

PACS numbers: 05.45. – а, 05.70. – а, 89.75.Fb, 02.30.Oz

## ФОРМУВАННЯ ЧАСОВИХ ДИСИПАТИВНИХ СТРУКТУР ПРИ НЕРІВНОВАЖНИХ ПЕРЕХОДАХ

А.В. Дворниченко<sup>1</sup>, А.О. Васильєв<sup>1</sup>, В.О. Харченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова 2, 40007, Суми, Україна  
E-mail: [alina\\_dv84@mail.ru](mailto:alina_dv84@mail.ru)

<sup>2</sup> Інститут прикладної фізики НАН України,  
вул. Петропавлівська 58, 40030, Суми, Україна

*Досліджено процеси формування дисипативних структур при нерівноважних фазових переходах. Модель розглянута у припущенні наявності дисперсії часу релаксації параметра порядку та впливу додаткових зовнішніх збурень, що моделюються потенціалом складки. Показано, що результатом самоорганізації, яка проходить за сценарієм біфуркації Андронова-Хопфа, є виникнення дисипативних структур, які представляються граничними циклами у фазовому просторі. Аналіз системи проведено за допомогою дослідження показників стійкості та показника Флоке. Встановлено, що в системі спостерігається реверсивна картина впорядкування з утворенням часової дисипативної структури.*

**Ключові слова:** *НЕРІВНОВАЖНИЙ ФАЗОВИЙ ПЕРЕХІД, ДИСИПАТИВНА СТРУКТУРА, БІФУРКАЦІЯ АНДРОНОВА-ХОПФА, ГРАНИЧНИЙ ЦИКЛ, ПАРАМЕТР ПОРЯДКУ.*

*(Одержано 01.02.2011, у відредагованій формі – 13.02.2011,  
опубліковано онлайн – 02.04.2011)*

### 1. ВСТУП

Сучасне подання нарівноважних процесів являє собою одну з найбільш цікавих ланок в області теоретичної фізики. Одним із центральних питань є визначення впливу детермінованої зовнішньої дії на процеси формування структур та самоорганізації в цілому [1-7]. Під самоорганізацією розуміють якісну зміну колективної поведінки нелінійних динамічних систем, в результаті якої формуються стійкі просторово-часові (дисипативні) структури, що визначаються колективною модою гідродинамічного характеру [1, 2, 8, 9]. Дослідження систем, що самоорганізуються, та процесів, що в них протікають, пов'язано з вивченням закономірностей просторово-часового впорядкування в системах різноманітної природи. Найпростішими фізичними прикладами самоорганізації є фазові переходи. Їх опис ґрунтується на термодинамічній схемі – термостат може впливати на виділену підсистему, але вона, в силу своєї малості, не змінює стан термостата. Однак, принципова відмінність процесів самоорганізації полягає в тому, що виділення малої підсистеми з термостата стає неможливим у зв'язку з тим, що всі ступені вільності, які зводяться до параметра порядку, спряженого поля та керуючого параметра, стають рівноправними. Типовим прикладом такої системи є оптично-бістабільна система (лазер). В ній вказані моди визначають амплітуду індукованого

поля, електричну поляризацію середовища та інверсну заселеність електронних рівнів, відповідно. Така система є відкритою та описується самоузгодженим представленням поведінки вказаних ступенів вільності. В результаті процес самоорганізації зводиться до імпульсного випромінювання заданої амплітуди та/або частоти (формування часової дисипативної структури).

Більшість фізичних систем, які реалізуються в природі, знаходяться під зовнішньою дією та відхиляються від стану рівноваги. При чому, при певних інтенсивностях такої дії залежність параметрів системи від зовнішніх умов стає стрибкоподібною. Характерно, що при такій стрибкоподібній зміні спостерігається когерентна поведінка окремих елементів системи (самоорганізація), що супроводжується утворенням часових, просторових, чи просторово-часових структур. Такий різкий перехід до нового стану нагадує фазовий перехід у випадку термодинамічної рівноваги, а відповідну стрибкоподібну зміну стану нерівноважної системи називають кінетичним, або нерівноважним фазовим переходом [1-5]. У математичному сенсі якісна перебудова поведінки фізичної системи спостерігається у точках біфуркації. Внаслідок таких біфуркацій в системі може виникати перехід з одного стаціонарного стану в інший, в ній можуть виникнути стійкі коливальні процеси, зміна періоду коливань, виникнути хаотичний режим поведінки і т.д. Вивчення процесів утворення стійких структур у нерівноважних системах є предметом дослідження теоретичної фізики, починаючи з 70-х років минулого століття та залишається актуальним до теперішнього часу.

