УДК 539.389, 537.226, 536.241

РЕЛАКСАЦІЯ КОУЛ - ДЕВІДСОНА

О.А. Комкова, асп.
Одеський національний політехнічний університет

Кількісної мікроскопічної теорії, що могла б пояснити залежність релаксації, що спостерігається, Коул - Девідсона в даний час не запропоноване [1]. Все частіше підтверджується, що такої теорії не може бути створено[2].У ряді праць для опису релаксації Коул - Девідсона були запропоновані різні моделі, в основу яких покладено фрактальні уявлення про природу процесів, що породжують релаксацію Коул - Девідсона [3].

Для опису і вивчення релаксаційних процесів, що породжуються фрактальною структурою, використовувалася математична мова дробової похідної, що базується на представленні оператора дробового диференціювання Рімана – Ліувіля [4]

$$D^{\alpha}\left[f(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{d}{dt}\cdot\int\limits_{c}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\cdot f(\tau)d\tau\ , \tag{1}$$

який має більш ніж двохсотлітню історію.

Обґрунтування зв'язку дробової похідної з фрактальною множиною, що породжує аномальну поведінку діелектричної релаксації Коул - Девідсона було проведено [5] , де було запропоновано використовувати дробовий оператор локального диференціювання D^{α} у вигляді

$$D^{\alpha}f(x)=\frac{d^{\alpha}f(x)}{\left[d(x-a)\right]^{\alpha}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{[x-a]^{\alpha}},\ \ 0<\alpha\le 1\ , \tag{2}$$

Перетворення Лапласа функції $D^{\alpha}_{x-a}f\left(x\right)$ дорівнює

$$L\left[D^{\alpha}_{x-a}f\left(x\right)\right]=\Gamma\left(2-\alpha\right)p^{\alpha}L\left[f\left(x\right)\right]-\Gamma\left(2-\alpha\right)p^{\alpha-1}f\left(a\right).$$

Для опису аномальної релаксації Коул - Девідсона розглянемо оператор дробового диференціювання [6]

$$\left(\tau^{-1}+D^{1}\right)^{\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tau^{-1}\right)^{n}\binom{\nu}{n}D^{(\nu-n)}\ , \tag{3}$$

де $\binom{\nu}{n}=\dfrac{\nu!}{n!(\nu-n)!}$ - біноміальний коефіцієнт.

Тоді

$$\left(\tau^{-1}+D^{1}\right)^{\nu}\left[P(t)\right]=\frac{\chi_0E_0}{\tau^{\nu}}\ . \tag{4}$$

Згідно з (4) Лаплас-зображення функції P(t) можна визначити у вигляді

$$\bar{P}\left(p\right)=\frac{\chi_0E}{p}\,\frac{1}{\left(1+\tau\,p\right)^{\nu}}\ . \tag{5}$$

Рівняння, що описує релаксацію Коул - Девідсона з (5), можна одержати шляхом заміни $p\to i\omega$, і тоді комплексну сприйнятливість (Коул - Девідсона) можна визначити у вигляді

$$\chi\left(i\omega\right)=\frac{\chi_0}{\left(1+i\omega\tau\right)^{\nu}}\ . \tag{6}$$

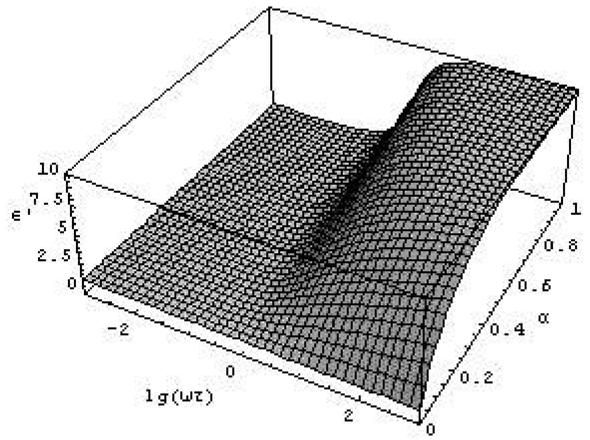
Звідси випливає, що комплексна діелектрична проникність (Коула - Девідсона)

$$\varepsilon^{*}\left(i\omega\right)=\varepsilon_{\infty}+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_{\infty}}{[1+i\omega\tau]^{\beta}}\ ,\ 0<\beta\le 1\ ,$$

