УДК 62-50

# МЕТОД КАРУНЕНА-ЛОЭВА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ДИФФУЗИОННЫМ ПРОЦЕССОМ

***А.С. Мазманишвили***, *д-р физ.-мат. наук, профессор*

*Сумский государственный университет, г. Сумы*

*Поставлена задача управления в конечномерном пространстве состояний на основе интегрального квадратичного функционала качества. Построен алгоритм вычисления производящей функции стохастического критерия качества, основанный на каноническом разложении гауссова процесса и теореме Адамара о нулях целой функции. Показана возможность на основе производящей функции решения задачи управления статистическими характеристиками критерия в целом.*

*Поставлено задачу управління в скінченно вимірному просторі станів на основі інтегрального квадратичного функціонала якості. Побудовано алгоритм обчислення твірної функції стохастичного критерію якості, що ґрунтується на канонічному розкладі процесу Гауса та теоремі Адамара про нулі цілої функції. Показана можливість на основі твірної функції розв'язання задачі управління статистичними характеристиками критерію в цілому.*

## ВВЕДЕНИЕ

При наблюдении за физической или технической системой осуществляется измерительная процедура. Существенно, что, как правило, наблюдаемой величиной является не амплитуда реализуемого в системе процесса, а другая физическая величина, так или иначе зависящая от него. Среди прочих физических величин важное место занимает поглощенная энергия $J$, возникающая при измерении мощностных характеристик. Эта величина по своей структуре является временным интегралом от квадрата амплитуды реализуемого процесса, и если сам процесс – случайный объект, то и энергия $J$ также будет случайной. Здесь важно отметить, что измерительный процесс протяжен во времени. Принятие решений как финальная часть задачи управления системой определяется наблюдаемым значением случайной величины – функционала $J$, и, таким образом, задача управления по своей природе становится стохастической, а для её разрешения необходима информация о статистической природе функционала наблюдения. В настоящей работе задача такого вида рассматривается на примере задачи управления в системе, описываемой дифференциальным уравнением в частных производных теплового типа.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему с распределенными параметрами, описываемую уравнением следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q = \frac{\partial^2}{\partial z^2}Q\,, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}Q + \alpha\frac{\partial}{\partial z}Q\right|_{z=0} = 0\,,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}Q + \beta\frac{\partial}{\partial z}Q\right|_{z=l} = \xi(t)\,. \tag{2}$$

Здесь $Q \equiv Q(z,t)$ – функция состояния системы, $\xi(t)$ – стохастический процесс, обладающий свойствами белого шума,

$$\langle \xi(t) \quad \xi(t') \rangle = \sigma\delta(t-t') , \tag{3}$$

при этом $\sigma$ – интенсивность шума; $\alpha$ и $\beta$ – заданные постоянные величины, а $l$ – длина интервала рассмотрения. Поскольку уравнение (1) и граничные условия (2) линейны относительно $Q(z,t)$ и $\xi(t)$, случайный процесс $Q(z,t)$ в каждой точке $(z,t)$ также описывается нормальным законом распределения [1, 2].

Наличие временной производной в (1) обуславливает существование переходных процессов функции состояния. Пусть у нас наблюдение осуществляется в точке $z = z^*$, $0 \le z^* \le l$. Для оценки и управления качеством переходного процесса необходимо выбрать тот или иной функционал $J$, базирующийся на $Q(z^*,t)$. В силу стохастической структуры процесса $Q(z,t)$ необходимо извлечь статистическую информацию о природе функционала $J$. Достаточно информационно-ёмкой является плотность распределения вероятностей $P(J)$ случайной величины $J$ или, что статистически эквивалентно, производящая функция (ПФ)

$$q(\lambda) \equiv \langle \exp(-\lambda J) \rangle = \int\limits_0^\infty dJ P(J) \exp(-\lambda J) , \tag{4}$$

где $\lambda$ – производящий параметр, а интегрирование в (4) осуществляется по всей области определения $J$. С нахождением функций $q(\lambda)$ или $P(J)$ получает свое разрешение прямая задача – извлечение на основе (1)–(3) информации о статистической структуре стохастического функционала $J$. После этого можно ставить и разрешать обратную задачу. Поскольку ПФ $q(\lambda)$ (для определенности далее будем указывать только одну эту функцию, подразумевая при этом и плотность $P(J)$) – это некоторая неслучайная функция, то, выбирая тот или иной подходящий критерий [3], возможно путем подбора подходящих значений параметров, входящих в (1)-(2), поставить и решить задачу синтеза системы управления распределенным объектом в условиях случайных возмущений.

