УДК 534:621.824

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОДНОСТОРОННЕ ОБТЕКАЕМОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

И.Б. Каринцев, *канд. техн. наук, профессор;*
В.В. Фишер, *студент,*
Сумский государственный университет, г.Сумы

Статья посвящена определению влияния деформаций, вызываемых осевым перепадом давления, на устойчивость цилиндрической консольно закрепленной пластины. Задача гидроупругости решена вариационным методом Лагранжа. Полученные результаты позволили сделать качественные и количественные выводы о влиянии различных факторов на устойчивость цилиндрической панели.
Ключевые слова: *дивергенция, флаттер, вязкая жидкость, осевой перепад давления, критический перепад давления, гидродинамическое давление.*

Стаття присвячена визначенню впливу деформацій, викликаних осьовим перепадом тиску, на стійкість циліндричної консольно закріпленої пластини. Задача гідропружності розв'язана варіаційним методом Лагранжа. Отримані результати дозволили зробити якісні та кількісні висновки про вплив різних чинників на стійкість циліндричної панелі.
Ключові слова: *дивергенція, флатер, в'язка рідина, осьовий перепад тиску, критичний перепад тиску, гідродинамічний тиск.*

Анализ течения вязкой жидкости в плоском канале при различных граничных условиях имеет важное практическое значение. Особые значения имеют случаи, когда одна из стенок обладает упругой податливостью, что приводит к задачам гидроупругости [1]. Так, в работе [2] рассматривалось влияние потока вязкой несжимаемой жидкости на устойчивость упруго закрепленной жесткой пластины. В настоящей работе сделана попытка учета влияния деформаций пластины на самовозбуждающиеся колебания.

Колебания прямоугольной пластины с учетом деформаций описываются уравнением

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(x,y,t) = 0, \quad (1)$$

где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа; $w(x,y,t)$ - прогиб, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; N_x, N_y - растягивающие силы в срединной поверхности; ρ_0 - плотность среды; $p(x,y,t)$ - гидродинамическое давление.

Анализ течения вязкой среды в дросселирующем канале под действием осевого перепада давления представлен в известной монографии В.А. Марцинковского [3].

Давление напорного течения определяется выражением с учетом принятых там обозначений:

$$p_p = p_{10} - \frac{\Delta p}{2}[\bar{x} + 1 - \frac{3}{2}\alpha(1 - \bar{x}^2)],$$

где p_{10} - давление при входе в канал, Δp - осевой перепад давления, $\bar{x} = 2\frac{x}{l}$ - безразмерная координата вдоль оси канала, α - текущая, зависящая от времени конусность, обусловленная отклонением пластинки от невозмущенного состояния. Поскольку рассматривается канал с малой конусностью и малыми колебаниями, то выражение для α имеет вид

$$\alpha = \theta(1+\varepsilon) + \theta_0, \qquad (2)$$

где $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$ - параметр конусности в сечении, θ_0 - начальный параметр конусности, ε - относительное поперечное смещение стенки канала.

Сила давления напорного потока, действующая на элемент единичной ширины стенки канала, с учетом (2) определяется через интеграл

$$f_p = \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} p d\bar{x} = \frac{1}{2}l(p_{10} + p_{20}) + \frac{l\Delta p}{2}(\theta_0 + \theta_0\varepsilon + \theta) = f_{p0} + k_p(\theta_0\varepsilon + \theta) \approx f_{p0} + k_p\theta,$$

где $k_p = \frac{\Delta p l}{2}$ - силовой коэффициент [3].

При решении уравнения (1) слагаемое f_{p0} не учитывается, поскольку оно не влияет на устойчивость стенки канала, а только смещает её положение равновесия. Тогда гидродинамическое давление, действующее на пластину, описывается выражением

$$p = \frac{k_p}{l}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Решение уравнения (1) ищем в виде некоторой функции $w = w(x, y, t)$, удовлетворяющей граничным условиям задачи. Подставляя выбранную функцию в уравнение (1), получим характеристическое уравнение. На основании полученного характеристического уравнения можно делать выводы об устойчивости системы.

Рассмотрим частный случай обтекания потоком вязкой несжимаемой жидкости цилиндрической панели (рис. 1), когда $b = \infty$, $N_x = N_y = 0$.

