Ж. нано- електрон. фіз./
J. Nano- Electron. Phys.
2011. – Т.3, №2. – С. 19-26

©2011 СумДУ
(Сумський державний
університет)

PACS numbers: 07.57. – c, 02.30. Rz

ВЗАЄМОДІЯ Е-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ З ДОФРАКТАЛЬНОЮ СЛАБКО НАПОВНЕНОЮ ДИФРАКЦІЙНОЮ РЕШІТКОЮ (асимптотична модель)

***Г.І. Кошовий*[1], *О.О. Шматько*[2]**

[1] Національний аерокосмічний університет "ХАІ"
вул. Чкалова 17, 61070, Харків, Україна
E-mail: gikosh@gmail.com

[2] Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
пл. Свободи 4, 61077, Харків, Україна
E-mail: alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua

На основі строгої електромагнітної теорії проводиться детальне дослідження асимптотичної моделі процесу взаємодії плоскої Е-поляризованої хвилі з слабко наповненою дофрактальною дифракційною решіткою. Для математичної впорядкованості пропонується взяти певну стадію побудови досконалої множини Кантора зі змінною фрактальною розмірністю. Дослідження базується на методі інтегральних рівнянь з використанням асимптотичного підходу та формули обернення Карлемана. Отримані асимптотичні формули для визначення основних електромагнітних характеристик та проведені чисельні експерименти по виявленню фрактальних властивостей дофрактальної решітки.

Ключові слова: *ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ, ФРАКТАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ДИФРАКЦІЙНІ РЕШІТКИ, ІНТЕГРВЛЬНІ РІВНЯННЯ.*

(Одержано 01.11.2010, у відредагованій формі – 13.02.2011, опубліковано онлайн – 02.04.2011)

1. ВСТУП

Теорія періодичних дифракційних решіток (ДР) стрічкового типу та різних модифікацій свого часу була ґрунтовно розроблена школою харківських радіофізиків [1-3]. З появою теорії фракталів почалось дослідження так званих «фрактальних» ДР, але термін «фрактал» до сих пір не має чіткого означення і тлумачиться досить вільно. З різноманіття «фрактальних» об'єктів різного роду можна виділити досить широкий їх клас, так званих самоподібних фракталів, для якого можна дати чітке математичне означення, як множини розмірність Хаусдорфа (РХ), якої є строго більшою за її топологічну розмірність [4].

У даній статті розглядаються дофрактальні ДР у вигляді систем стрічок, що розташовуються у відповідності з сегментами, які утворюють певну стадію побудови досконалої множини Кантора (ДМК) зі змінною фрактальною розмірністю [5]. Слід відзначити, що введений термін «дофрактальні» ДР передбачає не нескінченну послідовність елементів дифракційної решітки по правилу вибраного фракталу, а, в першу чергу, їх обмежену кількість. Тому цей термін можна тлумачити також як усічений, редукований, вкорочений фрактал, майже фрактал або квазіфрактал. При цьому постановка електродинамічної задачі є класично строгою в рамках певних традиційних припущень [6]. Метою даної статті є розв'язок крайової задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі на скінченній дофрактальній послідовності елементів решітки та детальний аналіз розсіяних полів для асимптотичного випадку моделі слабко наповнених ДР.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На систему з певної скінченої кількості нескінченно тонких та ідеально провідних циліндричних стрічок з паралельними краями набігає плоска електромагнітна хвиля. Розташування стрічок у системі має бути строго впорядкованим у відповідності з різними математичними законами, що відповідають процесам побудови ДМК зі змінною РХ. Тому слід деталізувати постановку задачі з відображенням вказаної нової математичної впорядкованості розташування стрічок.

Оскільки твірні стрічок є паралельними, то рівняння Максвелла розподіляються на дві незалежні системи рівнянь відносно виділених компонент електричного та магнітного полів. Їх розв'язання приводить до двовимірного рівняння Гельмгольца та двох типів граничних умов на елементах напрямних розсіювача. З математичної точки зору маємо зовнішні задачу Діріхле (E-поляризація) та задачу Неймана (H-поляризація) для вказаного рівняння. Ці задачі мають єдиний розв'язок при виконанні умови випромінювання на нескінченості (за Зоммерфельдом) та умов у граничних точках дуг за формою Мейкснера [7].