Для оценки качества переходного процесса в точке наблюдения $z = z^*$ принято использовать [3] интегральный квадратичный функционал $J$ следующего вида:

$$J = \int\limits_0^T dt \quad Q^2(z^*,t) , \tag{5}$$

где $T$ - длительность наблюдения. Поскольку принимается, что стохастический процесс белого шума $\xi(t)$ включен все время (момент его включения отнесен к $-\infty$), то вместо функционала (5) можно аналогично рассматривать функционал

$$J = \int\limits_\tau^{T+\tau} dt \quad Q^2(z^*,t) , \tag{6}$$

где $\tau$ – некоторый временной сдвиг.

В задачах синтеза систем управления используют критерии, основанные, например, на функционале

$$J' = \min\langle J\rangle . \tag{7}$$

Поскольку функционалы вида (7) являются фактически моментами случайной величины $J$, на их основе можно рассмотреть лишь подмножество обратных задач, т.е. осуществить частичный синтез системы управления. С другой стороны, на основе ПФ $q(\lambda)$, исчерпывающим образом описывающей статистическую структуру стохастического функционала $J$, возможно разрешить полную задачу синтеза.

Для описания функционала $J$ перейдем в пространство состояний [4]. В качестве базисных функций пространства выберем бесконечный набор $\{\varphi_m(z)\}$, отвечающий оператору Штурма-Лиувилля (1), и соответственно набор собственных чисел $\mu_m$. Индекс $m$ пробегает целочисленные значения, $m = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$Q(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m(t)\varphi_m(z) , \tag{8}$$

при помощи такого представления функция состояния $Q(z,t)$ разложена на суперпозицию мод $\varphi_m(z)$, с амплитудой $x_m(t)$ каждая. Из (8) следует

$$x_m(t) = \int_0^l dz \quad Q(z,t) \quad \varphi_m(z) , \tag{9}$$

поскольку набор функций $\{\varphi_m(z)\}$, $m = 1, 2, \ldots$, образует ортогональный базис. Дифференцируя по $t$ выражение (9), получим

$$\dot{x}(t) = \varphi_m(z)\frac{d}{dz}Q(z,t)\Big|_0^l - Q(z,t)\frac{d}{dz}\varphi_m(z)\Big|_0^l + \int_0^l dz \quad Q(z,t)\frac{d^2}{dz^2}\varphi_m(z) . \tag{10}$$

Потребуем, чтобы каждая из функций $\varphi_m(z)$ удовлетворяла условию

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi_m(z) = -\mu_m^2\varphi_m(z) , \tag{11}$$

и с учетом граничных условий (2) для функции состояния потребуем также

$$\left(\frac{d}{dz}\varphi_m(z) + \alpha\varphi_m(z)\right)\Big|_{z=0} = 0 , \qquad \left(\frac{d}{dz}\varphi_m(z) + \beta\varphi_m(z)\right)\Big|_{z=l} = 0 . \tag{12}$$

Общее решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\varphi_m(z) = N_0\left(A\sin\mu_m z + B\cos\mu_m z\right) , \tag{13}$$

где $N_0$ – нормировочный множитель, такой, что $\int_0^l dz \quad \varphi_m^2(z) = 1$ .

Из (12) и (13) следует, что собственные числа $\{\mu_m\}$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$\mathrm{tg}(\mu l) = \mu(\beta - \alpha)(\alpha\beta + \mu^2)^{-1}, \tag{14}$$

а собственные функции $\varphi_m(z)$ имеют следующий вид:

$$\varphi_m(z) = \sqrt{2}(\mu_m \cos \mu_m z - \alpha \sin \mu_m z) \times \tag{15}$$
$$\times\left[\alpha(-1 + \cos 2\mu_m l) + \mu_m^{-1}(\mu_m^2 - \alpha^2)\sin 2\mu_m l + l(\mu_m^2 + \alpha^2)\right]^{1/2}.$$

На основании (10-15) можно записать уравнение движения для временной амплитуды $x_m(t)$:

$$\dot{x}_m(t) + \mu_m^2 x(t) = b_m \xi(t), \qquad b_m = \varphi_m(l). \tag{16}$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$x_m(t) = x_m(0)\exp(-\mu_m^2 t) + \int_0^t d\tau \quad b_m \xi(\tau) \quad \exp(-\mu_m^2 t + \mu_m^2 \tau). \tag{17}$$

