambda_n), \tag{2}$$

де $x_n = x(t_n)$, t_n – момент часу n-го перетину поверхні S, а λ_n – значення керуючого параметру на проміжку t_n та t_{n+1}. Замінимо відображення (2) лінеаризованим у точці (x_0, λ^*) відображенням

$$y_{n+1} = Ay_n + Ba_n,\ A = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, \lambda^*),\ B = \frac{\partial P}{\partial \lambda}(x_0, \lambda^*)\ , \tag{3}$$

де $y_n = x_n - x_0$, $a_n = \lambda_n - \lambda^*$. Для лінійної системи (3) виберемо керуючий вплив a_n у вигляді лінійного оберненого зв'язку $a_n = -Cy_n$. Для стабілізації траєкторії керуючий вплив вибирається таким чином (ε – малий параметр):

$$a_n = \begin{cases} -Cy_n, & |y_n| \le \varepsilon, \\ 0, & |y_n| > \varepsilon. \end{cases}$$

Стабілізація нерухомої точки Пуанкаре досягається малими керуючими впливами у дискретні моменти часу. Зазначимо, що метод може бути застосований лише для систем, що мають хаотичний аттрактор, у тому сенсі, що він є замкненням усіх періодичних траєкторії, що містяться у ньому. Тобто застосування запропонованої методики припускає виконання наступної умови: будь яка траєкторія з будь якою початковою умовою з часом обов'язково потрапить у малу околицю шуканого циклу.

МОДЕЛЬ

Розглянемо дискретну модель просторово-розподіленої системи:

$$y_{n+1}^{i,j} = f(y_n^{i,j}) + D\left(f(y_n^{i+!,j}) + f(y_n^{i-1,j}) + f(y_n^{i,j+1}) + f(y_n^{i,j-1}) - 4f(y_n^{i,j})\right), \tag{4}$$

де i, j – індекси, що визначають просторове положення вузла гратки, n – дискретний час, D- коефіцієнт зв'язку. Граничні умови є періодичними. У вузлах гратки розташовані ідентичні дисипативні осцилятори, що синфазно збуджуються періодичною зовнішньою силою. Елементи гратки є нелінійними, здатні здійснювати регулярні та хаотичні коливання. Зв'язок між елементами є симетричним та локальним, елементи взаємодіють лише з сусідами. У якості придатної моделі, що описує часову динаміку окремого осцилятора ми вибрали мультимодальне багатопараметричне відображення, запропоноване у [8]:

$$y_{n+1} = f(y_n) = y_n \exp\left(-\frac{r}{\omega}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_n)}\right) + U\ , \tag{5}$$

де U та ω – амплітуда та частота зовнішнього впливу, r – дисипація, α – нелінійність. Динаміка відображення (5) детально досліджувалися у роботі [8]. Знайдені значення параметрів за яких динаміка зазначеної системи стає хаотичною; аттрактори, що відповідають таким станам, містять у собі безліч періодичних орбіт, що можуть бути стабілізовані за рахунок впливу на параметри системи.

Слідуючи запропонованому підходу керуючий вплив здійснювався за рахунок корекції керуючого параметра кожного із осциляторів. Таким чином, параметр U залежить від моменту часу та номера осцилятора і може бути представлений у вигляді

$$U_n^{i,j} = U^* + \tilde{U}_n^{i,j}\ , \tag{6}$$

де U^* – стала, $\tilde{U}_n^{i,j}$ – корегувальний вплив. Корегувальний вплив застосовується у випадку коли динамічна змінна $y_n^{i,j}$ входить в околицю стану, що стабілізується. Таким станом є нерухома точка y_0 відображення (5). Тоді при потраплянні $y_n^{i,j}$ в околицю точки y_0 можна записати

$$y_{n+1}^{i,j} = y_0 + \tilde{y}_{n+1}^{i,j}, \quad y_n^{i,j} = y_0 + \tilde{y}_n^{i,j}, \tag{7}$$

де $\tilde{y}_n^{i,j}$, $\tilde{y}_{n+1}^{i,j}$ – малі збурення. Враховуючи рівняння для нерухомої точки

$$y_0 = f(y_0) = y_0 \exp\left(-\frac{r}{\omega}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_0)}\right) + U^*, \tag{9}$$

підставляємо (5),(6) та (7) в (4) та лінеаризуємо отримане рівняння для збурення $\tilde{y}_{n+1}^{i,j}$. У результаті знаходимо значення $\tilde{U}_n^{i,j}$, за якого це збурення дорівнює нулю:

$$\tilde{U}_n^{i,j} = -e^{-\frac{r}{\omega}}\left[\left\{(1-4D)\left(y_n^{i,j} - y_0\right)\left(y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_0)}\right)\frac{2\pi\alpha}{\omega(1+\alpha y_0)^2} + \cos\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_0)}\right)\right)\right\} + \right.$$

$$+D\left(y_n^{i+1,j}\cos\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_n^{i+1,j})}\right) + y_n^{i-1,j}\cos\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_n^{i-1,j})}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + y_n^{i,j+1}\cos\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_n^{i,j+1})}\right) + y_n^{i,j-1}\cos\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_n^{i,j-1})}\right) - 4y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\omega(1+\alpha y_0)}\right)\right)\right].$$

Корегувальний вплив здійснюється за умови $\left(y_n^{i,j} - y_0\right) < \varepsilon$.