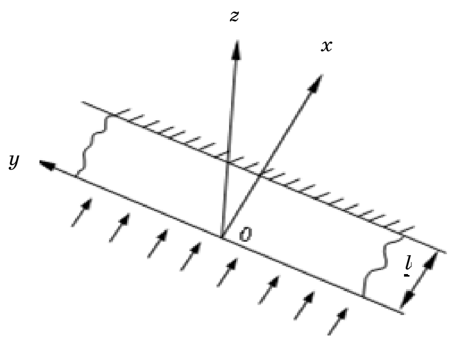

Рисунок 1 – Обтекание цилиндрической панели

В этом случае прогиб представлен в виде функции

$$w=w(x, t).$$

Дифференциальное уравнение изгиба с учетом принятых обозначений

$$D\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\rho_0 h\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+\frac{k_p}{l}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}=0. \tag{3}$$

Его решение ищем в виде

$$w=w_1(x)e^{i\omega t}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$D\frac{d^4 w_1(x)}{dx^4}+\frac{k_p}{l}\frac{dw_1(x)}{dx}-\rho_0 h\omega^2 w_1(x)=0. \tag{4}$$

Введем новые обозначения:

$$\xi=\frac{x}{l};\ k^3=\frac{k_p l^2}{D};\ \Omega=-\frac{\rho_0 h\omega^2 l^4}{D}. \tag{5}$$

Уравнение (4) с учетом последних обозначений

$$\frac{d^4 w_1(\xi)}{d\xi^4}+k^3\frac{dw_1(\xi)}{d\xi}+\Omega w_1(\xi)=0.$$

Граничные условия:

$$\left.\frac{d^2 w_1}{d\xi^2}\right|_{\xi=0}=0;\ \left.\frac{d^3 w_1}{d\xi^3}\right|_{\xi=0}=0;\ \left.w_1\right|_{\xi=1}=0,\ \left.\frac{dw_1}{d\xi}\right|_{\xi=1}=0.$$

Частное решение ищем в виде

$$w_1=Ae^{\lambda\xi}.$$

В результате получим характеристическое уравнение

$$\lambda^4+k^3\lambda+\Omega=0.$$

Если характеристическое уравнение будет иметь хотя бы один нулевой корень, то система будет находиться на апериодической границе устойчивости. Малые отклонения параметров системы могут вызвать неограниченные отклонения от равновесного состояния - явление дивергенции. Этот случай возможен при $\Omega=0, (\omega=0)$. Определим критический перепад давления.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-k$, $\lambda_{3,4}=\frac{1}{2}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)k$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$w_1(\xi) = c_1 + c_2 e^{-k\xi} + e^{\frac{k\xi}{2}}(c_3 sin\frac{\sqrt{3}}{2}k\xi + c_4 cos\frac{\sqrt{3}}{2}k\xi).$$

Используя граничные условия, получим определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & e^{-k} & e^{\frac{k}{2}} sin\frac{\sqrt{3}}{2}k & e^{\frac{k}{2}} cos\frac{\sqrt{3}}{2}k \\ 0 & -e^{-k} & \frac{1}{2}e^{\frac{k}{2}}\left(\sqrt{3}cos\frac{\sqrt{3}}{2}k + sin\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) & \frac{1}{2}e^{\frac{k}{2}}\left(\sqrt{3}cos\frac{\sqrt{3}}{2}k - sin\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) \end{vmatrix} = 0 .$$

После раскрытия определителя получим трансцендентное уравнение:

$$cos\frac{\sqrt{3}}{2}k = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}k},$$

в результате решения которого получим $k = 1,85$. Подставим значение k в (4) и найдем k_p :

$$k_p = \frac{Dk^3}{l^2} = 6,33\frac{D}{l^2}.$$

Тогда критический перепад давления, вызывающий дивергенцию, определяется по формуле

$$\Delta p = \frac{2k_p}{l} = 12,66\frac{D}{l^3} \tag{6}$$

В результате аналитического решения была найдена формула для определения критического перепада давления вязкой жидкости в плоском канале для дивергенции. Но описанный точный метод решения задачи, использующий уравнение колебаний пластинки, является весьма ограниченным, т.к. дает возможность решать только простые задачи. Для сложных задач исследуемое уравнение очень громоздко. С этой точки зрения интерес представляют приближенные методы решения задачи и в первую очередь вариационный метод Лагранжа. Применение последнего в отличие от метода Галеркина позволяет избежать трудностей, возникающих при выборе координатных функций.

Вариационные методы основаны на так называемом принципе возможных перемещений, который заключается в следующем. Для того чтобы система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении равнялась нулю.

$$\delta A = \delta \Pi \quad \text{или} \quad \delta(A - \Pi) = 0, \tag{7}$$

где δ - вариация; A - работа всех внешних сил; Π - потенциальная энергия деформации.

Равенство нулю первой вариации говорит о том, что полная потенциальная энергия имеет экстремальное значение. Если взять вторую вариацию, то можно показать, что она положительная, а, следовательно, в состоянии равновесия $A - \Pi$ имеет минимальное значение.

Вариационный метод Лагранжа можно применить к тонким пластинкам, используя техническую теорию тонких упругих пластинок.