Полученные выражения позволяют записать функционал (5) в виде разложения по собственным функциям в точке наблюдения $z = z^*$:

$$J = \int_0^T dt \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_m x_m(t)\right]^2, \qquad c_m = \varphi_m(z^*). \tag{18}$$

Для осуществления синтеза системы управления распределенным объектом и связанного с ним численным алгоритмом необходимо ограничиться конечным числом $M$ собственных функций. Введем функционал

$$J_M = \int_0^T dt \left[\sum_{m=1}^{M} c_m x_m(t)\right]^2. \tag{19}$$

Поскольку декременты $\mu_m^2$ уравнения (16) являются монотонно возрастающими с ростом индекса $m$ решениями трансцендентного уравнения (14), есть основания полагать, что для достаточно большого числа $M$ функционал $J_M$ имеет статистическую структуру, близкую к статистической структуре $J$ с $N \to \infty$. Поэтому возможно ставить и разрешать задачу синтеза системы управления распределенной системы с использованием функционала $J_M$, относящегося к пространству конечной размерности. Ниже будет описана статистическая структура этого функционала в терминах производящей функции

$$q_M(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_M) \rangle, \tag{20}$$

а задача отыскания этого математического ожидания и составит цель прямой задачи.

## ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО МЕТОДУ КАРУНЕНА–ЛОЭВА В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В этом пункте будет рассмотрена техника вычисления ПФ $q_M(\lambda)$ в случае, когда $M = 1$. Далее окажется полезной следующая теорема.

Пусть $y(\tau)$ – однокомпонентный стационарный гауссов процесс с корреляционной функцией $K(\tau,\tau') = \langle y(\tau)y(\tau')\rangle$ и пусть интегральному уравнению

$$e_n(\tau) = \lambda_n \int_0^T d\tau \quad K(\tau,\tau') \quad e_n(\tau') \tag{21}$$

удовлетворяет набор собственных функций $e_n(\tau)$ с собственными числами $\lambda_n$, где $n = 1,2,\ldots$ Тогда имеет место разложение

$$y(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad e_n(\tau), \tag{22}$$

такое, что каждый из коэффициентов $y_n$ является статистически независимой случайной величиной, имеющей плотность распределения вероятностей

$$w_n(y_n) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_n y_n^2\right). \tag{23}$$

Доказательство теоремы изложено, например, в [3, 5]. Пример её использования для винеровских процессов [6] приведен в [7].

Воспользуемся разложением (22) для нахождения математического ожидания

$$q_1(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda c_1^2 \int_0^T dt \quad x_1^2(t)\right)\right\rangle \tag{24}$$

по всем возможным реализациям случайного процесса $x_1(t)$, описываемого уравнением

$$\dot{x}_1(t) + \mu_1^2 x_1(t) = b_1 \xi(t). \tag{25}$$

Функцию $K(\tau,\tau')$ найдем, пользуясь решением уравнения (25):

$$x_1(\tau) = x_1(0)\exp(-\mu_1^2\tau) + b_1\int_0^{\tau} d\tau'\xi(\tau')\exp(-\mu_1^2\tau + \mu_1^2\tau'), \tag{26}$$

поэтому

$$b_1\langle x_1(\tau)\xi(\tau)\rangle = b_1^2\int_0^{\tau} d\tau'\langle \xi(\tau)\xi(\tau')\rangle \exp(-\mu_1^2\tau + \mu_1^2\tau'), \tag{27}$$

причем $b_1\langle x_1(\tau')\xi(\tau)\rangle = 0$, если $\tau \ge \tau'$, и $\langle \xi(\tau)\rangle = 0$ в силу гауссова свойства белого шума $\xi(\tau)$. Отсюда для функции

$$K(\tau,\tau') = \left\langle x_1(\tau)x_1(\tau')\right\rangle \tag{28}$$

при $\tau' < \tau$ получим уравнение

$$\frac{d}{d\tau}K(\tau,\tau') + \mu_1^2 K(\tau,\tau') = 0\,. \tag{29}$$

Поскольку в силу стационарности для всех $\tau$ выполняется

$$\left\langle x_1^2(\tau)\right\rangle = \left\langle x_1^2(0)\right\rangle = \frac{\sigma b_1^2}{2\mu_1^2}\,, \tag{30}$$

то

$$K(\tau,\tau') = \frac{\sigma b_1^2}{2\mu_1^2}\exp(-\mu_1^2 \mid \tau - \tau' \mid)\,. \tag{31}$$

Вернемся к нахождению $q_1(\lambda)$. В силу (22)

$$q_1(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda c_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)\right\rangle = \prod_{n=1}^{\infty}\left\langle \exp\left(-\lambda c_1^2 y_n^2\right)\right\rangle\,, \tag{32}$$

т.е. получено факторизационное представление для ПФ $q_1(\lambda)$.