Метою даної роботи є дослідження впливу двох додаткових нелінійностей, що виникають у синергетичній системі внаслідок різних фізичних процесів, на процеси часового впорядкування, результатом якого є виникнення часової дисипативної структури. У роботі на основі узагальненої моделі Лоренца-Хакена, що самоузгодженим чином описує нерівноважні переходи в оптично-бістабільних системах [1], в системах дефектів у твердому тілі [10, 11], полімерних та соціо-економічних системах [12], буде проаналізовано можливість формування часових дисипативних структур при нерівноважних фазових переходах. Буде проаналізовано сумісний вплив додаткових збурень, що накладаються на зміну параметра порядку, та нелінійної залежності часу релаксації параметра порядку на характер нерівноважних переходів та процеси часового впорядкування таких систем. Використовуючи теоретичний підхід, оснований на аналізі показника Флоке, буде знайдено умови встановлення когерентної поведінки повільних мод системи та визначено домінуючий внесок, що індукує часове впорядкування.

Структура роботи є такою. У розділі 2 представлено модель досліджуваної системи, враховуючи дисперсію часу релаксації параметра порядку та модель сили, що задає зовнішній вплив. У розділі 3 представлено схему теоретичного дослідження умов виникнення дисипативної структури. У розділі 4 аналізуються різні режими поведінки системи і встановлюються області параметрів прояву когерентної поведінки основних мод. Розділ 5 містить основні висновки.

## 2. МОДЕЛЬ СИНЕРГЕТИЧНОЇ СИСТЕМИ

З математичної точки зору, найпростішою моделлю для опису ефектів самоорганізації є система Лоренца-Хакена, записана у вигляді [1]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\eta}{\tau_\eta} + g_\eta h \\
 \frac{dh}{dt} &= -\frac{h}{\tau_h} + g_h \eta S \\
 \frac{dS}{dt} &= \frac{(r-S)}{\tau_S} - g_S \eta h
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тут  $\tau_\eta$ ,  $\tau_S$ ,  $\tau_h$  – часи релаксації параметра порядку  $\eta(t)$ , спряженого йому поля  $h(t)$  та керуючого параметра  $S(t)$ , відповідно;  $g_\eta$ ,  $g_S$ ,  $g_h$  – позитивні константи зворотного зв'язку;  $r$  – параметр зовнішньої накачки. Перші доданки системи (1) враховують ефекти дисипації, властиві синергетичним системам. Зв'язок між параметром порядку та спряженим полем є лінійним (перше рівняння), в той час як еволюція і спряженого поля  $h(t)$ , і керуючого параметра  $S(t)$  задається нелінійними зворотними зв'язками (друге та третє рівняння, відповідно). Принциповим є те, що позитивні зворотні зв'язки, які забезпечуються константами  $g_\eta$  та  $g_h$  приводять до збільшення спряженого поля, індукуючи самоорганізацію. Згідно з принципом Ле-Шател'є ці позитивні зворотні зв'язки компенсуються негативним, який приводить до зменшення керуючого параметра. Розглядаючи синергетичні системи, які мають фізичну реалізацію, вважають, що зміна спряженого поля  $h$  відбувається набагато швидше ніж параметра порядку  $\eta$  та керуючого параметра  $S$  [1]. Таке припущення справедливе при описі системи твердотілого лазера [13]. дозволяє використати принцип адіабатичного наближення, поклавши  $\tau_h \ll (\tau_S, \tau_\eta)$ , згідно з яким можна знехтувати лівою частиною другого рівняння в системі (1). В результаті отримуємо зв'язок  $h = \tau_h g_h \eta S$ , який приводить до системи двох диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\eta}{\tau_\eta} + \tau_h g_h g_\eta \eta S \\
 \frac{dS}{dt} &= \frac{(r-S)}{\tau_S} - \tau_h g_h g_S \eta^2 S
 \end{aligned} \tag{2}$$

Для подальшого аналізу системи (2) зручно перейти до знерозмірених змінних. Такий перехід досягається завдяки вимірюванню часу  $t$ , параметра порядку  $\eta$ , спряженого поля  $h$ , та керуючого параметра  $S$  у наступних одиницях:  $\tau_\eta$ ,  $\eta_e = (g_h g_S)^{-1/2}$ ,  $h_e = (g_\eta^2 g_h g_S)^{-1/2}$ , та  $S_e = (g_\eta g_h)^{-1}$ . В такому разі, опускаючи індекс, система (2) набуде вигляду,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\eta}{dt} &= -\eta(1-S) \\
 \frac{dS}{dt} &= \varepsilon^{-1} [r - S(1+\eta^2)]
 \end{aligned} \tag{3}$$

де  $\varepsilon = \tau_S / \tau_\eta$ . Система (3) записана у припущенні лінійної релаксації параметра порядку  $\eta$ . Однак, більш реальна картина відповідає нелінійним

процесам релаксації, враховуючи які, для часу релаксації параметра порядку  $\tau_\eta$  приймемо зв'язок [14]:

$$\tau_\eta(\eta) = 1 - \frac{\kappa}{1 + (\eta/\eta_\tau)^2 + \kappa}, \quad (4)$$

де  $\kappa$  та  $\eta_\tau$  – позитивні константи, що відіграють роль параметра дисипації та інтенсивності насичення, відповідно. Такий вид залежності  $\tau_\eta(\eta)$  ґрунтується на незалежності часу релаксації від зміни знаку параметра порядку. Окрім того, зв'язок (4) має практичне застосування, а саме, він моделює дію оптичного фільтру, уведеного до резонатора оптично-бістабільної системи (наприклад твердотільного лазера), що забезпечує встановлення режиму стійкого періодичного випромінювання [14]. Використовуючи залежність (4), перше рівняння (3) доповнюється нелінійною складовою  $f_\kappa = -(\kappa\eta)/[1 + (\eta/\eta_\tau)^2]$ .

