

УДК 62-501.1

### ИНДИКАТОРНЫЕ МАТРИЦЫ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ УОЛША

*А.Я. Белецкий, профессор;*

*Е.А. Белецкий, аспирант*

*Национальный авиационный университет, г. Киев*

*Показано, что любая система функций Уолша двоично-рационального порядка  $N = 2^l$ ,  $l \geq 2$ , может быть однозначно отображена индикаторной матрицей, представляющей собой невырожденную в кольце вычетов по mod 2 квадратную  $(0, 1)$ - матрицу  $l$ -го порядка, симметричную относительно вспомогательной диагонали.*

**Ключевые слова:** *система функций Уолша, матрица Адамара, коды Грея.*

*Показано, що будь-яка система функцій Уолша двійково-раціонального порядку  $N = 2^l$ ,  $l \geq 2$ , може бути однозначно відображена індикаторною матрицею, яка являє собою невырождену в кільці залишків за mod 2 квадратну  $(0, 1)$ - матрицю  $l$ -го порядку, яка симетрична щодо допоміжної діагоналі.*

**Ключові слова:** *система Уолша, матриця Адамара, коди Грея.*

### ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Системы функций Уолша представляют собой симметричные двоично-рационального порядка  $N$  матрицы. Системы состоят из полного набора взаимно ортогональных функций  $\omega(k, n)$ , где  $k$  - порядок (номер) базисной функции, а  $n$  - аргумент (нормированное время) функции, причем  $k, n = 0, \overline{N-1}$ .

Матрицы Уолша являются нормализованными матрицами. Это означает, что в матрицах (системах) Уолша нулевой (левый) столбец и нулевая (верхняя) строка состоят из элементов  $+1$ . Кроме того, любая система Уолша включает функцию

$$\omega(k, n) = \begin{cases} +1, & n = \overline{0, N/2 - 1}; \\ -1, & n = \overline{N/2, N - 1}, \end{cases}$$

а все остальные функции таковы, что как левая, так и правая половины функций содержат одинаковое число элементов  $+1$  и  $-1$ . И, наконец, отметим еще одну особенность базисных функций Уолша. Она состоит в том, что правая половина повторяет или инверсна соответствующим значениям левой половины функций.

В данной статье ставится задача компактного представления систем Уолша  $2^l$ -го порядка так называемыми индикаторными матрицами  $l$ -го порядка ( $l \geq 2$ ).

### ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Первородной матрицей, положившей начало формированию семейства симметричных систем Уолша, послужила *матрица Адамара*, предложенная в [1] в связи с исследованиями по теории определителей. Пример записи системы Адамара  $H_8$  восьмого порядка, в которой для простоты вместо элементов  $\pm 1$  использованы лишь их знаки [2], представлен соотношением

$$H_8 = h(k, n) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \quad (1)$$

В 1923 г. Уолшем был опубликован другой способ упорядочения базисных функций систем Адамара, более удобный для инженерных приложений, в частности для техники связи [3]. Предложения Уолша сводились к тому, чтобы расставить базисные функции Адамара в порядке возрастания числа переменных знаков. Такой способ упорядочения придает системе базисных функций большое сходство с привычными для инженеров гармоническими функциями [4]. Начиная с этого времени все симметричные системы, образованные тем или иным способом упорядочения полного набора базисных функций Адамара, получили название *систем Уолша*.

Ниже приведена симметричная система Уолша восьмого порядка, получившая название системы Уолша, *упорядоченной по Качмажу*, которая в основном повторяет систему, введенную самим Уолшем:

$$W_8 = \{\omega(k, n)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \quad (2)$$

Третья симметричная система Уолша была введена в 1932 г. Пэли [5]. Она может быть получена из системы Уолша-Адамара двоичной инверсией номеров функций, т.е. путем записи двоичного представления номера  $k_h$  в обратном порядке для получения номера  $k_p$  (индексы  $h$  и  $p$  номеров  $k$  отвечают системам Адамара  $H$  и Пэли  $P$  соответственно). Матрица Уолша-Пэли восьмого порядка имеет вид

$$P_8 = \{p(k, n)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

В статье [6] подмечена связь между функциями Уолша и кодами Грея. На рис. 1, заимствованном из [1], приведен характер взаимосвязи систем Уолша, упорядоченных по Адамару, Качмажу и Пэли.