Воспользуемся теперь плотностью распределения (23), тогда

$$q_1(\lambda) = \left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + 2\lambda / c_1^2\lambda_n\right)\right\}^{-1/2}\,. \tag{33}$$

Бесконечное произведение в (33) является факторизационным представлением для некоторой функции $D(-2\lambda)$, нулями которой являются собственные числа $\lambda_n$, умноженные на $c_1^2$. Если удастся построить эту функцию, она и будет основой для искомой однокомпонентной ПФ:

$$q_1(\lambda) = \left[\frac{D(0)}{D(-2\lambda)}\right]^{1/2}\,. \tag{34}$$

Согласно теореме Адамара [8] такая функция существует. Для её нахождения воспользуемся интегральным уравнением (21) с найденным ранее явным видом (31) корреляционной функции

$$e_n(\tau) = \frac{\sigma b_1^2}{2\mu_1^2}\lambda_n \int_0^{\tau} d\tau' \exp(-\mu_1^2\tau + \mu_1^2\tau')e_n(\tau') + \frac{\sigma b_1^2}{2\mu_1^2}\lambda_n \int_{\tau}^{T} d\tau' \exp(\mu_1^2\tau - \mu_1^2\tau')e_n(\tau')\,. \tag{35}$$

Дважды дифференцируя это выражение, получим следующее уравнение для собственной функции

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}e_n(\tau) = r_n^2 e_n(\tau)\,, \quad r_n = \left(\mu_1^4 - \sigma b_1^2\mu_1^2\lambda_n\right)^{1/2}\,. \tag{36}$$

Граничные условия для уравнения (36) следуют из (35):

$$\left[\frac{d}{d\tau}e_n(\tau) + \mu_1^2 e_n(\tau)\right]_{\tau=T} = 0\,, \qquad \left[\frac{d}{d\tau}e_n(\tau) - \mu_1^2 e_n(\tau)\right]_{\tau=0} = 0\,. \qquad (37)$$

Решение уравнения (36) ищем в виде

$$e_n(\tau) = C_1 \exp(r_n\tau) + C_2 \exp(-r_n\tau)\,. \qquad (38)$$

Коэффициенты $C_1$ и $C_2$ решения необходимо выбрать так, чтобы удовлетворить условиям (37):

$$\begin{gathered}(r_n + \mu_1^2)\exp(r_n T)C_1 - (r_n - \mu_1^2)\exp(-r_n T)C_2 = 0,\\ (r_n - \mu_1^2)C_1 - (r_n + \mu_1^2)C_2 = 0.\end{gathered} \qquad (39)$$

Система (39) относительно искомых коэффициентов $C_1$ и $C_2$ однородна. Для её разрешимости необходимо [9, 10], чтобы детерминант, образованный из коэффициентов при $C_1$ и $C_2$ в (39), равнялся нулю. Поскольку в (39) входят собственные числа $\lambda_n$, то требование обратимости этого детерминанта в нуль и приведет к уравнению для собственных чисел, а функция $D(\lambda)$, удовлетворяющая этому требованию:

$$D(\lambda) = \frac{(r_n + \mu_1^2)^2 \exp(r_n T) - (r_n - \mu_1^2)^2 \exp(-r_n T)}{4 r_n \mu_1^2 \exp(\mu_1^2 T)}\,, \qquad (40)$$

и будет согласно теореме Адамара равной

$$D(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2\lambda/\lambda_n)\,. \qquad (41)$$

Поэтому на основании (37) получим

$$q_1(\lambda) = \left[\frac{4\rho_1\mu_1^2\exp(\mu_1^2 T)}{(\rho_1 + \mu_1^2)^2\exp(\rho_1 T) - (\rho_1 - \mu_1^2)^2\exp(-\rho_1 T)}\right]^{1/2}, \qquad (42)$$

где $\rho_1 = (\mu_1^4 + 2\lambda\sigma b_1^2 c_1^2 \mu_1^2)^{1/2}$.

Таким образом, получено явное выражение для производящей функции $q_1(\lambda)$, отвечающей однокомпонентному процессу (25) и основанному на нем функционалу

$$J_1 = c_1^2 \int_0^T dt \quad x_1^2(t)\,, \qquad (43)$$

где, напомним, $b_1 = \varphi_1(l)$, $c_1 = \varphi_1(z^*)$.