Для дослідження сформульованих вище зовнішніх граничних задач математичної фізики застосовуємо класичний метод інтегральних рівнянь(ІР), який не тільки зменшує розмірність задачі, але й переводить зовнішню задачу математичної фізики до розв'язання ІР на відповідній обмеженій кількість гладких дуг, що значно спрощує проблему. Окрім того, ІР є більш зручними математичними моделями у порівнянні з крайовими чи граничними задачами для диференціальних рівнянь у частинних похідних по відношенню до їх чисельного розв'язання на ЕОМ та асимптотичного аналітичного розв'язку.

Першою і єдиною у цій статті розглядаємо зовнішню задачу Діріхле для двовимірного рівняння Гельмгольца, що відповідає задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі у якої вектор напруженості електричного поля паралельний твірній стрічок (E-поляризація).

Використавши фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца для двовимірного вільного простору та метод ІР отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^{1} j_m(t) H_0^{(1)}\left(\left|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)\right|\right) dt = \frac{2i}{\pi} \exp[i \cdot q_1 \cdot x_\ell^n(\tau)], \ell = 1, \ldots, 2^n . \qquad (1)$$

Тут $H_0^{(1)}(z)$ — функція Ханкеля першого роду з нульовим порядком (індексом), функції $x_m^n(t)$ є вихідними змінними процесу побудови ДМК зі змінною РХ, q_1 – перша складова напрямного вектора плоскої хвилі. Щоб надати цій системі, яка є основною математичною моделлю процесу розсіювання, зупинимось далі на процесі побудови ДМК зі змінною РХ, що тут буде використовуватись.

3. ПРОЦЕС ПОБУДОВИ ДМК ЗІ ЗМІННОЮ РХ

Характерною рисою досконалої множини Кантора є простота початкового об'єкта та ітераційний принцип творення. Її побудову починаємо з сегмента довжиною $2a$. З його середини відберемо інтервал довжиною $2b$, звісно $a > b$. Отримані два сегменти назвемо утворювачем даної множини, чи її першою стадією побудови. На рисунку 1 показано початковий сегмент

(чорна лінія на осі абсцис) та три стадії побудови: два сегменти першої стадії зображені червоним кольором.

Щоб об'єкт був самоподібним, зменшуємо утворювач до розміру окремого його сегмента і заміщуємо їх. При цьому отримаємо чотири сегменти, зменшені від попередніх у $\kappa = 2a/(a-b) > 2$ разів, які зображені на рисунку 1 чорним кольором на рівні $y = 0.2$. Зокрема, коли $b = a/3$ маємо $\kappa = 3$, тобто коефіцієнт самоподібності класичної ДМК.

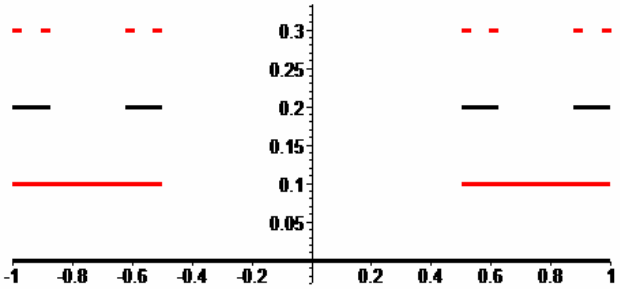

***Рис. 1** – Стадії побудови ДМК з РХ 0.5*

Наступний крок – перехід до третьої стадії побудови фракталу – ще одне зменшення утворювача у κ разів і заміщення сегментів другої стадії, приводить до восьми сегментів, зображених червоним кольором на рівні $y = 0.3$. Коли продовжити цей процес необмежено, то утвориться досконала множина дещо відмінна від класичної, яка є її частинним випадком. Тому можна вести мову про цілий клас досконалих множин, що залежать від коефіцієнта самоподібності к.