З іншого боку, утворення часової дисипативної структури, що на фазовій площині представляється стійким граничним циклом, як правило, є результатом біфуркації Андронова-Хопфа. Згідно із теоремою Хопфа, до такої біфуркації може привести дія зовнішнього потенціалу. У зв'язку з цим, систему (3) узагальнимо введенням додаткових збурень, що моделюються потенціалом  $V_e$ . Згідно із стандартною теорією катастроф, такий потенціал дається трьома типами катастроф [15]. У загальному випадку, маємо

$$V_e = A\eta + \frac{B}{2}\eta^2 + \frac{C}{3}\eta^3 + \frac{D}{4}\eta^4 + \frac{E}{5}\eta^5, \quad (5)$$

де  $A, B, C, D, E$  – параметри теорії. Так, для катастрофи  $A_2$  (складки) маємо  $B = D = E = 0$ , для катастрофи  $A_3$ :  $C = E = 0$  і для катастрофи  $A_4$ :  $D = 0$ . В даній роботі для зовнішнього потенціалу приймемо найпростіший випадок катастрофи  $A_2$ , що передбачає введення до першого рівняння системи (3) додаткової нелінійності  $f_e = -d_\eta V_e(\eta)$  [16]. Отже, використовуючи всі вище наведені припущення, узагальнена синергетична система приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\eta(1 - S) + f_\kappa(\eta) + f_e(\eta) \\ \frac{dS}{dt} &= \varepsilon^{-1} [r - S(1 + \eta^2)] \end{aligned}, \quad (6)$$

а варіація параметрів у доданках  $f_\kappa(\eta)$  та  $f_e(\eta)$  може індукувати зміну топології атрактора у фазовому просторі.

### 3. АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ СТІЙКОСТІ БАГАТОВИДУ

Для дослідження умов самоорганізації системи (6) з утворенням часової дисипативної структури будемо використовувати алгоритм біфуркації народження граничного циклу [17]. Даний алгоритм дозволяє знайти умови виникнення граничного циклу та визначити його стійкість. Згідно з цією процедурою, знайдемо стаціонарні стани системи  $\eta_0$  та  $S_0$ , що

визначають положення нерухомих точок на фазовій площині  $(S, \eta)$ . Покладаючи ліві частини системи (6) рівними до нуля ( $d\eta/dt = 0$  та  $dS/dt = 0$ ), отримуємо рівняння на стаціонарні стани у вигляді

$$\eta_0 \left( \frac{r}{1 + \eta_0^2} - \frac{\kappa}{1 + (\eta_0/\eta_\tau)^2} - 2C\eta_0 - 1 \right) = A, \quad S_0 = r(1 + \eta_0)^2. \quad (7)$$

Поведінка фазової траєкторії в околі нерухокої точки  $(S_0, \eta_0)$  описується за допомогою лінійного аналізу на стійкість. Для цього залежність від часу кожної динамічної змінної в околі такої точки представляється у вигляді  $x \sim e^{\Lambda t}$ , де  $x \equiv \{\eta, S\}$ ,  $\Lambda = \lambda + i\varpi$ ,  $\lambda$  визначає стійкість нерухокої точки,  $\varpi$  – частоту коливань в її околі [18]. Дійсна та уявна частини показника стійкості  $\Lambda$  розраховуються за допомогою матриці стійкості  $M_{ij} \equiv (\partial_{ij} f^{(i)})_{x_j = x_{j0}}$ , де  $f^{(i)} \equiv \{d\eta/dt, dS/dt\}$ ,  $x_j \equiv \{\eta, S\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , індекс 0 відноситься до стаціонарного стану [19]. Вирази для  $\lambda$  та  $\varpi$  визначаються з рівняння на власні значення та вектори і набувають вигляду

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ (S_0 - M_0) - \varepsilon^{-1} (1 + \eta_0^2) \right], \quad (8)$$

$$\varpi = \frac{1}{2} \sqrt{8\varepsilon^{-1} S_0 \eta_0^2 - \left[ (S_0 - M_0) + \varepsilon^{-1} (1 + \eta_0^2) \right]^2},$$

де введено позначення  $M_0 = 1 + 2C\eta_0 + \kappa[1 - (\eta_0/\eta_\tau)^2]/\kappa[1 + (\eta_0/\eta_\tau)^2]^2$ .