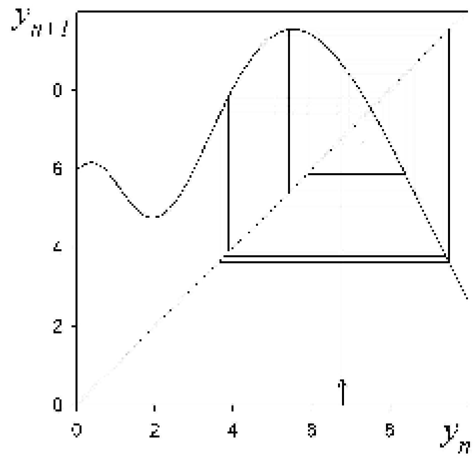

Рисунок 1 – Відображення (5) при $U^* = 6$, $\alpha = 0.2$, $r = 0.2$, $\omega = 0.5$. Ітераційна діаграма, що ілюструє динаміку на декількох перших кроках дискретного часу. Нерухома точка $- y_0 \approx 7.52$.

КОМП’ЮТЕРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо керований перехід із режиму просторово-часового хаосу до просторово-однорідного режиму у випадку коли відображення (5) має одну нерухому точку (рис. 1). Нерухома точка визначалася чисельно шляхом розв’язку рівняння (5) за методом поділу відрізка навпіл. За допомогою корегувальних впливів $\tilde{U}_n^{i,j}$ за описаною схемою можна стабілізувати орбіту

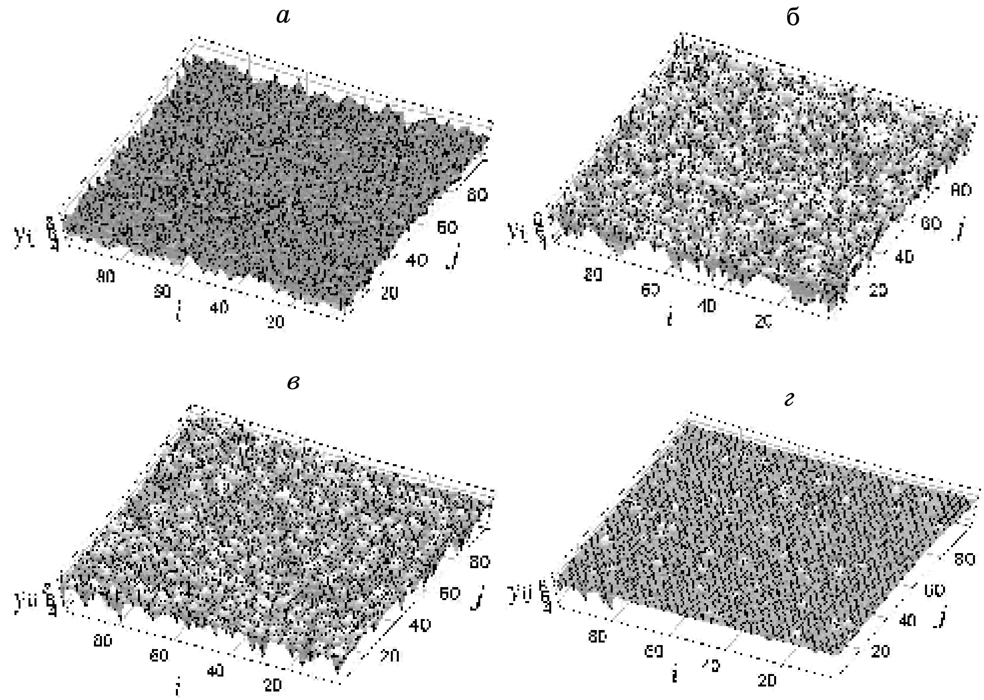

Рисунок 2 – Керований перехід із режиму просторово-часового хаосу до просторово-однорідного режиму. Параметри моделі: $U^{*}=6$, $\alpha=0.2$, $r=0.2$, $\omega=0.5$, $D=0.001$, $\varepsilon=0.01$. *(а)* $t=0$*; (б)* $t=25$*; (в)* $t=200$*; (г)* $t=500$.