Подход, использованный при рассмотрении однокомпонентной задачи, позволяет перейти к задаче, отвечающей распределенной системе в целом.

## ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С помощью техники метода Карунена-Лоэва возможно перейти к обобщению и распространить применение этого метода на случай конечномерной системы размерности $M$. С этой целью запишем на основе (16) уравнение движения

$$\dot{x} + Ax = b\xi(t)\,, \tag{44}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_M)$ – $M$-компонентные вектор-столбцы и

$$A = \operatorname{diag}(\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_M^2) \tag{45}$$

– $(M \times M)$-матрица. Введем $(M \times M)$-матрицу наблюдения $V$, такую, что

$$V_{nm} = c_n c_m\,, \tag{46}$$

тогда функционал (19) примет вид

$$J_M = \int_0^T dt \left(x(t) V x(t)\right). \tag{47}$$

Поставим задачу на отыскание математического ожидания

$$q_M(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda J_M\right)\right\rangle \tag{48}$$

– безусловного среднего по всем реализациям процесса (44). Заметим, что

$$q_M(\lambda)\big|_{\lambda=0} = 1\,. \tag{49}$$

Поскольку в системе (44) в правой части фигурирует один и тот же белый шум $\xi(t)$, отличающийся от уравнения к уравнению постоянными множителями, удобно преобразовать (47) следующим образом. Из используемых матриц выделим матрицу $V$. Эта матрица – вырожденная, поскольку $\det V = 0$, в чем можно непосредственно убедиться. Поэтому матрицы $V^{-1}$ не существует. Вместе с тем в заключительных выражениях особенность матрицы $V$ не критична, поскольку в них она фигурирует в положительной степени. Поэтому ниже под матрицей $V$ будем понимать регуляризирующую $(M \times M)$-матрицу $U$ следующего вида ($I$ – единичная матрица):

$$V \to U = V + \delta^2 I\,, \tag{50}$$

т.е. матрицу, для которой $U^{-1}$ существует, а в результирующих выражениях малый вспомогательный параметр $\delta$ будет устремлен к нулю. Пусть $U^{1/2}$ – произвольный удобный для вычислений квадратичный корень из матрицы $U$. Перейдем в пространство ($U$-пространство), пользуясь матрицей $U^{1/2}$ как матрицей поворота. Обозначим

$$x_U = U^{1/2}x\,, \qquad g_U = U^{1/2}b\xi(t)\,, \qquad A_U = U^{1/2}AU^{-1/2}\,, \tag{51}$$

тогда

$$J_M = \int_0^T dt\left(x_U(t)x_U(t)\right). \tag{52}$$

Поскольку $\xi(t)$ – белый шум, то

$$\left\langle b_m\xi(t)b_n\xi(t')\right\rangle = S_{mn}\delta(t-t')\,, \tag{53}$$

при этом введенная ковариационная $(M\times M)$-матрица $S$ равна

$$S_{mn} = \sigma b_m b_n\,, \tag{54}$$

а поворот в $U$-пространство дает $S_U = U^{1/2}SU^{1/2}$.

Тот же поворот приводит к уравнению движения

$$\frac{d}{dt}x_U(t) + A_U x_U(t) = g_U(t)\,, \tag{55}$$

поэтому

$$x_U(t) = x_U(0) + \int_0^t d\tau\exp(-A_U t + A_U\tau)g_U(\tau)\,. \tag{56}$$

Перейдем к нахождению корреляционной $(M\times M)$-матрицы $K(\tau,\tau')$. Пользуясь методикой, изложенной в [1, 9, 11], найдем

$$K_{mn}(\tau,\tau') = \left\langle x_{U,m}(\tau)x_{U,m}(\tau')\right\rangle = \tag{57}$$

$$= \vartheta(\tau-\tau')\exp(-A_U\tau + A_U\tau')L_U + \vartheta(\tau-\tau')L_U\exp(-A_U\tau' + A_U\tau)\,,$$

где $\vartheta(\tau)=1$, если $\tau\ge 0$, и $\vartheta(\tau)=0$, если $\tau<0$, а $(M\times M)$-матрица Ляпунова $L_U$ является решением уравнения Ляпунова $A_U L_U + L_U A_U = S_U$ и равна

$$L_U = \int_0^\infty d\tau\exp(-A_U\tau)S_U\exp(-A_U\tau)\,. \tag{58}$$

Полученная корреляционная функция (57) позволяет построить ортогональную систему $M$-компонентных векторов $\{e_n(\tau)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$e_n(\tau) = \lambda_n\int_0^T d\tau' K(\tau,\tau')e_n(\tau')\,, \tag{59}$$

т.е. набор $\{e_n(\tau)\}$ является собственными функциями линейного оператора $K(\tau,\tau')$ с отвечающими им собственными числами $\{\lambda_n\}$, где $n = 1,\ldots,M$.