Умовами виникнення часової дисипативної структури, що має вигляд стійкого граничного циклу на фазовому портреті, є позитивність дійсної частини показника стійкості  $\lambda > 0$ , що забезпечує віддалення фазової траєкторії від нерухокої точки; відмінне від нуля значення уявної частини показника стійкості  $\varpi \neq 0$ , що визначає частоту коливань, та виконання умови стійкості граничного циклу за показником Флоке [14], що для досліджуваної системи (6) забезпечується виконанням нерівності

$$2\alpha(\psi_\kappa - C)^2 + \alpha\beta\varepsilon S_0(1 + 2\beta\varepsilon\eta_0) + \varpi|_{\lambda=0}(\varphi_\kappa + \beta\varepsilon) \leq (C - \psi_\kappa)(\alpha^2 - 1 + 2\beta\varepsilon S_0 + 2\alpha\beta\varepsilon\eta_0). \quad (9)$$

Тут використано позначення:

$$\alpha = \frac{M_0 - S_0}{\varpi|_{\lambda=0}}, \quad \beta = \frac{\eta_0}{\varepsilon\varpi|_{\lambda=0}}, \quad \psi_\kappa = -2 \frac{\kappa\eta_\tau^2\eta_0(\eta_0 - 3\eta_\tau^2)}{(\eta_0^2 + \eta_\tau^2)^2},$$

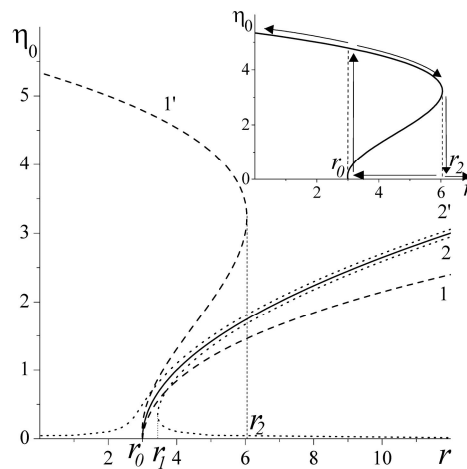
$$\varphi_\kappa = 6\kappa\eta_\tau^2 \left[ 1 - \frac{8\eta_\tau^2\eta_0^2}{(\eta_0^2 + \eta_\tau^2)^4} \right].$$

#### 4. ЗМІНА РЕЖИМІВ ПОВЕДІНКИ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ДВОКОМПОНЕНТНОЇ СИСТЕМИ

Спочатку розглянемо поведінку стаціонарного значення параметра порядку  $\eta_0$  в залежності від параметра зовнішньої накачки  $r$  при фіксованих значеннях інших параметрів системи. Для простоти покладемо значення

інтенсивності насичення в залежності часу релаксації параметра порядку (4)  $\eta_r = 1.0$ . Відповідна біфуркаційна діаграма наведена на рис. 1.

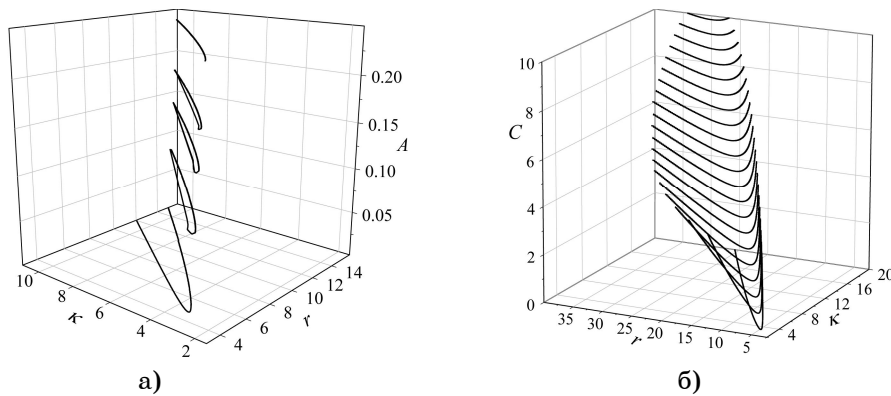
Тут суцільна крива відповідає випадку відсутності додаткових збурень ( $A = C = 0$ ) і показує, що на малих значеннях параметра зовнішньої накачки система характеризується єдиним тривіальним стаціонарним станом  $S_0^{(1)} = r$ ,  $\eta_0^{(1)} = 0$ . У випадку подолання енергетичного бар'єру  $r_0 = \kappa + 1$  в системі відбувається біфуркація народження двох нових розв'язків:  $\eta_0^{(2,3)} = \pm\sqrt{r - \kappa - 1}$  та  $S_0^{(2,3)} = r/(r - \kappa)$  (нерівноважний перехід другого роду). Штрихові криві ілюструють вплив параметра  $C$  при  $A = 0$ , пунктирні – вплив  $A$  при  $C = 0$ . З рисунка видно, що у випадку  $A = 0$  та  $C = 0.1$ .



