SUMMARY

The new characteristics of numerical functions - disproportion on derivative, on value and relative disproportion are offered. Their application in diagnostics and at recognition of images is recommended.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авраменко В.В. Характеристики непропорциональности числовых функций / Деп. в ГНТБ Украины 19.01.1998, №59, Ук98.
2. Словарь иностранных слов / Под ред. И.В.Лехина, С.М. Локшиной, Ф.Н.Петрова, Л.С.Шаумяна. - М.: Изд-во "Советская энциклопедия", 1964. - 526 с.
3. Полулях К.С. Электронные измерительные приборы (аналоговые и цифровые).- М.: Высшая школа, 1966. - С. 282-297.

Поступила в редколлегию 21 сентября 1999 г.

УДК 517.17:681.518.54

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ДИАГНОСТИКЕ

А.П.Карпенко, асп.

При решении ряда задач технической и медицинской диагностики, контроле технологических процессов, сравнении образов, оценке искажения выходного сигнала по сравнению с входным возникает необходимость определять, является ли связь между числовыми функциями $x(t)$ и $y(t)$ пропорциональной во всей области задания функций, на отдельных интервалах или только в отдельных точках. Так, при технической диагностике усилителей, датчиков, преобразователей, каналов телеметрии, следящих систем, серводвигателей требуется вести контроль за соблюдением пропорциональной зависимости между входным $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами:

$$y(t) = kx(t)\,, \tag{1}$$

где k - коэффициент пропорциональности.

В идеале подразумевается, что усилительное звено не имеет динамической ошибки и производит усиление, передачу и преобразование мгновенных величин без искажений и запаздываний. Пропорциональность (1) является главным признаком для оценки технического состояния объектов данного класса. Неконтролируемые воздействия на параметры объекта могут привести к ухудшению его технического состояния и как следствие - к отклонению выражения для его статической характеристики от вида (1). Причинами этого могут быть влияние динамики объекта, запаздывания выходного сигнала по отношению к входному, нелинейность при малых либо больших значениях входного сигнала. Значение коэффициента усиления в квазистационарных системах, как правило, медленно изменяется с течением времени по сравнению с $x(t)$ и $y(t)$, и в ряде случаев его значение неизвестно либо трудно определимо.

Подобная ситуация имеет место при анализе электрокардиограмм. Амплитуда регистрируемых кардиосигналов зависит от многослойной проводящей среды. Это приводит к тому, что регистрируемые значения разности потенциалов отличаются от реальной ЭДС сердца на масштабный коэффициент, значение которого неизвестно и может медленно изменяться случайным образом.

Таким образом, формально задача сводится к необходимости количественного описания отклонения зависимости между $y(t)$ и $x(t)$ от вида (1) при неизвестном значении коэффициента пропорциональности k.

Определить коэффициент пропорциональности k по отношению

$$d(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \qquad (2)$$

можно лишь в том случае, когда на интервалах регистрации функций отношение $d(t) = const = k$. В противном случае $d(t) = \text{var}$ и неизвестно, какое его значение следует принять в качестве коэффициента k, чтобы оценить, при каких значениях t зависимость между $y(t)$ и $x(t)$ отклоняется от пропорциональной и насколько.

В работе [1] предложены новые характеристики числовых функций непропорциональности. Одна из них – непропорциональность по производной первого порядка функции $y = f(x)$ по переменной x:

$$@d_x^{(1)} y = \frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}. \qquad (3)$$

Введено также понятие непропорциональности по производной n-го порядка функции $y = f(x)$ по x:

$$@d_x^{(n)} y = \frac{y}{x^n} - \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n},$$

где n - целое число больше нуля. Она равна нулю в тех точках x, для которых зависимость имеет вид $y = kx^n$.