Обчислення розмірності Хаусдорфа, подібно до класичної ДМК, приводить до виразу $\ln 2/\ln\kappa$. Дійсно, при побудові на n-тому кроці маємо 2^n інтервалів довжиною $(a-b)/\kappa^{n-1}$ кожний. Тоді мінімальним δ-покриттям з $\delta = (a-b)/\kappa^{n-1}$ буде покриття з 2^n елементів, тобто

$$H^s_{\frac{a-b}{\kappa^{n-1}}} = \sum_{i=1}^{2^n} |U_i|^s = 2^n \cdot \left|\frac{a-b}{\kappa^{n-1}}\right|^s = \frac{2^n}{\kappa^{(n-1)s}}(a-b)^s \cdot$$

Звідси граничний перехід $\delta = (a-b)/\kappa^{n-1} \to 0$ тільки у випадку $2/\kappa^s = 1$ дає відмінне від нескінченності та нуля значення хаусдорфової s-міри [8]. Для визначення критичного значення s, яке і є розмірністю Хаусдорфа, логарифмуємо тотожність $2 \equiv \kappa^s$. В результаті отримаємо зазначений вираз $s = \ln 2/\ln\kappa$. Оскільки коефіцієнт само подібності κ є більшим за двійку, то розмірність Хаусдорфа досконалої множини змінюється в інтервалі (0, 1).

Завдяки самоподібності процес побудови можна досить просто формалізувати математично лінійними функціями, що є важливим для надання конкретності рівнянням (1). Зокрема, перша стадія побудови з урахуванням нормування на довжину хвилі (два сегменти відносного розміру 2α, розташовані на відносній відстані $2(\beta - \alpha)$ один від одного) може бути задана функціями $x^1_m(t) = (-1)^m \cdot \beta + \alpha \cdot t$, $m = 1.2$. Сегменти другої стадії побудови ДМК формалізуються функціями $x^2_m(t) = (-1)^m \cdot (\beta + \beta_2) + \alpha_2 \cdot t$

для $m = 1.4$ та $x_m^2(t) = (-1)^m \cdot (-\beta + \beta_2) + \alpha_2 \cdot t$ для $m = 2.3$, де $\beta_2 = \beta/\kappa$, $\alpha_2 = \alpha/\kappa$, $\kappa = 1 + \beta/\alpha > 2$. Для довільного натурального числа n, що визначає стадію побудови, маємо впорядковану послідовність функцій $x_m^n(t)$, де нижній індекс m = 1, ..., 2^n.

Систему сингулярних ІР (1) можна вважати основною математичною моделлю процесу розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі з плоскою дофрактальною решіткою.

4. АСИМПТОТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗСІЮВАННЯ Е-ПОЛЯРИЗОВАННОЇ ХВИЛІ ДОФРАКТАЛЬНОЮ ДР

Під час творення ДМК параметр α_n зменшується не менше ніж удвічі при переході від деякої стадії побудови до наступної. Тому починаючи з певної стадії творення його можна вважати настільки малим наскільки це потрібно і таким чином можна розраховувати на ефективність асимптотичної моделі вузьких стрічок, чи точніше слабко наповненої ДР.

Оскільки $x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t) = \rho_{\ell m} + \alpha_n(\tau - t)$, де $\rho_{\ell m} = x_\ell^n(0) - x_m^n(0)$ за абсолютною величиною є відстанню між центрами стрічок з номерами ℓ та m, то знехтувавши доданками, що мають перший порядок малості відносно α_n приходимо до системи сингулярних ІР з явно виділеною логарифмічною особливістю

$$\int_{-1}^{1} j_\ell(t) \ln|\tau - t|\, dt + \sum_{m=1}^{2^n} j_m \cdot R_{\ell m} = \exp[i \cdot q_1 \cdot x_\ell^n(0)],\ \ell = 1, \ldots, 2^n. \qquad (2)$$

Тут недіагональні коефіцієнти $R_{\ell m} = \pi H_0^{(1)}\left(|\rho_{\ell m}|\right)/2i$, $\ell \neq m$ а на діагоналі – $R_{\ell\ell} = \ln(\gamma\alpha_n/2i)$. Скориставшись відомою формулою обернення Т. Карлемана отримаємо векторне рівняння наступного типу:

$$\vec{j}(t) = \frac{\Re_n \cdot \vec{j} - \vec{q}_n}{\pi\sqrt{1 - t^2}\ln 2} \qquad (3)$$

Тут вектор-функція $\vec{j}(t)$ складена з компонент невідомих функцій $j_m(t)$; $\Re_n$ – відома матриця відповідного розміру, елементи якої $R_{\ell m}$ наведені вище; $\vec{j} = \int_{-1}^{1} \vec{j}(t)dt$, $\vec{q}_n = \vec{q}_n(\varphi_0)$ – відомий вектор-стовпчик, складений з правих частин системи (2) $\exp[i \cdot \cos\phi_0 \cdot x_\ell^n(0)]$, φ_0 кут під яким набігає плоска хвиля на решітку.