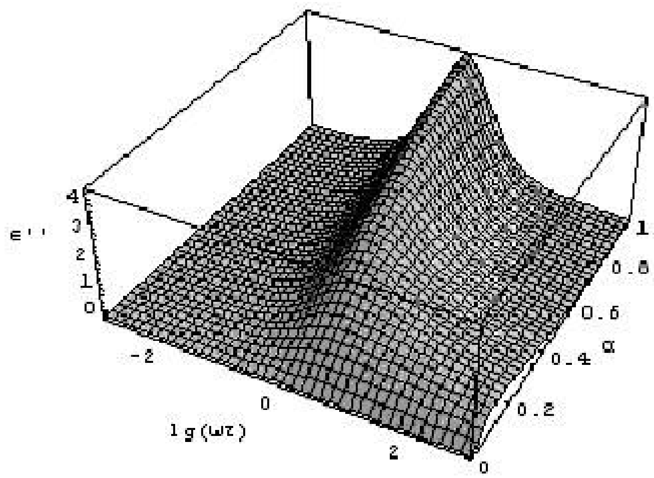
де

$$\varepsilon'\left(\omega\right)=\mathrm{Re}\left[\varepsilon^{*}\left(i\omega\right)\right]=\varepsilon_{\infty}+\left(\varepsilon_0-\varepsilon_{\infty}\right)\frac{\cos\left[\beta arctg\left(-\omega\tau\right)\right]}{\left(1+\left(\omega\tau\right)^{2}\right)^{\frac{\beta}{2}}}\ ,\ \varepsilon''\left(\omega\right)=\mathrm{Im}\left[\varepsilon^{*}\left(i\omega\right)\right]=\left(\varepsilon_0-\varepsilon_{\infty}\right)\frac{\sin\left[\beta arctg\left(-\omega\tau\right)\right]}{\left(1+\left(\omega\tau\right)^{2}\right)^{\frac{\beta}{2}}}\ .$$

Розрахунки (рис.1) проводилися при $\eta=\dfrac{\varepsilon_{\infty}}{\varepsilon_0}=10$.



а)



б)

Рисунок 1 – Комплексна діелектрична проникність закону Коул-Девідсона:
а) дійсна частина комплексної діелектричної проникності закону Коул-Девідсона;
б) уявна частина комплексної діелектричної проникності закону Коул-Девідсона

Розв’язання (4) можна записати у вигляді

$$P(t) = -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(k+\gamma)}{\Gamma(k+\gamma)\Gamma(k+1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{(k+\gamma)} = 1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}H_{12}^{//}\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]^{\alpha}\middle|\begin{matrix}(0,1)\\(\gamma,1),(0,1)\end{matrix}\right). \quad (7)$$

Для закону Коула – Девідсона $0<\gamma<1$:

$$f(t) = 1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+\gamma)\Gamma(k+1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{k+\gamma}.$$

У розв’язанні рівнянь із дробовими похідними зручно використовувати функції Фокса (узагальнений інтеграл Мілін – Барнеса), тому що перетворення Лапласа і Фур'є для функцій Фокса виражається через функції Фокса з іншими параметрами . Зв'язок функцій Міттаг – Лефера з функціями Фокса має вигляд

$$E_{\alpha,\gamma}(-z) = H_{1,2}^{1,1}\left[z\middle|\begin{matrix}(0,1)\\(0,1),(1-\gamma,\alpha)\end{matrix}\right]. \quad (8)$$

Функція Фокса для закону Коула – Девідсона $0<\gamma<1$ має вигляд

$$1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}H_{12}^{//}\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]\middle|\begin{matrix}(0,1)\\(\gamma,1),(0,1)\end{matrix}\right),$$

якщо $\frac{t}{\tau}\to\infty$, то $f(t)\approx\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma-1} * \left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}(\gamma-j)\left[\frac{t}{\tau}\right]^{-k}\right]$

У літературі залежність (6) має назву сприйнятливості Коула - Девідсона.

SUMMARY

In the given work attempt to describe a line of physical systems, in particular process of a relaxation Cole - Devidson, with the help of the equation with fractional operators has been undertaken.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Jonsher A.K. Dielectric Relaxation in Solids. Chelsea Dielectric Press. – London, 1983.
2. Nigmatullin R.R., Phys. Status Solidi **У,** 124, 389, (1984).
3. Нигматулин Р.Р., Рябов Я.Р. // Фізика твердого тіла.- 1997.- 39 №1. -С. 101 - 105.
4. Самко С.Г.,Килбас А.А., Маричев О.І. Інтеграли і похідні дробового порядку і деякі додатки.Мінськ. - 1987,688с.
5. Комкова О.А., Новіков В.В. До визначення дробової похідної фрактальних функцій // Вісник Одеськ. держ. ун-ту.- 2003. – Т.8. - Вип.2. – С. 129-133.
6. Потапов А.А. Фрактали у радіофізику і радіолокації.- М.: Логос, 2002. – С.91

Надійшла до редакції 11 листопада 2004р.