На основе непропорциональности по производной n-го порядка получена соответствующая непропорциональность по значению:

$$@v_x^{(n)} y = y - \frac{x^n}{n!}\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Для n=1 непропорциональность по значению 1-го порядка имеет вид

$$@v_x^{(1)} y = y - x\frac{dy}{dx}. \qquad (4)$$

Кроме того, в работе [1] предложены также непропорциональности по производной (5) и по значению (6) при параметрическом задании функции $y(x)$, где $y = y(t)$, $x = x(t)$:

$$@d_{x(t)}^{(1)} y(t) = \frac{y(t)}{x(t)} - \frac{y_t'(t)}{x_t'(t)}; \qquad (5)$$

$$@v_{x(t)}^{(1)} y(t) = y(t) - x(t)\frac{y_t'(t)}{x_t'(t)}. \qquad (6)$$

Для тех значений t, при которых зависимость между $x(t)$ и $y(t)$ пропорциональна (1), значения характеристик непропорциональности равны нулю при любом значении коэффициента пропорциональности k. Если же при некотором значении t зависимость отличается от пропорциональной, то эти характеристики позволяют количественно оценить имеющуюся непропорциональность. Причем использование оценок непропорциональности позволяет оценить отличие зависимости между функциями от пропорциональной в каждой точке множества, на котором заданы функции.

В работах [2], [3] приведены примеры использования непропорциональностей в задачах сравнения образов и анализа электрокардиограмм.

При вычислении оценок (5) и (6) могут иметь место следующие случаи:

- не для всех точек в исследуемой области существует производная;
- при наличии горизонтальных участков в графиках функций $x(t)$ и $y(t)$ либо на интервалах быстрого изменения значений функций при вычислении отношения $\frac{y_t'(t)}{x_t'(t)}$ в (5) и (6) возникают неопределенности типа $(\frac{0}{0})$ или $(\frac{\infty}{\infty})$;
- при значениях производных функции $x(t)$, близких к нулю при делении $y_t'(t)$ на $x_t'(t)$ в (5) и (6) получаются очень большие значения, которые существенно превышают остальные, что затрудняет анализ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимо разработать количественные оценки числовых функций, которые подобно оценкам (1) - (6) позволяли оценивать отличие зависимости между функциями от пропорциональной и в то же время были лишены указанных выше недостатков.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи предлагается использовать непропорциональности, вычисленные для интегралов исследуемых функций. Перейдем с помощью линейного оператора интегрирования с переменным верхним пределом от функций $y(t)$ и $x(t)$ к функциям

$$I_y(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} y(t)dt \text{ и } I_x(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} x(t)dt\,, \qquad (7)$$

где (t_0,t) – интервал исследования функций на непропорциональность.

Непропорциональности по производной (5) и по значению (6) функции $I_y(t_0,t)$ по $I_x(t_0,t)$ имеют вид

$$@d^{(1)}_{I_x(t_0,t)} I_y(t_0,t)=\frac{I_y(t_0,t)}{I_x(t_0,t)} - \frac{y(t)}{x(t)} \qquad (8)$$

$$@v^{(1)}_{I_x(t_0,t)} I_y(t_0,t)=I_y(t_0,t)-I_x(t_0,t)\frac{y(t)}{x(t)}\,. \qquad (9)$$

Назовем их соответственно *интегральной непропорциональностью по производной первого порядка* и *интегральной непропорциональностью по значению первого порядка.*

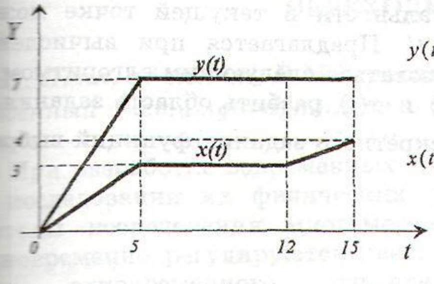
Теорема 1. Пропорциональная зависимость функций $y(t)$ и $x(t)$ на интервале $(t_n;t_k)$ влечет пропорциональную зависимость интегралов $I_y(t_0,t)=\int\limits_{t_0}^{t}y(t)dt$ и $I_x(t_0,t)=\int\limits_{t_0}^{t}x(t)dt$, для $\forall\, t_0, t\in(t_n;t_k)$, где $t_0<t$.

Теорема 2. Если зависимость между функциями $I_y(t_0,t)=\int\limits_{t_0}^{t}y(t)dt$ и $I_x(t_0,t)=\int\limits_{t_0}^{t}x(t)dt$ отлична от пропорциональной, то на интервале $(t_0;t)$ найдутся точки, для которых зависимость между функциями $y(t)$ и $x(t)$ также отлична от пропорциональной.