періоду 1, що входить до хаотичного аттрактору (рис 2). Зазначимо, що за умови малості корегувальних впливів (малих ε) стабілізація просторово-однорідного режиму можлива лише за умови слабкого зв'язку між елементами ґратки. Пояснення дуже просте: чим сильнішим є зв'язок між елементами ґратки, тим менше часу проводить елемент, на який подають корегувальний вплив в околі нестійкого стану, що стабілізується. У результаті зменшується ймовірність утворення кластерів. Величина керуючого впливу, що подається на окремі осцилятори, зменшується з часом. Ясно, що при збільшенні вікна по ε підвищується неточність при обчисленні величини керуючого впливу і стабілізація стає неможливою.

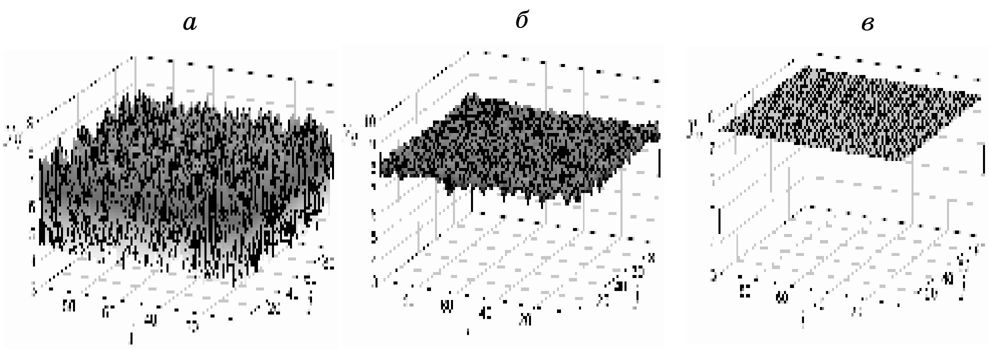

Рисунок 3 – Керований перехід із режиму просторово-часового хаосу до просторово-однорідного режиму. Параметри моделі: $U^{*}=6$, $\alpha=0.2$, $r=0.2$, $\omega=0.5$, $D=0.2$, $\varepsilon=0.1$. *(а)* $t=0$*; (б)* $t=5$*; (в)* $t=20$.

Ситуація принципово змінюється при підсиленні зв'язку між осциляторами (рис. 3). У такому випадку значні корегувальні впливи грають роль направленого шуму. При цьому коливання усіх елементів ґратки переводяться в околицю нерухомої точці і у подальшому стабілізуються на нестійкому циклі за рахунок малих корегувальних впливів. Сильний зв'язок між елементами ґратки у такому випадку, навпаки, грає роль стабілізуючого фактору, збільшуючи ймовірність утворення кластерів в околі нерухомої точки. Як видно з рисунку 2, стабілізація просторово-однорідного стану за великих значень параметру D досягається за дуже короткий проміжок часу.

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язана задача стабілізації просторово-однорідного стану у двовимірній системі зв'язаних нелінійних дисипативних осциляторів. Показано, що потрібний результат може бути отриманий за рахунок серії незначних збурень траєкторії кожного із осциляторів. При правильному виборі збурень це дозволяє розв'язати задачу не уводячи траєкторію з хаотичного аттрактору. Таким чином, система осциляторів демонструє одночасно і керованість і пластичність: система реагує на зовнішні впливи, при цьому зберігає тип руху. Показана можливість стабілізації траєкторій за умови як слабкого так і сильного зв'язку між елементами ґратки. Перспективами роботи є вирішення задач керування хаосом за умови наявності бістабільності у елементах ґратки і співіснуванні декількох хаотичних аттракторів.

SUMMARY

MANAGEMENT OF THE CHAOTIC SYSTEM OF CONNECTED OSCILLATORS WITH PURPOSE OF STABILIZING SPATIALLY HOMOGENEOUS STATES

I.A. Knyaz
Sumy State University

The procedure of management of an ensemble of oscillators connected in a two-dimensional lattice with the purpose of stabilization of their movements on an unstable limit cycle is considered. The possibility of stabilization of spatially-homogeneous states due to corrective action on separate oscillators is shown.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1985.
2. Шустер Г. Детерминированый хаос: введение. – М.:Мир, 1988.
3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: УРСС, 2002.
4. Chen G., Dong X. From chaos to order: perspectives, methodologies and applications. – World Scientific, Singapore, 1998.
5. Sepulchre J., Babloyantz A. Controlling chaos in a network of oscillators // Phys. Rev., 1994. -V.E48(2). - P. 119-125.
6. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling Chaos // Phys. Rev. Lett. – 1990. - V. 4. - P. 1196-1199.
7. Shinbort T., Grebogi C., Yorke J.A. Using small perturbations to control chaos // Nature. – 1993. - V. 363, №3. - P.411-417.
8. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Multiparameter model of a dissipative nonlinear oscillator in the form of one–dimensional map // Chaos, Solitons and Fractals. – 1995. - V.5, N.11. - P.2095–2107.

Надійшла до редакції 8 травня 2009 р.