Работа внешних сил

$$A = \iint_s qwds \quad \text{или} \quad \delta A = \iint_s q\delta wds\,, \tag{8}$$

где

$$q = -\rho_0 h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} - \frac{k_p}{l}\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x}. \tag{9}$$

Потенциальная энергия деформации

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_s D\left\{(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy. \tag{10}$$

Перемещение пластины будем искать в виде

$$w(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x,y) e^{\omega t}. \tag{11}$$

Для решения задачи из уравнения (7) можно получить дифференциальное уравнение с естественными граничными условиями и применить метод Галеркина. Но для этого в выражении (11) координатные функции φ_i должны быть подчинены геометрическим и силовым условиям на контуре, что делает метод Галеркина практически непригодным для решения ряда задач. Этим объясняется отсутствие результатов исследования важных в авиастроении элементов — консольных пластин. Чтобы решить задачу, целесообразно воспользоваться непосредственно уравнением (7), в котором учтены силовые условия, а координатные функции φ_i подчинить условиям, не противоречащим кинематически возможным перемещениям пластины.

Подставим выражения (8) и (10) с учетом (9) в уравнение (7). Затем, учтя, что

$$\delta w = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j}\delta\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \delta\alpha_j e^{\omega t},$$

а также аналогичные соотношения для вариации от производных в выражении $\delta\Pi$, соберем коэффициенты при одинаковых $\delta\alpha_j$. В силу произвольности $\delta\alpha_j$ равенство нулю выражения (7) возможно только при одновременном обращении в нуль коэффициентов при всех $\delta\alpha_j$. Это приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров α_j. Условие нетривиального решения полученной системы, опуская некоторые преобразования, можно записать в виде

$$\begin{cases} (\tau_{11}\Omega - f_{11}k^3 - \pi_{11})\alpha_1 + (\tau_{12}\Omega - f_{12}k^3 - \pi_{12})\alpha_2 + \ldots + (\tau_{1m}\Omega - f_{1m}k^3 - \pi_{1m})\alpha_m = 0; \\ \ldots \\ (\tau_{n1}\Omega - f_{n1}k^3 - \pi_{n1})\alpha_1 + (\tau_{n2}\Omega - f_{n2}k^3 - \pi_{n2})\alpha_2 + \ldots + (\tau_{nm}\Omega - f_{nm}k^3 - \pi_{nm})\alpha_m = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где Ω и k^3 обозначены в (5), а τ_{ik}, f_{ik} и π_{ik} для прямоугольной пластины определяются выражениями

$$\tau_{ik} = \int \varphi_i \varphi_k dx_i, \; f_{ik} = \int \dot{\varphi}_i \varphi_k dx_i, \; \pi_{ik} = \int \ddot{\varphi}_i \ddot{\varphi}_k dx_i .$$

Таким образом, задача о колебаниях и устойчивости невозмущенной формы пластины сводится к отысканию и исследованию собственных значений Ω Ω матрицы (12) в зависимости от параметра потока k^3. При некотором значении k^3 собственное значение Ω может стать отрицательным или комплексным числом. В первом случае пластина, движение которой описывается равенством (11), будет непериодически отклоняться от невозмущенного состояния (дивергенция). Во втором случае ($\operatorname{Im}\Omega \neq 0$) вещественная часть щ может стать положительной, что соответствует колебаниям пластины с неограниченно возрастающей амплитудой во времени (флаттер). Наименьшее значение k^3, при котором имеет место один из приведенных выше случаев, определяет границу устойчивости и называется критическим.

Для нахождения собственных значений необходимо определитель системы (12) приравнять к нулю. Раскрыв определитель, получим уравнение, связывающее между собой собственные значения системы и параметры потока:

$$\Delta(\Omega,\; k^3) = 0.$$

В данной статье рассмотрен случай прямоугольной пластины, обтекаемой потоком вязкой несжимаемой жидкости, который направлен перпендикулярно защемленной стороне (рисунок 2).

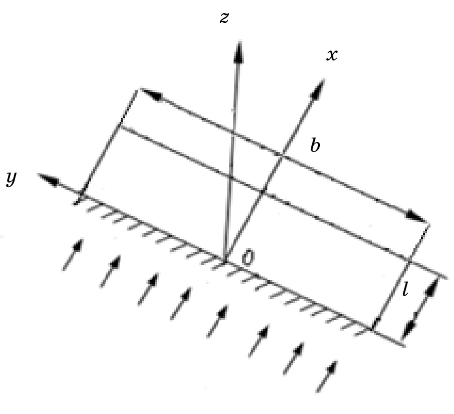

Рисунок 2 – Обтекание панели конечной длины

Для выполнения кинематических условий координатные функции выбраны в виде

$$\varphi_i = (y^4(y-1)^4 + y + 1)x^{i+1}.$$

На рисунке 3 представлен график зависимости $\Omega = \Omega(k^3)$, построенный для n=5 для прямоугольной пластины с соотношениями сторон $\frac{b}{l} = 0.5; 1; \infty$.