Характеристики (8) и (9) позволяют оценить в точке t отличие зависимости от пропорциональной для интегралов $I_y(t_0,t)$ и $I_x(t_0,t)$, имеющей место на интервале (t_0,t).

Как видно из выражений (8) и (9), интегральная непропорциональность по значению численно равна разности площади под графиком функции $y(t)$ на интервале $(t_0;t)$ и площади под графиком функции $x(t)$ на этом же интервале, умноженной на весовой коэффициент, равный отношению значений функций $y(t)$ и $x(t)$ в точке t. Интегральная непропорциональность по производной первого порядка численно равна разности отношения реально существующих площадей под графиками функций $y(t)$ и $x(t)$ на интервале T и отношения, которое должно иметь место в случае пропорциональной зависимости между $y(t)$ и $x(t)$ на этом интервале с коэффициентом пропорциональности, равным отношению $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ в точке t.

Пример 1. На интервале [0; 15] заданы функции $y(t)$ и $x(t)$. При фиксированном t зависимость $y(x)$ можно считать параметрической. Определить, имеет ли место пропорциональная зависимость между функциями $y(t)$ и $x(t)$ на интервалах [0; 5], [0; 12], [0; 15].



$$y(t)=\begin{cases}\frac{7}{5}t, & t\in[0;5);\\ 7, & x\in[5;15]\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}\frac{3}{5}t, & t\in[0;5);\\ 3, & x\in[5;12);\\ \frac{1}{3}t-1, & x\in[12;15]\end{cases}$$

$$I_y(0;t)=\begin{cases}\int_0^t \frac{7}{5}tdt=\frac{7}{10}t^2,\ t\in[0;5);\\ \int_0^5 \frac{7}{5}tdt+\int_5^t 7dt=7t-\frac{35}{2},\ t\in[5;12);\\ \int_0^5 \frac{7}{5}tdt+\int_5^{12} 7dt+\int_{12}^t 7dt=7t-\frac{35}{2},\ t\in[12;15]\end{cases}\qquad I_x(0;t)=\begin{cases}\int_0^t \frac{3}{5}tdt=\frac{3}{10}t^2,\ t\in[0;5);\\ \int_0^5 \frac{3}{5}tdt+\int_5^t 3dt=3t-\frac{15}{2},\ t\in[5;12);\\ \int_0^5 \frac{3}{5}tdt+\int_5^{12} 3dt+\int_{12}^t (\frac{1}{3}t-1)dt=\frac{1}{6}t^2-t+\frac{33}{2},\ t\in[12;15].\end{cases}$$

$$@d^{(1)}_{I_x(0;t)}I_y(0;t)=\begin{cases}\frac{7}{10}t^2-\frac{3}{10}t^2\frac{\frac{7}{5}t}{\frac{3}{5}t}=0,\ t\in[0;5);\\ 7t-\frac{35}{2}-(3t-\frac{15}{2})\frac{7}{3}=0,\ t\in[5;12);\\ 7t-\frac{35}{2}-(\frac{1}{6}t^2-t+\frac{33}{2})\frac{7}{\frac{1}{3}t-1}\neq 0,\ t\in[12;15].\end{cases}\qquad @v^{(1)}_{I_x(0;t)}I_y(0;t)=\begin{cases}\frac{\frac{7}{10}t^2}{\frac{3}{10}t^2}-\frac{\frac{7}{5}t}{\frac{3}{5}t}=0,\ t\in[0;5);\\ \frac{7t-\frac{35}{2}}{3t-\frac{15}{2}}-\frac{7}{3}=0,\ t\in[5;12);\\ \frac{7t-\frac{35}{2}}{\frac{1}{6}t^2-t+\frac{33}{2}}-\frac{7}{\frac{1}{3}t-1}\neq 0,\ t\in[12;15].\end{cases}$$

Как видно из примера, интегральные характеристики позволяют опосредованно контролировать пропорциональную зависимость между функциями $y(t)$ и $x(t)$, для которых прямое применение оценок (5) – (6) затруднено в силу перечисленных выше причин (в данном случае наличие горизонтальных участков в графиках функций $y(t)$ и $x(t)$). Характеристики (8) - (9) позволяют установить момент времени t, начиная с которого произошло искажение пропорциональной зависимости между функциями $y(t)$ и $x(t)$ и оценить искажение, имеющее место на интервале $[t_0;t]$ посредством вычисления непропорциональностей для интегралов исследуемых функций.