**Рис. 1** – Залежність стаціонарного значення параметра порядку  $\eta_0$  від параметра зовнішньої накачки  $r$  при  $C = 0$ ,  $\kappa = 5.0$  та різних значень параметра  $A$ .

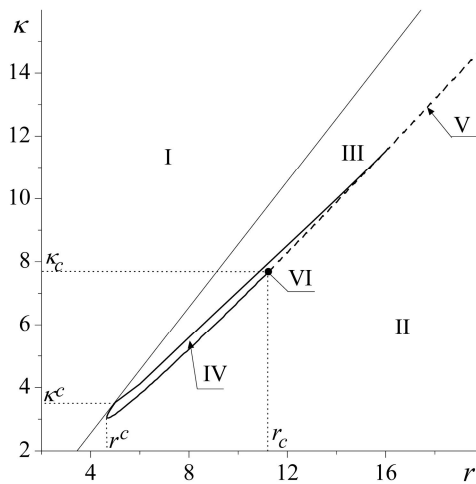
(крива 1) поведінка стаціонарного значення параметра порядку топологічно така ж як і у випадку  $A = C = 0$ . При  $A = 0$  та  $C = -0.1$  (крива 1') маємо гістерезисну поведінку  $\eta_0(r)$ . Тут при збільшенні  $r$  стаціонарне значення  $\eta_0 \neq 0$  стрибком зникає при  $r = r_2$ , в той час, як при зменшенні  $r$  – стрибком з'являється при  $r = r_0$  (нерівноважний перехід першого роду). У випадку  $C = 0$  та  $A = 0.1$  в системі стрибком виникає два стаціонарні стани при подоланні енергетичного бар'єру  $r = r_1$  (крива 2). У випадку  $C = 0$  та  $A = -0.1$  маємо єдине стаціонарне значення параметра порядку на всій вісі параметра зовнішньої накачки (крива 2').

Далі, задовольняючи умові реалізації стійкого граничного циклу в системі (9), побудуємо фазові діаграми, що ілюструють область параметрів формування часової дисипативної структури. Розв'язки нерівності (9) наведено на рис. 2, який ілюструє вплив параметрів зовнішнього потенціалу  $A$  та  $C$  на характер зміни області існування часової дисипативної структури.



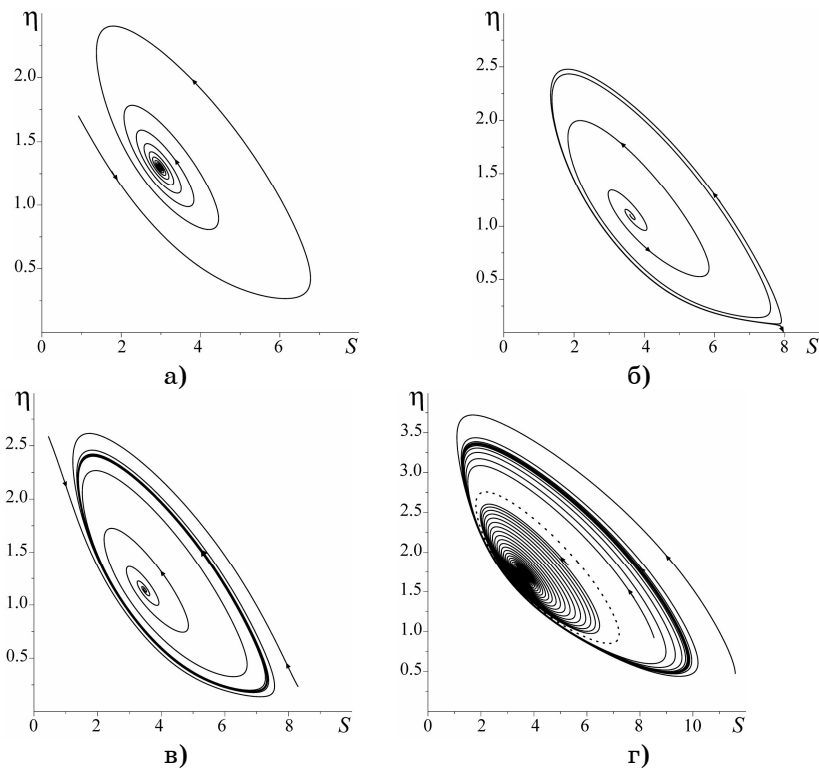
**Рис. 2** – Фазова діаграма: а) вплив параметра  $A$  при  $C = 0$ ; б) вплив параметра  $C$  при  $A = 0$  (дисипативна структура реалізується всередині обмеженої області)