На рис. 1 используемые аббревиатуры означают: ДИП – двоично-инверсная перестановка; КГ – прямой код Грея; ОКГ – обратный код Грея.

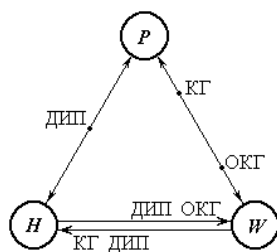


Рисунок 1 - Взаимосвязь номеров базисных функций в различных системах Уолша

Тремя показанными на рис. 1 системами не исчерпываются все возможные системы функций Уолша. Общее число  $L_N$  симметричных систем Уолша  $2^l$ -го порядка определяется соотношением, полученным в [4],

$$L_l = \prod_{i=1}^l (2^i - (i)_2), \quad (4)$$

где  $(i)_2$  - вычет (остаток) числа  $i$  по mod 2.

Полный граф, содержащий, согласно оценки (4), 28 систем Уолша восьмого порядка, приведен на рис. 2.

Алгоритмы формирования прямых лево- и правосторонних кодов Грея у из трехразрядных двоичных векторов  $x$  показаны на рис. 3а и 3б соответственно.

Как следует из рис. 3, к структурной схеме прямого правостороннего преобразования Грея мы приходим в результате разворота на  $180^\circ$  относительно центральной вертикальной оси структурной схемы, отвечающей левостороннему (классическому) прямому преобразованию Грея.

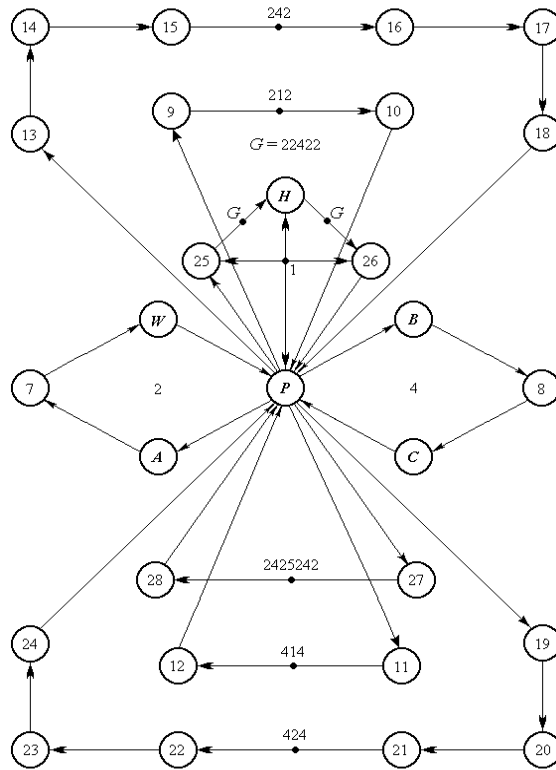


Рисунок 2 - Полный граф симметричных систем Уолша восьмого порядка

Таблица 1 – Полная система простых операторов Грея

Обозначение оператора	Выполняемая операция
0 или $e$	Сохранение исходной комбинации
1	Инверсная перестановка
2	Прямое кодирование по Грею правостороннее
3	Обратное кодирование по Грею правостороннее
4	Прямое кодирование по Грею левостороннее
5	Обратное кодирование по Грею левостороннее

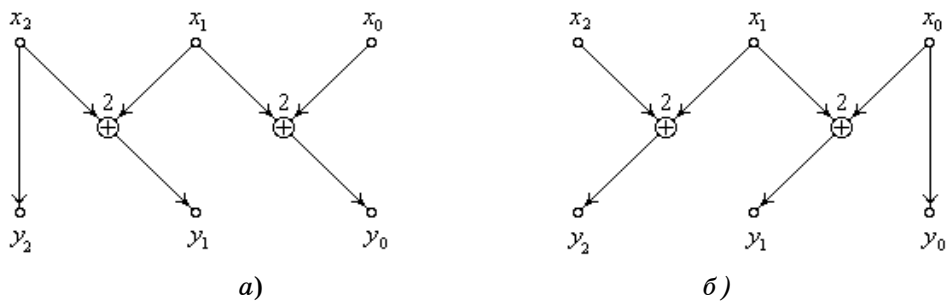


Рисунок 3 - Структурные схемы алгоритмов формирования прямых кодов Грея: а) левостороннего; б) правостороннего