Используем теперь теорему о разложении [1, 9, 11], согласно которой $M$-компонентный стационарный гауссов процесс $y(\tau)$ может быть представлен в виде

$$y(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n(\tau), \tag{60}$$

таком, что каждый из коэффициентов разложения $y_n$ в базисе $\{e_n(\tau)\}$ является статистически независимой случайной величиной, имеющей плотность распределения вероятностей (23).

Вернемся теперь в ПФ (48). С учетом (52) и (23) получим

$$q_M(\lambda)=\left\langle \exp\left(-\lambda J_M\right)\right\rangle=\left\langle \exp\left(-\lambda\int_0^T dt x_U(t)x_U(t)\right)\right\rangle=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left\langle \exp\left(-\lambda y_n^2\right)\right\rangle=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2\lambda/\lambda_n\right)^{-1/2} \tag{61}$$

– факторизационное представление ПФ. Бесконечное произведение в (61) можно свернуть, если согласно теореме Адамара [8] найти такую трансцендентную функцию $D(\lambda)$, совокупность нулей которой совпадает с бесконечным набором собственных чисел $\{\lambda_n\}$.

## ПОСТРОЕНИЕ ПФ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ АДАМАРА

С целью построения ПФ $q_M(\lambda)$ обратимся к интегральному уравнению (59). Фигурирующие в (57) матрицы $A$ и $L$, вообще говоря, не коммутируют, кроме того, матрица $L^{-1}$ не существует. С целью свести интегральное уравнение (59) к дифференциальному введем следующие функции:

$$\begin{aligned} k_n(\tau) &= \int_0^{\tau} d\tau' \exp(-A_U\tau + A_U\tau')L_U e_n(\tau'),\\ g_n(\tau) &= \int_{\tau}^{T} d\tau' \exp(-A_U^{\mathrm{T}}\tau' + A_U^{\mathrm{T}}\tau) e_n(\tau'). \end{aligned} \tag{62}$$

Тогда имеем

$$e_n(\tau)=\lambda_n k_n(\tau)+\lambda_n L_U g_n(\tau). \tag{63}$$

Из (62) и (63) найдем искомую систему

$$\begin{aligned} \dot{k}_n(\tau) &= (-A_U+\lambda_n L_U)k_n(\tau)+\lambda_n L_U^2 g_n(\tau),\\ \dot{g}_n(\tau) &= -\lambda_n k_n(\tau)+(A_U-\lambda_n L_U)g_n(\tau). \end{aligned} \tag{64}$$

Граничные условия для системы (64) также следуют из (62) и (63):

$$\begin{aligned} k_n(\tau)\big|_{\tau=0} &= 0,\\ \left[A_U e_n(\tau)+\dot{e}_n(\tau)\right]\big|_{\tau=T} &= 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Изложенных сведений достаточно, чтобы осуществить переход в исходное пространство. Если введем обозначения для векторных функций (далее с учетом возврата везде будем вместо матрицы $U$ указывать матрицу $V$ )

$$p_n(\tau) = V^{-1/2} k_n(\tau) , \qquad s_n(\tau) = V^{1/2} g_n(\tau) , \tag{66}$$

то получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p}_n(\tau) &= (-A + \lambda_n LV) p_n(\tau) + \lambda_n LVL s_n(\tau), \\ \dot{s}_n(\tau) &= -\lambda_n V p_n(\tau) + (A - \lambda_n VL) s_n(\tau) \end{aligned} \tag{67}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &p_n(\tau)\big|_{\tau=0} = 0, \\ &\left[A p_n(\tau) + AL s_n(\tau) + \dot{p}_n(\tau) + L_n \dot{s}(\tau)\right]\Big|_{\tau=T} = 0. \end{aligned} \tag{68}$$

Перейдем к решению системы (67). Введем ( $2M \times 2M$ )-матрицу $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, \tag{69}$$

состоящую из ( $M \times M$ )-матриц $X_1$ , $X_2$ , $X_3$ , $X_4$ следующего вида:

$$X_1 = -A - 2\lambda LV , \quad X_2 = -2\lambda LVL , \quad X_3 = 2\lambda V , \quad X_4 = A + 2\lambda VL . \tag{70}$$

Уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ s_n(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ s_n(\tau) \end{pmatrix} \tag{71}$$

имеет решение

$$\begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ s_n(\tau) \end{pmatrix} = \exp(H\tau) \begin{pmatrix} p_n(0) \\ s_n(0) \end{pmatrix}, \tag{72}$$

где $\exp(H\tau)$ – матричная ( $2M \times 2M$ )-экспонента [8, 9]:

$$\exp\begin{pmatrix} -(A + 2\lambda_n LV)\tau & -2\lambda_n LVL\tau \\ 2\lambda_n V\tau & (A + 2\lambda_n VL)\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(\lambda_n,\tau) & E_2(\lambda_n,\tau) \\ E_3(\lambda_n,\tau) & E_4(\lambda_n,\tau) \end{pmatrix}, \tag{73}$$

а $E_1$ , $E_2$ , $E_3$ , $E_4$ – четыре ( $M \times M$ )-матрицы. Их явный вид следует из (73).

Имеем из (72) и (73)

$$\begin{aligned} p_n(\tau) &= E_1(\lambda_n,\tau) p_n(0) + E_2(\lambda_n,\tau) s_n(0) , \\ s_n(\tau) &= E_3(\lambda_n,\tau) p_n(0) + E_4(\lambda_n,\tau) s_n(0). \end{aligned} \tag{74}$$

Кроме того (зависимость от $\lambda_n$ опущена),

$$\dot{p}_n(\tau) = X_1[E_1(\tau)p_n(0) + E_2(\tau)s_n(0)] + X_2[E_3(\tau)p_n(0) + E_4(\tau)s_n(0)] \; ,$$
$$\dot{s}_n(\tau) = X_3[E_1(\tau)p_n(0) + E_2(\tau)s_n(0)] + X_4[E_3(\tau)p_n(0) + E_4(\tau)s_n(0)]. \qquad (75)$$

На основе выражений (74), (75) выполним учет граничных условий (68). Конкретизируя явный вид матриц (70), найдем

$$(AL + LA)E_4(\lambda_n, T)s_n(0) = 0 \; . \qquad (76)$$

Полученное условие является однородным. Для существования нетривиального решения системы однородных линейных уравнений (76) необходимо [9, 10] выполнить условие

$$\det\left[(AL + LA)E_4(\lambda_n, T)\right] = 0 \; . \qquad (77)$$

Функция

$$D(\lambda) = \det\left\lfloor (AL + LA)E_4(\lambda, T)\right\rfloor \qquad (78)$$

обращается в нуль согласно (77) в тех случаях, когда её аргумент $\lambda$ принимает значения на совокупности собственных чисел $\{\lambda_n\}$. Она и является искомой функцией Адамара. Поэтому запишем

$$q_M(\lambda) = \left[\frac{D(0,T)}{D(-2\lambda,T)}\right]^{1/2} = \left[\frac{\det\left[(AL + LA)E_4(0,T)\right]}{\det\left[(AL + LA)E_4(-2\lambda,T)\right]}\right]^{1/2} . \qquad (79)$$

Поскольку $\det L = 0$, выражение (79) необходимо рассматривать как предел следующего регуляризирующего вида:

$$q_M(\lambda) = \left[\frac{D(0,T)}{D(-2\lambda,T)}\right]^{1/2} = \left[\frac{\det[(AL_\varepsilon + L_\varepsilon A)E_4(0,T)]}{\det[(AL_\varepsilon + L_\varepsilon A)E_4(-2\lambda,T)]}\right]^{1/2} , \qquad (80)$$

где $L_\varepsilon = L + \varepsilon^2 I$ . Регуляризирующий параметр $\varepsilon$ введен аналогично (50) с целью обойти затруднения, связанные с вырожденностью матрицы Ляпунова $L$ .

Теперь $\det(AL_\varepsilon + L_\varepsilon A) \neq 0$ . Это позволяет записать окончательно

$$q_M(\lambda) = \left[\frac{\det E_4(0,T)}{\det E_4(-2\lambda,T)}\right]^{1/2} . \qquad (81)$$

Случайную величину $J_M$ можно охарактеризовать в терминах первого её момента и дисперсии, для которых прямым вычислением найдем

$$\langle J_M \rangle = T\mathrm{Sp}(LV) \, , \qquad (82)$$

$$\left\langle J_M^2 \right\rangle - \langle J_M \rangle^2 = \mathrm{T}^2[-I + 2AT + \exp(-2AT)]\mathrm{Sp}\left[\mathrm{A}^2 LVLV\right] . \qquad (83)$$

## АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ $q_M(\lambda)$

Таким образом, вычисление ПФ $q_M(\lambda)$ (48) сводится к алгоритму, включающему следующие операции:

1 Ввести совокупность входных параметров задачи (1), (2), (3).