З рис. 2а видно, що у разі  $C = A = 0$  реалізується напівобмежена область значень параметрів системи, при яких фазовий простір характеризується наявністю часової дисипативної структури. При  $C = 0$  та ненульових значеннях параметра  $A$  ця область є обмеженою та суттєво звужується зі збільшенням  $A$ , вироджуючись в однозначну залежність  $\kappa(r)$ . Рисунок 2б ілюструє вплив параметра  $C$  на характер зміни області існування часової дисипативної структури. З нього видно, що збільшення значень  $C$  розширюють таку область, зміщуючи її в бік великих значень параметра дисипації  $\kappa$  та параметра зовнішньої накачки  $r$ . Отже, вплив додаткових лінійних збурень на систему руйнує область параметрів часового впорядкування, в той час як нелінійні збурення збільшують таку область. Розглянемо більш детально фазову діаграму залежності параметра дисипації від параметра зовнішньої накачки, що показано на рис. 3.



**Рис. 3** – Фазова діаграма  $A = 0.1, C = 0$ .

Тут критичні значення параметрів  $\kappa$  та  $r$ , що визначають положення біфуркаційної точки народження стаціонарних станів, показано тонкою суцільною прямою: при перетині прямої в системі стрибком виникає два ненульових стаціонарних стани (див. крива 2, рис. 1). При такому переході за умови  $\kappa < \kappa^c$  верхній стаціонарний стан (див. крива 2 рис. 1) в силу  $\lambda < 0$  і  $\varpi \neq 0$  є стійким фокусом (область II). Фазовий портрет приведено на рис. 4а.



**Рис. 4** – Фазові портрети в різних областях діаграми рис. 3 при  $A=0.1$ ,  $C=0$ :  $\kappa = 5.1$ ,  $r = 8$  (а);  $\kappa = 5.6$ ,  $r = 8$  (б);  $\kappa = 5.5$ ,  $r = 8$  (в);  $\kappa = 9.86$ ,  $r = 14$  (г).

У протилежному випадку, при  $\kappa > \kappa^c$  (область III), такий стан є нестійким фокусом ( $\lambda > 0$ ,  $\varpi \neq 0$ ) (див. фазовий портрет на рис. 4б). Нижній стаціонарний стан (крива 2, рис. 1) є нестійким і на фазовому портреті має вигляд гіперболічної точки – сідла. Суцільна крива, що обмежує область IV визначає критичні значення параметрів біфуркації Андронова-Хопфа: із збільшенням параметра дисипації  $\kappa$  при переході з області II в область IV за умови  $r^c < r < r_c$  в системі реалізується часова дисипативна структура, що має вигляд стійкого граничного циклу (див. рис. 4в). Тут всі фазові траєкторії як зсередини, так і ззовні притягуються багатомодом. Подальше збільшення параметра дисипації приводить до анігіляції стійкого граничного циклу (перехід до області III). При переході з області II в



область IV за умови  $r > r_c$  при значеннях параметрів, що відповідають штриховій кривій, в системі відбувається біфуркація народження напівстійкого граничного циклу, який розпадається на зовнішній стійкий та внутрішній нестійкий. Подальше збільшення параметра дисипації приводить до руйнування нестійкого граничного циклу (перехід до області IV). Отже, вузька область V, що позначена штриховою кривою, визначає значення параметрів системи, за яких разом із стійким граничним циклом існує нестійкий. Тут стаціонарна поведінка системи суттєво залежить від початкових умов, фазовий портрет приведено на рис. 4г. При виконанні умови  $\kappa = \kappa^c$  та  $r = r_c$  фазовий портрет характеризується наявністю вкладених нейтрально стійких граничних циклів нейтральної стійкості, амплітуда та частота яких суттєво залежать від початкових умов. Така картина самоорганізації детально вивчалась в роботі [16].

На рисунку 5 наведено області різноманітної поведінки системи при позитивному та від'ємному значенні параметра  $A$  та фіксованому значенні параметра дисипації (відповідні залежності стаціонарного значення параметра порядку від параметра дисипації представлені кривими 2 та 2' на рис. 1).

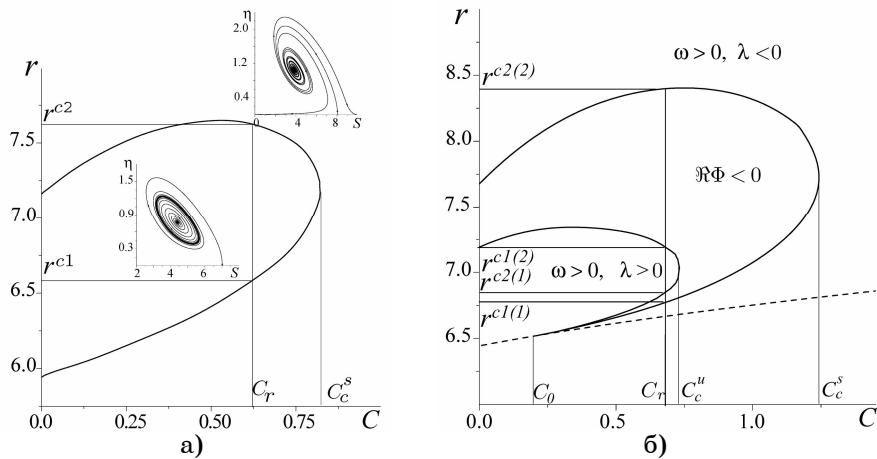


Рис. 5 – Фазова діаграма біфуркації Андронова-Хопфа при  $\kappa = 5.0$ :  $A = -0.1$ (а);  $A = 0.1$ (б).