Щоб знайти невідомий вектор $\vec{j}$, візьмемо інтеграли від обох частин векторного рівняння (3), тоді виникне система лінійних алгебраїчних рівнянь, що має наступну матричну форму:

$$(\Re_n - \ln 2 \cdot E_n)\vec{j} = \vec{q}_n. \qquad (4)$$

де E_n – одинична матриця, при цьому шукана вектор-функція має наступний вигляд:

$$\vec{j}(x) = \vec{j} \,/\, \pi\sqrt{1 - x^2}\ .$$

Отже, з математичної точки зору, задачу розсіювання плоскої електромагнітної хвилі системою стрічок, що утворює дофрактальну ДГ, у рамках зроблених припущень можна вважати вирішеною. Далі перейдемо до чисельних експериментів по визначенню однієї з основних характеристик – діаграми спрямованості, яка допоможе виявити фрактальні властивості ДФДГ.

5. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДІАГРАМ СПРЯМОВАНОСТІ

Після математичного розв'язку задачі, розсіяне електромагнітне поле навколо розсіювача можна подати за допомогою функції, що визначається сумою інтегральних перетворень розв'язку $j_\ell(t)$ [6]:

$$\upsilon(x,y) = -\frac{i}{4}\sum_{\ell=1}^{2n}\int_{-1}^{1} j_\ell(t)H_0^{(1)}(\sqrt{(x-x_\ell(t))^2+y^2})dt\ .$$

Звідси за відомою схемою отримують розсіяне електромагнітне поле у дальній зоні, яке має значний фізичний інтерес [6]. За звичай при геометричній презентації цієї характеристики будують графіки коефіцієнта [6, 7] $A(\varphi) = -0.5\sqrt{i}\cdot\sum_{\ell=1}^{2n} j_\ell(\cos\varphi)$, де капелюшок над літерою позначає перетворення Фур'є, який характеризує розподіл поля у далекій зоні в залежності від полярного кута. У випадку асимптотичної моделі $A(\varphi) = -\sqrt{i}\,[\vec{q}_n^{\,T}(-\cos\varphi), \vec{j}\,]/2\sqrt{2\pi}$. Чисельний експеримент проводиться з метою виявлення фрактальних властивостей ДГ. Щоб це зробити порівнюємо графіки залежності $|A(\varphi)|$ від полярного кута для ДГ, що відповідають сусіднім стадіям творення ДМК. На рисунку 2 наведені для значення $\varphi_0 = \pi/2$ діаграми спрямованості ДГ, що відповідають першій (суцільна лінія, $n = 1$) та другій стадіям творення ДМК з РХ 0.2 (для всіх $\alpha = \beta/31$). Тут слід вказати на те, що поперечний розмір ДГ є близьким до довжини хвилі.

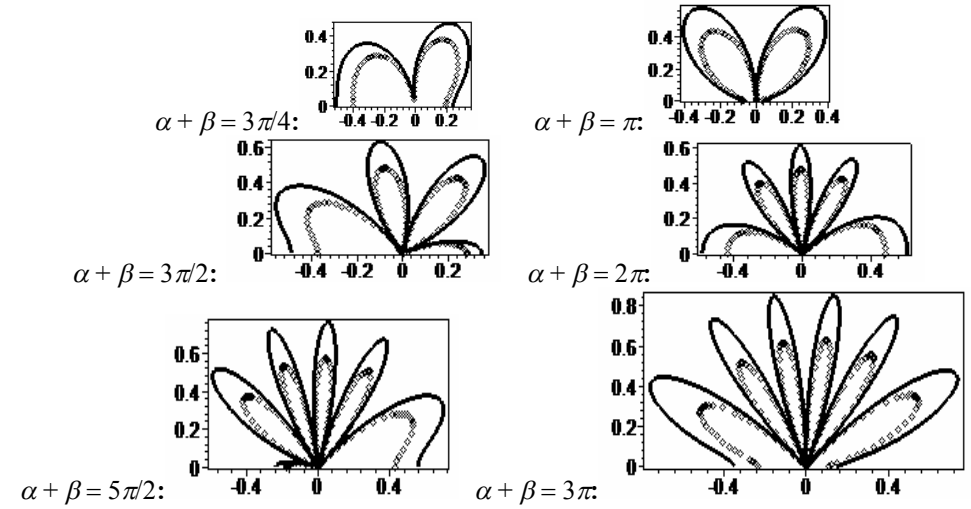

Рис. 2 *– Діаграми спрямованості дофрактальної решітки, що відповідає першій та другій стадіям творення ДМК ($\alpha = \beta/31$)*