2 Задать целое число $M$ размерность, рассматриваемого пространства.

3 Вычислить набор собственных чисел $\{\mu_m\}$, $m = 1,2,\ldots,M$ и рассмотреть набор собственных функций $\{\varphi_m(z)\}$ согласно (14) и (15).

4 Выбрать точку наблюдения $z = z^*$ и вычислить набор величин $b_m = \varphi(l)$ и $c_m = \varphi(z^*)$, $m = 1,2,\ldots,M$, после чего ввести $(M \times M)$-матрицы $V_{mn} = c_m c_n$ и $S_{mn} = b_m b_n$.

5 Вычислить матрицу $\exp(-A\tau)$ и на её основе $(M \times M)$-матрицу

$$L = \int_0^\infty d\tau \exp(-A\tau) S \exp(-A\tau).$$

6 Для вычисления $q_M(\lambda)$ задать величину производящего параметра $\lambda$ и найти следующие $(M \times M)$-матрицы:

$$X_1 = -A - 2\lambda LV, \quad X_2 = -2\lambda LVL, \quad X_3 = 2\lambda V, \quad X_4 = A + 2\lambda VL.$$

7 Найти четыре $(M \times M)$-матрицы $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$, такие, что

$$\exp\begin{pmatrix} -(A + 2\lambda LV)\tau & -2\lambda LVL\tau \\ 2\lambda V\tau & (A + 2\lambda VL)\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(\lambda,\tau) & E_2(\lambda,\tau) \\ E_3(\lambda,\tau) & E_4(\lambda,\tau) \end{pmatrix},$$

и $(M \times M)$-матрицу $E_4(0,T) = \exp(-AT)$.

8 Вычислить $D(0) = \det E_4(0,T)$ и $D(-2\lambda) = \det E_4(-2\lambda,T)$.

9 Найти производящую функцию $q_M(\lambda) = [D(0)/D(-2\lambda)]^{1/2}$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Осуществление перечисленных в алгоритме операций позволит решить поставленную задачу об управлении линейной распределенной стохастической системой, описываемой параболическим дифференциальным уравнением в частных производных. Полученная производящая функция $q_M(\lambda)$ содержит всю информацию о статистической структуре интегрального квадратичного функционала качества $J_M$, являющегося случайной величиной. На основе явного выражения для $q_M(\lambda)$ можно определить плотность распределения вероятностей $P(J_M)$ функционала $J_M$ с помощью обратного преобразования Лапласа

$$P(J_M) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} d\lambda q_M(\lambda) \exp(\lambda J_M) \tag{84}$$

путем интегрирования по контуру Бромвича, что путем соответствующего подбора входных параметров позволяет разрешить задачу о целенаправленном изменении характеристик этой плотности в целом, отдельно рассматривать её характеристики на периферийных участках, изучать интегральные вероятностные характеристики и др. Предложенный в настоящей работе подход может быть также использован при рассмотрении подобных систем.

**SUMMARY**

**KARHUNEN-LOEVE'S METHOD IN THE MANAGEMENT PROBLEM OF THE HEATING DIFFUSIONAL PROCESS**


***A.S. Mazmanishvili***
*Sumy State University*

*In this work a problem of management in multidimensional space on the basis of the integral square-law functional of qualityis considered. The algorithm of calculation of course-of-value function of stochastic quality criterion, based on the canonical decomposition of the Gaussian process and Hadamard theorem on zeroes of the entire function, is build. The possibility of solving management problem of statistical characteristics of a criterion in whole on the basis of course-of-value function is shown.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пугачев В.С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 659 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. – М.: Мир, 1986. – Т.1, 527 с.; Т.2. – 751 с.
3. Девятов Б.Н., Демиденко Н.Д. Теория и методы анализа управляемых распределенных процессов. – М.: Наука, 1983. – 271 с.
4. Бутковский А.Д., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными ресурсами. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1969. - 762 с.
6. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 321 с.
7. Го Х.-С. Гауссовы меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
8. Маркушевич А.М. Теория аналитических функций. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 703 с.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
10. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
11. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. – К.: Наукова думка, 1987. – 224 с.

*Поступила в редакцию 19 февраля 2009 г.*