У випадку  $A = 0.1$  система характеризується єдиним стаціонарним значенням (див. крива 2', рис. 1). На фазовому портреті  $(S, \eta)$  воно є стійким фокусом ( $\lambda < 0, \varpi \neq 0$ ) зовні області, обмеженої суцільною кривою (див. вставку на рис. 5а). При значеннях параметрів системи всередині області в системі реалізується часова дисипативна структура (див. вставку всередині обмеженої області). Область реалізації часової дисипативної структури, наведена на рис. 5а, існує до критичного значення  $C = C_c^s$ . При  $C = C_r < C_c^s$  збільшення значення параметра зовнішньої накачки  $r$  приводить до реверсивної картини самоорганізації: при  $r = r^{c1}$  за сценарієм біфуркації Андронова-Хопфа в системі виникає часова дисипативна структура, а при  $r = r^{c2}$  – за тим же сценарієм зникає.

Картина перебудови поведінки системи є більш складною у разі  $A > 0$ . Фазова діаграма представлена на рис. 5б. При значеннях інтенсивності зовнішньої накачки  $r$ , менших за критичне, що визначається штриховою кривою,  $\eta_0 = 0$  (див. рис. 1). При малих значеннях параметра  $C < C_0$  впорядкована фаза характеризується нестійким фокусом. Відповідне стаціонарне значення відповідає верхній гілці кривої 2 на рис.1. При великих значеннях  $C_c^u < C < C_c^s$  картина перебудови динамічних режимів є подібною до розглянутого вище випадку при  $C < C_c^s$  (див. рис. 5а) При значенні параметра  $C = C_r$ :  $C_0 < C_r < C_c^u$  маємо складну картину самоорганізації. Тут зі збільшенням параметра зовнішньої накачки  $r$  спостерігається наступна низка трансформацій динамічних режимів: 1) система переходить до режиму, що характеризується двома стаціонарними станами (впорядкованій фазі відповідає стійкий фокус); 2) при  $r = r^{c1(1)}$  за рахунок самоорганізації за сценарієм біфуркації Андронова-Хопфа в виникає дисипативна структура, що існує, поки  $r < r^{c2(1)}$ ; 3) подальше збільшення параметра зовнішньої накачки призводить до дезорганізації (при  $r = r^{c2(1)}$ ) – руйнування дисипативної структури і система переходить у нестійкий режим, що характеризується нестійким фокусом; 4) у разі подолання енергетичного бар'єру  $r = r^{c1(2)}$  система знову за сценарієм біфуркації Андронова-Хопфа самоорганізується з виникненням часової дисипативної структури – стійкого граничного циклу; 5) подальше збільшення параметра зовнішньої накачки приводить до руйнування дисипативної структури при  $r = r^{c2(2)}$ , а впорядкованій фазі відповідає стійкий фокус.

## 5. ВИСНОВКИ

Розглянуто процеси самоорганізації синергетичної системи з урахуванням нелінійної залежності часу релаксації параметра порядку від його величини та наявності зовнішніх додаткових збурень, які моделюються потенціалом, що відповідає катастрофі  $A_2$ . Показано, що в залежності від параметрів нерівноважні фазові переходи, що протікають в системі, можуть бути як першого, так і другого роду. Використовуючи алгоритм біфуркації народження граничного циклу знайдено область параметрів існування часової дисипативної структури. Виявлено, що керуючі параметрами зовнішнього потенціалу, збільшення зовнішньої накачки приводе до реверсивної картини самоорганізації.

Проведені теоретичні дослідження можуть бути застосовані при вивченні умов формування стійкого періодичного імпульсного випромінювання в оптично-бістабільних системах. Розглянутий випадок співвідношення часів релаксації основних мод відповідає системам твердотільних лазерів. Для таких систем додаткові збурення моделюють дію оптичного модулятора, який задає процеси додаткової міжфотонної взаємодії в резонаторі, а використана залежність (4), що враховує втрати від інтенсивності, моделює вплив нелінійного фільтру, що поглинає слабкий сигнал [1].