В межах припущень асимптотичної моделі форми діаграм спрямованості для різних n однакові, хоча є відміна в розмірах, бо маємо різне наповнення ДФДР. Коли перейти до третьої стадії творення, розмір буде ще меншим, але форма не зміниться. Це свідчить про те, що форма діаграми спрямованості є загальною властивістю для всіх ДФДР починаючи з першої стадії творення, але тільки для вказаних співвідношень між довжиною хвилі та початкових геометричних параметрів. Зі зменшенням довжини хвилі все більше проявляються окремі елементи першої стадії творення, у той час як окремі елементи другої стадії ще не відчутні. Коли далі зменшувати довжину хвилі, то параметр α перестає бути малим і випадок $n=1$ вже виходить за межі дії даної асимптотичної моделі, але параметр $\alpha_2 = \alpha/\kappa$ залишається малим і випадок $n=2$ ще дає впевнені результати. Тому переходимо до порівняння його з випадком $n=3$ – наступною (третьою) стадією творення ДМК. Тут вже проявляються окремі елементи другої стадії творення, а окремі елементи третьої стадії ще не відчутні. На рисунку 3 наведені діаграми направленості ДФДР, що відповідають другій (темна лінія) та третій (червона лінія) стадіям творення ДМК з тією ж РХ 0.2 та з тим же співвідношенням $\alpha = \beta/31$.

Зазначимо, що тут поперечний розмір ДР значно перевищує довжину хвилі, але решітка, що відповідає другій стадії, має дві досить віддалені підрешітки (на рисунку 1 вони зображені чорним кольором на рівні $y=0.2$), поперечний розмір яких, що визначається параметром α, є близьким до довжини хвилі.

Проведені чисельні експерименти з обчисленням однієї з основних характеристик ДР – її діаграми спрямованості, показують на можливість виявляти фрактальні властивості дофрактального об'єкта за допомогою цієї характеристики.

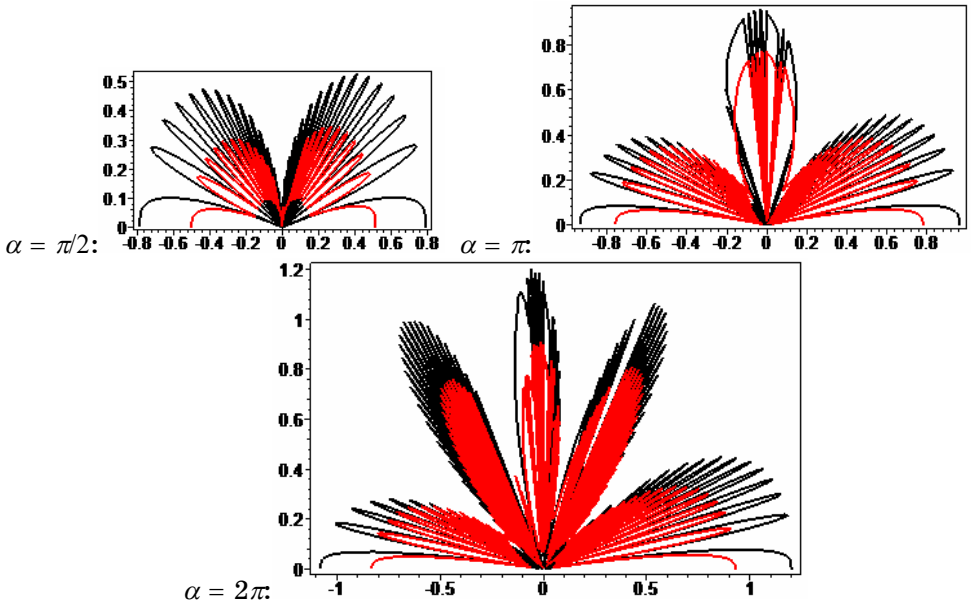

Рис. 3 *– Діаграми спрямованості дофрактальної решітки, що відповідає другій та третій стадіям творення ДМК ($\varphi_0 = \pi/2$)*