Операции преобразования как простыми, так и составными кодами Грея (образованными произведением в кольце вычетов по mod 2 простых операторов Грея) можно представить в матричной форме

$$k_{\omega} = (k_p J_{\omega})_2, \quad (5)$$

где  $k_{\omega}$  и  $k_p$  - двоичные номера базисных функций систем Уолша  $W$  и  $P$ , причем  $k_p = 0, 2^l - 1$ ;  $J_{\omega}$  - квадратная  $(0, 1)$ - матрица  $l$ - го порядка, с помощью которой осуществляется преобразование матрицы  $P$  в систему Уолша  $W$  (здесь через  $W$  обозначена произвольная система Уолша, совсем не обязательно совпадающая с матрицей (2)).

Матрицы  $J_{\omega}$  в соотношении (5) названы *индикаторными матрицами* систем функций Уолша, физический смысл которых будет уточнен ниже. Индикаторные матрицы совпадают с матрицами, отвечающими простым или составным операторам Грея. В табл. 2 сведены индикаторные матрицы третьего порядка, отвечающие системам функций Уолша восьмого порядка, представленным на рис. 2.

Таблица 2 – Полная совокупность индикаторных матриц систем Уолша восьмого порядка

$P$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	22	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$H$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	16	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	23	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$A$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	17	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	24	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$B$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	18	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	25	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$C$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	19	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	26	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$W$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	20	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	21	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	28	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

На примере индикаторных матриц  $J_\omega$  третьего порядка можем отметить следующие их особенности. Во-первых, все они невырожденные по mod 2. И во-вторых, индикаторные матрицы являются правосторонне симметрическими, т.е. симметричными относительно вспомогательной диагонали, причем часть из них обладает двусторонней симметрией. Таковыми в табл. 2 являются индикаторные матрицы, отвечающие системам Уолша  $P$ ,  $H$ , 25 и 26.

Итак, нами уже установлено важнейшее полезное качество индикаторных матриц систем Уолша, которое состоит в следующем. Если известна индикаторная матрица  $J_\omega$  порядка  $l$  некоторой системы Уолша  $W$ , то на основании преобразования (5) легко определяется структура системы функций  $W$ . Естественно, что предварительно мы должны выписать матрицу, отвечающую системе функций Уолша-Пэли ( $N = 2^l$ )-го порядка. В монографии [7] приведены рекуррентные соотношения для прямой записи базисных функций  $P$ - системы. Начальные условия для базисных функций  $p(k, n)$  Пэли – систем  $N$ - го порядка таковы:

$$p(0, n) = +, n = \overline{0, N-1};$$

$$p(1, n) = \begin{cases} +, n = \overline{0, N/2-1}; \\ -, n = \overline{N/2, N-1}. \end{cases}$$

Если  $k \geq 1$ , то  $p(2k, n) = p(k, (2n)_N)$  - для четных и

$p(2k+1, n) = p(2k, n) p(1, n)$  - для нечетных базисных функций.

Построив предварительно систему функций Уолша-Пэли  $2^l$ - го порядка, легко потом по формуле (5) для заданной индикаторной матрицы  $J_\omega$  порядка  $l$  составить требуемую систему функций  $W$ .

Не менее интересным является применение индикаторных матриц для решения задач спектрального анализа дискретных сигналов на конечных двоично-рационального порядка интервалах определения  $N$ . В самом деле, для реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) в базисе функций Уолша-Адамара достаточно воспользоваться классической схемой Кули-Тьюки [8], дерево которого для восьмиточечного БПФ приведено на рис. 4.

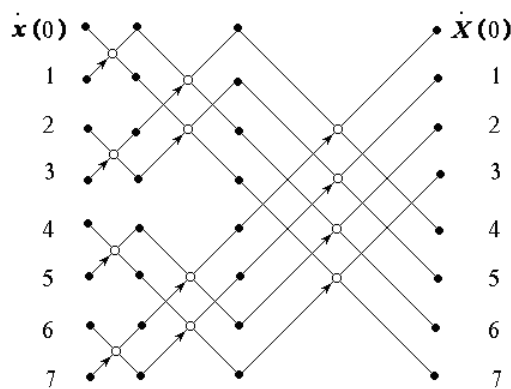


Рисунок 4 - Дерево восьмиточечного БПФ в базисе функций Уолша-Адамара

Двухточечные операторы «бабочка» осуществляют над входными операндами  $A$  и  $B$  преобразования по правилу, показанному на рис. 5.