Но применение интегральных непропорциональностей имеет и недостатки. Это прежде всего то, что в случае нарушения пропорциональной зависимости между функциями $y(t)$ и $x(t)$ хотя бы при некоторых значениях t интегральная непропорциональность для всех t, лежащих на числовой оси правее этих значений, уже не будет равна нулю, даже при соблюдении пропорциональной зависимости между функциями $y(t)$ и $x(t)$ в указанных точках. Это происходит в результате того, что интегралы (7) несут информацию о поведении функции не только в данной точке t, но и на всем интервале $[t_0;t]$. Ослабить влияние поведения функции в предыдущих точках на значение интегральной непропорциональности в текущей точке можно путем уменьшения длины интервала $[t_0;t]$. Предлагается при вычислении интегральной непропорциональности пользоваться следующим алгоритмом.

1. В случае непрерывных функций $y(t)$ и $x(t)$ разбить область задания на n равных отрезков длиной T. В случае дискретного задания функций выбрать интервал T, кратный шагу дискретности:

$t_0,\ t_0+T, \dots t_0+nT,$

$y_0=y(t_0),\ y_1=y(t_0+T), \dots y_n=y(t_0+nT),$

$x_0=x(t_0),\ x_1=x(t_0+T), \dots x_n=x(t_0+nT).$

2. На каждом интервале вычислить значения интегралов

$$Iy_1 = \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)dt\,, \quad Iy_2 = \int_{t_0+T}^{t_0+2T} y(t)dt\,, \quad ..., \quad Iy_n = \int_{t_0+(n-1)T}^{t_0+nT} y(t)dt\,,$$

$$Ix_1 = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt\,, \quad Ix_2 = \int_{t_0+T}^{t_0+2T} x(t)dt\,, \quad ..., \quad Ix_n = \int_{t_0+(n-1)T}^{t_0+nT} x(t)dt\,,$$

которые представляют собой площади под кривыми $y(t)$ и $x(t)$ на интервалах $[t_0 + kT; t_0 + (k+1)T]$, где $k = 1 - n$.

3. Исследовать на непропорциональность функции I_y и I_x.

Длина отрезка T выбирается с учетом требуемой чувствительности к изменению зависимости между исследуемыми функциями $y(t)$ и $x(t)$.

Таким образом, использование предложенных интегральных непропорциональностей позволяет расширить область применения непропорциональностей, предложенных в [1], при решении задач диагностики и распознавания образов.

SUMMARY

The characteristics of numerical functions - disproportion are known. On their basis the new characteristics - integrated disproportion are developed. Use offered integrated disproportion allows to expand area of application disproportions. Integrated disproportion allow quantitatively to estimate a deviation of dependence from proportionality, proportional at unknown factor. Such necessity arises at the decision of tasks of diagnostics and control of technical devices, analysis электрокардиограмм, comparison of images, management of technological processes.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авраменко В.В. Характеристики непропорциональности числовых функций / Деп. в ГНТБ Украины 19.01.1998, №59, Ук98.
2. Авраменко В.В., Карпенко А.П. Решение задач технической диагностики и сравнения образов с помощью оценки отличия зависимости между двумя функциями от пропорциональной //Вісник СумДУ, 1999.- 2(13). -С. 103-107.
3. Карпенко А.П., Авраменко В.В. Анализ электрокардиограмм с помощью характеристик непропорциональности числовых функций // 3-й Міжнародний форум "Радіоелектроніка і молодь у XXI ст": Доповіді / ХТУРЕ. – Харків, 1999. – 499с.

Поступила в редколлегию 21 сентября 1999 г.

УДК 681.516.42.001.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПЕРЕХОДНЫХ СОСТОЯНИЯ

И.Н. Ляпа, адъюнкт; В.М.Герасимив, адъюнкт
(Военный институт артиллерии при СумГУ)

При разработке современных информационно-управляющих систем (ИУС) и исследовании их физических процессов большое значение приобретают методы исследования многомерных систем управления (СУ), в которых одновременно регулируются две и более переменных. СУ, предназначенные для одновременного управления несколькими взаимосвязанными физическими процессами, называются многомерными, или системами с несколькими регулируемыми величинами. К многомерным СУ относятся