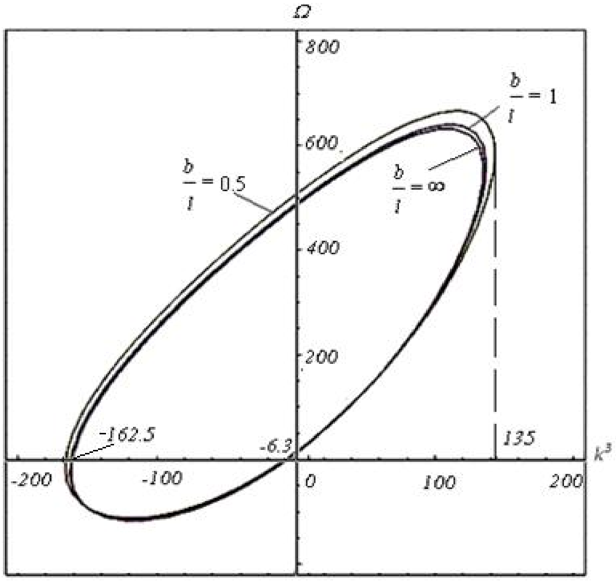

Рисунок 3 – График зависимости собственных значений от параметров потока

Анализируя полученный график, можно сделать вывод, что зависимости собственных чисел от параметров потока близки для различных длин пластин. Также следует отметить, что при увеличении длины пластины область устойчивости сокращается.

Дивергенция возникает в случае, когда Ω=0 при k^3= - 6,33. Тогда критический перепад давления совпадает с полученным ранее по формуле (6).

Панельный флаттер пластины с бесконечной длиной, когда поток направлен от свободной кромки к заделанной, возникает при k^3=-162. Для противоположно направленного потока - при k^3=135. Тогда критические перепады давления для консольно закрепленной панели бесконечной протяженности определяются по формулам:

1) направление потока от свободной кромки к заделанной (рис. 1)

$$\Delta p = \frac{2k_p}{l} = 324\frac{D}{l^3};$$

2) направление потока от жесткого закрепления к свободной кромке

$$\Delta p = \frac{2k_p}{l} = 270\frac{D}{l^3}.$$

ВЫВОДЫ

При определении влияния деформаций, вызываемых осевым перепадом давления, на устойчивость цилиндрической консольно закрепленной пластины был использован вариационный метод Лагранжа. В результате решения задачи была построена графическая зависимость собственных чисел от параметров потока для пластин с несколькими вариантами соотношений сторон. Анализ графика позволил сделать вывод, что длина пластины несущественно влияет на характер кривых, определяющих границы области устойчивости.

Также были получены выражения для определения критического осевого перепада давления потока несжимаемой жидкости, обуславливающего возникновения флаттера консольно закрепленной цилиндрической панели. Поскольку при увеличении длины пластины область устойчивости сужается, то полученные выражения можно применять для пластин конечной длины, учитывая при этом, что критический перепад давления взят с некоторым запасом. Согласно данным формулам критический перепад давления обратно пропорционален ширине пластины и прямо пропорционален ее толщине.

Таким образом, были получены качественные и количественные выводы о влиянии различных факторов на устойчивость цилиндрической панели.

SUMMARY

STABILITY OF CANTILEVER FIXED PLATE STREAMLINED WITH ONE SIDE VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW

I.B. Karintsev, V.V. Fisher
Sumy State University, Sumy

Considered article is devoted to determining the influence of deformations caused by axial pressure drop, the stability of cylindrical clamped cantilever plate. Results based on the use of Lagrange variational method, provided a qualitative and quantitative conclusions about the effect of various factors on the stability of cylindrical panels.

Key words: *divergence, flutter, viscous fluid, axial difference of pressure, critical difference of pressure, hydrodynamic pressure.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каринцев И.Б. Гидроаэроупругость. – Сумы: Изд–во Сумского государственного университета, 2000. 138с.
2. Каринцев И.Б., Белан В.В. О статической и динамической устойчивости упруго закрепленной пластины/ И.Б. Каринцев,В.В. Белан // Вісник СумДУ. Серія Технічні науки. – 2009. - №4. – С 135 – 140.
3. Марцинковский В.А. Щелевые уплотнения: теория и практика. –Сумы: Изд–во Сумского государственного университета, 2005.– 416 с.
4. Филиппов А.П., Булгаков В.Н., Воробьев Ю.С., Кантор Б.Я., Марченко Г.А. Численные методы в прикладной теории упругости. – К.: Изд-во «Наукова думка», 1968. – 250 с.

Поступила в редакцию 5 мая 2010 г.