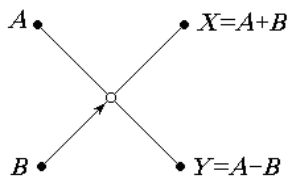


Рисунок 5 - Оператор преобразования «бабочка»

Отклик  $\dot{X}$  процессора БПФ (рис. 4) на вектор отсчетов входного сигнала  $\dot{x}$  определяется соотношением

$$\dot{X} = x H_8,$$

в котором матрица  $H_8$  совпадает с матрицей Адамара (1).

Двоично-инверсная перестановка номеров сигнала на входе процессора БПФ приводит к формированию спектра сигнала  $\dot{X}$  в базе функций Уолша-Пэли, которому отвечает матрица преобразования (3). И наконец, если ДИП отсчеты  $\dot{x}$  дополнительно переставить с помощью индикаторной матрицы  $J_\omega$  системы Уолша-Качмажа, приходим к спектру сигнала в базе функций Уолша-Качмажа, матрица которого задана соотношением (2).

В общем случае, для того чтобы получить спектр сигнала в базе заданной системы Уолша, достаточно на вход процессора БПФ, построенного по классической схеме Кули-Тьюки, подобной той, что представлена на рис. 4, подвести отсчеты сигнала  $\dot{x}$ , номера которых  $k_\omega$  определяются соотношением

$$k_\omega = (k_{\text{дип}} J_\omega)_2, \quad (6)$$

$k_{\text{дип}}$  - ДИП - последовательность двоичных  $l$  - разрядных чисел.

В табл. 3 представлены значения номеров отсчетов сигнала  $x$ , подаваемых на вход восьмиточечного процессора БПФ (рис. 4), обеспечивающего формирование спектра в заданном базисе.

Итак, мы пришли к чрезвычайно важному результату. Смысл его заключается в следующем. До сих пор при структурировании алгоритмов БПФ в известных базисах Уолша, упорядоченных по Адамару, Качмажу или Пэли, каждый раз решалась задача факторизации матриц преобразования, соответствующих перечисленным трем системам Уолша. На основании исследований, приведенных в данной работе, мы убеждаемся в том, что не только для упомянутых выше трех систем Уолша, но и вообще для произвольной системы Уолша при синтезе алгоритмов БПФ отпадает необходимость в факторизации соответствующих им матриц преобразования. Для того чтобы получить спектр дискретного сигнала в том или ином базисе Уолша, достаточно, сохраняя неизменной структуру дерева БПФ по схеме Кули-Тьюки, произвести соответствующую перестановку отсчетов сигнала на входе процессора БПФ. Правило перестановок номеров отсчетов сигнала определяется индикаторной матрицей  $J_\omega$  заданной системы Уолша  $W$  и вычисляется по формуле (6).

Таблица 3 – Номера отсчетов сигнала на входе процессора БПФ в выбранном базисе

Базис	Номер входа процессора БПФ							
	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>H</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>P</i>	0	4	2	6	1	5	3	7
<i>A</i>	0	6	3	5	1	7	2	4
<i>B</i>	0	4	6	2	3	7	5	1
<i>C</i>	0	4	6	2	7	3	1	5
<i>W</i>	0	7	3	4	1	6	2	5
7	0	5	2	7	1	4	3	6
8	0	4	2	6	5	1	7	3
9	0	2	5	7	6	4	3	1
10	0	5	4	1	7	2	3	6
11	0	3	5	6	2	1	7	4
12	0	7	1	6	5	2	4	3
13	0	3	7	4	2	1	5	6
14	0	5	6	3	7	2	1	4
15	0	1	4	5	6	7	2	3
16	0	2	3	1	4	6	7	5
17	0	7	5	2	3	4	6	1
18	0	6	1	7	5	3	4	2
19	0	2	7	5	6	4	1	3
20	0	7	3	4	5	2	6	1
21	0	3	1	2	4	7	5	6
22	0	1	6	7	2	3	4	5
23	0	6	5	3	7	1	2	4
24	0	5	4	1	3	6	7	2
25	0	6	7	1	3	5	4	2
26	0	3	7	4	6	5	1	2
27	0	2	1	3	4	6	5	7
28	0	1	4	5	2	3	6	7

Подытоживая результаты исследований, сформулируем ряд положений.