**CONDITINS FOR THE TIME DISSIPATIVE STRUCTURE FORMATION  
AT NONEQUILIBRIUM TRANSITIONS**

**A.V. Dvornichenko<sup>1</sup>, A.A. Vasilyev<sup>1</sup>, V.O. Kharchenko<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Sumy State University,  
2, Rimsky-Korsakov str., 40007, Sumy, Ukraine  
E-mail: [alina\\_dv84@mail.ru](mailto:alina_dv84@mail.ru)

<sup>2</sup> Institute of Applied Physics, National Academy of Science of Ukraine,  
58, Petropavlovskaya str., 40030, Sumy, Ukraine

*We discuss processes of the dissipative structure formation when the nonequilibrium phase transition takes place. The model is considered under assumptions that dispersion of the relaxation time of the order parameter and influence of the external force present. It was found that self-organization occurs through the Hopf bifurcation and results in the dissipative structure formation. Analysis was performed according to the Lyapunov and Floquet exponent investigation. It was found that the complex picture of ordering with two reentrant Hopf bifurcations occurs.*

**Keywords:** NONEQUILIBRIUM PHASE TRANSITION, DISSIPATIVE STRUCTURE, HOPF BIFURCATION, LIMIT CYCLE, ORDER PARAMETER.

**ФОРМИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ДИСИПАТИВНЫХ СТРУКТУР ПРИ  
НЕРАВНОВЕСНЫХ ПЕРЕХОДАХ**

**А.В. Дворниченко<sup>1</sup>, А.А. Васильев<sup>1</sup>, В.О. Харченко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Сумский государственный университет,  
ул. Римского-Корсакова, 2, 40007, Сумы, Украина  
E-mail: [alina\\_dv84@mail.ru](mailto:alina_dv84@mail.ru)

<sup>2</sup> Институт прикладной физики НАН Украины,  
ул. Петропавловская 58, 40030, Сумы, Украина

*Исследован процесс формирования структур при неравновесных фазовых переходах. Модель рассмотрена при допущении наличия дисперсии времени релаксации параметра порядка и влияния дополнительных внешних возмущений, моделирующихся потенциалом складки. Показано, что результатом самоорганизации, проходящей по сценарию бифуркации Андронова-Хопфа, есть возникновение диссипативных структур, которые представляются граничными циклами в фазовом пространстве. Анализ системы проведен с помощью исследования показателей устойчивости и показателя Флоке. Установлено, что в системе наблюдается реверсивная картина упорядочения с образованием временной диссипативной структуры.*

**Ключевые слова:** НЕРАВНОВЕСНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД, ДИСИПАТИВНАЯ СТРУКТУРА, БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА, ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ, ПАРАМЕТР ПОРЯДКА.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Г. Хакен, *Синергетика* (М.: Мир: 1980).
2. Дж. Николис, *Динамика иерархических систем: Эволюционное представление* (М.: Мир: 1989).
3. Д.Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика* (М.: Наука: 1971).

4. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука: 1988).
5. В.Й. Сугаков, *Основы синергетики* (К.: Обереги: 2001).
6. А.Д. Врай, *Adv. Phys.* **43**, 357 (1994).
7. А.И. Olemskoi, I.V. Koplik, *Phys.-Usp.* **38**, 1061 (1995).
8. Дж. Николис, И. Пригожин *Самоорганизация в неравновесных системах* (М.: Мир: 1979).
9. H. Haken, *Synergetics. An Introduction. Nonequilibrium phase transitions and self-organization in physics, chemistry, and biology* (Berlin: Springer Verlag: 1983).
10. А.И. Olemskoi, *Theory of structure transformations in non-equilibrium condensed matter* (New York: Nova Science publishers inc.: 1999).
11. D.O. Kharchenko, I.A. Knyaz, *Proc. of SPIE* **5507**, 17 (2004).
12. О.И. Олемской, С.В. Кокхан, О.В. Ющенко, *Журн. Фіз. Досл.* **8**, 268 (2004) (А.И. Olemskoi, O.V. Yushchenko, S.V. Kokhan, *Journal of Physical Studies* **8**, 268 (2004)).
13. В.О. Харченко, *Журн. Фіз. Досл.* **12**, 2001(8) (2008) (V.O. Kharchenko, *Journal of Physical Studies* **12**, 2001(8) (2004)).
14. А.И. Olemskoi, A.V. Khomenko, *ЖЕТП* **83**, 1180 (1996).
15. Т. Poston, I.N. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications* (London: Pitman: 1978).
16. А.И. Olemskoi, I.A. Shuda, V.O. Kharchenko, *Ukr. J. Phys.* **51**, 311 (2006).
17. B.D. Hassard, N.D. Kazarinov, Y.H. Wan, *Theory and Application of the Hopf Bifurcation* (Cambridge: Cambridge Univ. Press: 1981).
18. А.А. Андронов, А.А. Vitt, S.E. Khaikin, *Theory of Oscillators* (Oxford: Pergamon Press: 1966).
19. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости* (М.: Наука: 1990).
20. А.И. Олемской, Д.О. Харченко, В.О. Харченко, *Вісник СумДУ. Серія: Фізика, математика, механіка №1*, 75 (2007).