6. ВИСНОВКИ

В роботі детально досліджується асимптотична модель процесу взаємодії плоскої E-поляризованої хвилі зі слабко наповненою дофрактальною решіткою. Для математичної впорядкованості напрямних ДР пропонується взяти певну стадію побудови досконалої множини Кантора зі змінною розмірністю Хаусдорфа, що визначається виразом $\ln 2/\ln \kappa$. Дослідження проводиться на основі строгої електромагнітної теорії за методом інтегральних рівнянь з використанням асимптотик та формули обернення Карлемана. Отримані асимптотичні вирази вихідних змінних математичної моделі за якими визначається одна з основних характеристик – діаграма направленості дофрактальної решітки, що виявляє фрактальні властивості ДР.

INTERACTION OF E-POLARIZED WAVE WITH PREFRACTAL WEAKLY FILLED DIFFRACTION GRATINGS (an asymptotical model)

***G.I. Koshovy*[1], *O.O. Shmat'ko*[2]**

[1] National Aerospace University "KhAI",
17, Chkalov Str., 61070, Kharkov, Ukraine
E-mail: gikosh@gmail.com

[2] V.N. Karazin Kharkiv National University,
4, Svobody Sq. 61077, Kharkov, Ukraine
E-mail: alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua

An asymptotical model of E-polarized electromagnetic wave interaction with weakly filled prefractal diffraction grating (PFDG) is considered in details on the base of rigorous electromagnetic theory. A stage of construction for Cantor set with variable Hausdorff dimension is used for PFDG order. An integral equation technique with usage of asymptotical approach and Carleman inversion formula is applied. Asymptotical formulas for determination of the main electromagnetic characteristics are obtained. Numerical experiments are done to find the fractal properties of the prefractal grating.

Keywords: *ELECTROMAGNETIC WAVES, FRACTAL MODELING, DIFFRACTION GRATINGS, INTEGRAL EQUATIONS.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ E ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ С ДОФРАКТАЛЬНОЙ СЛАБО НАПОЛНЕННОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ (асимптотическая модель)

***Г.И. Кошевой*[1], *А.А. Шматько*[2]**

[1] Национальный аэрокосмический университет "ХАИ"
ул. Чкалова 17, 61070, Харьков, Украина
E-mail: gikosh@gmail.com

[2] Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
пл. Свободы 4, 61077, Харьков, Украина
E-mail: alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua

На основе строгой электромагнитной теории проводится детальное исследование асимптотической модели процесса взаимодействия плоской E-поляризованной волны со слабо наполненной дофрактальной дифракционной решеткой. Для математического упорядочения предлагается взять некоторую стадию построения совершенного множества Кантора с изменяемой фрактальной размерностью. Исследование основано на методе интегральных уравнений с применением асимптотического подхода и формулы обращения Карлемана. Получены асимптотические формулы для определения основных электромагнитных характеристик и проведены численные эксперименты по определению фрактальных свойств дофрактальной решетки.

***Ключевые слова**: ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, ФРАКТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ДИФРАКЦИОННЫЕ РЕШЕТКИ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. В.П. Шестопалов, *Метод задачи Римана-Гильберта* (Харьков: Изд-во ХГУ: 1971).
2. В.П. Шестопалов, Л.Н Литвиненко, С.А. Масалов, В.Г. Сологуб, *Дифракция волн на решетках*(Харьков: Изд-во ХГУ: 1973).
3. В.П. Шестопалов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов, Ю.К. Сиренко, *Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решетки* (К.: Наук. Думка: 1986).
4. Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы* (М.: Институт Компьютерных Исследований: 2002).
5. Г.И. Кошевой, *Электромагнитные волны и электронные системы* **12** №11, 28 (2007).
6. Г.І. Кошовий, *Радиофизика и електроника* **12**, 3 (2007) (G.I. Koshovy, *Telecommun. Radio Eng.* **67**, 1321 (2008)).
7. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, *Теория дифракции* (М.: Мир: 1964).
8. А.Д. Морозов, *Введение в теорию фракталов*. (М.: Институт Компьютерных Исследований: 2002).