**Утверждение.** Каждой симметричной системе Уолша  $W_N$  двоично-рационального порядка  $N = 2^l$ ,  $l \geq 2$ , соответствует единственная однозначно с ней связанная  $(0, 1)$ - индикаторная матрица  $J_\omega$   $l$ -го порядка.

Необходимые и достаточные условия существования индикаторных матриц систем функций Уолша определяются следующей теоремой.

**Теорема.** Индикаторной матрицей  $J_\omega$  системы функций Уолша  $W$  двоично-рационального порядка  $N = 2^l$ ,  $l \geq 2$ , является правосторонне симметрическая  $(0, 1)$ - матрица  $l$ -го порядка (*необходимые условия*), невырожденная в кольце вычетов по  $\text{mod } 2$  (*достаточные условия*).

Оценки числа  $L_l$  индикаторных матриц  $J_\omega$  порядка  $l$  совпадают с оценками (4) числа симметричных систем функций Уолша  $(N = 2^l)$ -го порядка. Данный факт является свидетельством единственности и однозначности систем Уолша  $W$  и их индикаторных матриц  $J_\omega$ .



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы можем сформулировать два важнейших вывода по результатам исследований в данной статье.

Во-первых, любая симметричная матрица Уолша  $2^l$ -го порядка,  $l \geq 2$ , может быть однозначно представлена соответствующей ей индикаторной матрицей  $l$ -го порядка. Индикаторная матрица системы Уолша является невырожденной в кольце вычетов по mod 2 матрицей, симметричной относительно вспомогательной диагонали.

И во-вторых, индикаторные матрицы систем Уолша существенно упрощают задачу построения алгоритма БПФ в заданном базисе систем функций Уолша, поскольку становится излишней операция факторизации матриц ортогонального преобразования.

## SUMMARY

### DISPLAY MATRIXES OF SYSTEMS OF WALSH FUNCTIONS

*A.J.A.Beletsky, E.A.Beletsky*  
*National aviation university, Kiev*

*It is shown that any system of Walsh functions of binary-rational order  $N = 2^l$ ,  $l \geq 2$ , can be uniquely mapped indicator matrix, which is a non-degenerate in the ring of residues mod 2 on the square (0, 1) - matrix order  $l$ , symmetric with respect to the auxiliary dia-rut.*

**Key words:** *system of Walsh functions, Adamar matrix, Gray codes.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard J.L. Resalution d'une questions relative aux determinants // Bull. Sci. Math. - 1933. - Ser. 2, Vol. 17, Pt. 1. - P. 240-246.
2. Трахтман А.М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А.М.Трахтман, В.А.Трахтман. - М.: Сов. радио, 1975. - 208 с.
3. Walsh J.L. //Amer. Jour. Math. - 1923. - Vol. 55. - P. 5-24.
4. Артемьев М.Ю. Алгоритм формирования симметричных систем функций Уолша / М.Ю.Артемьев, Г.П.Гаев, Т.Э.Кренкель, А.П.Скотников // Радиотехника и электроника. - 1978. - № 3. - С. 1432-1440.
5. Paley В.Е. Proc. London Math. Soc. (2). - 1932. - Vol. 34. - . P. 241-279.
6. Ен. С. Функции Уолша и код Грея // Зарубежная радиоэлектроника. - 1972. - № 7. - С. 27-35.
7. Белецкий А.Я. Преобразования Грея / А.Я.Белецкий, А.А.Белецкий, Е.А.Белецкий. - К.: Кн. изд-во НАУ, 2007: Т. 1. Основы теории. - 412 с.; Т. 2. Прикладные аспекты. - 644 с.
8. Cooley I.W. An algoritm for the machine calculation of complex Fourir series / I.W. Cooley, I.W. Tuckey // Math. comput. - April 1965. - V. 19. - P. 297-301.

*Поступила в редакцию 17 ноября 2009 г.*