

## ВИЗНАЧЕННЯ РОБОТИ СИЛИ ТЕРТЯ ПІД ЧАС РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПО ДУЗІ КОЛА

*І.В. Павленко, асистент,  
Сумський державний університет, м. Суми*

*У роботі розв'язана задача про рух матеріальної точки по дузі кола з урахуванням сили тертя ковзання. З'ясована залежність кута зупинки від коефіцієнта тертя. Аналітично визначена робота непотенціальної сили.*

**Ключові слова:** динаміка, сила, тертя, робота, матеріальна точка.

*В работе решена задача о движении материальной точки по дуге окружности с учётом силы трения скольжения. Выяснена зависимость угла остановки от коэффициента трения. Аналитически определена работа непотенциальной силы.*

**Ключевые слова:** динамика, сила, трение, работа, материальная точка.

### ВСТУП

При розв'язанні задач динаміки матеріальної точки силами тертя на криволінійних ділянках траєкторії нехтують у зв'язку зі складнощами, пов'язаними з розв'язанням нелінійних диференціальних рівнянь руху. Саме тому проблема визначення роботи сили тертя на криволінійній ділянці є актуальною, а відповідна задача має бути розв'язана безпосередньо шляхом інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь основного закону динаміки.

У роботі [1] обґрунтовано необхідність урахування роботи сил тертя на криволінійних ділянках траєкторії точки. Систему диференціальних рівнянь основного закону динаміки можна наближено розв'язати із застосуванням чисельних методів [2], а роботу сили тертя можна визначити експериментально.

### 1. ТЕОРЕТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

#### 1.1. Розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь основного закону динаміки матеріальної точки

Розглянемо рух матеріальної точки масою  $m$  по коловій траєкторії радіусом  $R$  у вертикальній площині під дією активної сили тяжіння  $\vec{G}$  (рис. 1).

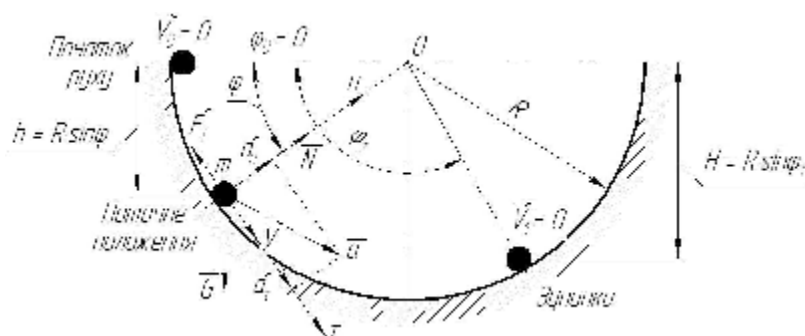


Рисунок 1 – Розрахункова схема

Згідно з принципом звільнення зв'язків замінюємо шорстку поверхню нормальною реакцією  $\vec{N}$  і силою тертя  $\vec{F}_T$ . Таким чином, на матеріальну

точку діють такі сили: сила тяжіння  $\vec{G}$ , спрямована вертикально вниз; нормальна реакція  $\vec{N}$ , спрямована до центра  $O$  кола, тобто по внутрішній нормалі  $n$  до траєкторії; сила тертя ковзання  $\vec{F}_T$ , спрямована по дотичній до траєкторії у бік, протилежний напрямку  $\tau$  швидкості  $\vec{V}$ . Під дією цієї системи трьох сил точка набуває прискорення  $\vec{a}$ , яке можна розкласти на нормальне  $\vec{a}_n$  і тангенціальне  $\vec{a}_\tau$ . Рух точки описується основним законом динаміки [3]:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_T. \quad (1)$$

Оскільки траєкторія точки відома, будемо використовувати натуральний спосіб задання руху точки. У проекціях на осі  $n$  і  $\tau$  рівняння (1) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} ma_n = G_n + N_n + F_{Tn}; \\ ma_\tau = G_\tau + N_\tau + F_{T\tau}. \end{cases} \quad (2)$$

Проекції сил, що діють на точку,

$$G_n = -mg \sin \varphi, \quad G_\tau = mg \cos \varphi; \quad N_n = N, \quad N_\tau = 0; \quad F_{Tn} = 0, \quad F_{T\tau} = -F_T. \quad (3)$$

Задача про рух матеріальної точки по криволінійній траєкторії не є тривіальною, оскільки під час руху сила тертя змінюється як за модулем, так і за напрямком залежно від кутової координати  $\varphi$  (рис. 1). Відповідно до закону тертя сила тертя ковзання пов'язана з нормальною реакцією коефіцієнтом тертя  $f$  (останній вважатимемо незмінним):

$$F_T = fN. \quad (4)$$

Виразимо компоненти прискорення точки через лінійну швидкість:

$$\begin{cases} a_n = \frac{V^2}{R}; \\ a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{dV}{d\varphi} = \frac{V}{R} \frac{dV}{d\varphi}, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість точки.

З урахуванням залежностей (3) – (5) система (2) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} m \frac{V^2}{R} = N - mg \sin \varphi; \\ m \frac{V}{R} \frac{dV}{d\varphi} = mg \cos \varphi - fN. \end{cases} \quad (6)$$

Знаходячи з першого рівняння (6) нормальну реакцію

$$N = m \left( \frac{V^2}{R} + g \sin \varphi \right) \quad (7)$$

і підставляючи її до другого рівняння (6), після скорочення на масу матимемо

$$V \frac{dV}{d\varphi} + fV^2 = gR(\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (8)$$

Отримане рівняння запишемо щодо функції квадрата швидкості

$$\psi(\varphi) \equiv V^2(\varphi), \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi}{d\varphi} + f\psi = gR(\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (10)$$

Останнє рівняння є лінійним диференціальним першого порядку. Його загальний розв'язок шукатимемо у вигляді суми загального розв'язку  $\bar{\psi}$  однорідного рівняння

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{\psi}}{d\varphi} + f\bar{\psi} = 0 \quad (11)$$

і окремого розв'язку  $\psi^*$  неоднорідного рівняння

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi^*}{d\varphi} + f\psi^* = gR(\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (12)$$

Розділивши змінні у рівнянні (10), отримаємо

$$\frac{d\bar{\psi}}{\bar{\psi}} = -2f d\varphi, \quad (13)$$

інтегралом якого є функція

$$\bar{\psi} = Ce^{-2f\varphi}, \quad (14)$$

де  $C$  – константа інтегрування, яка підлягає визначенню із певної початкової умови.

Функцію  $\psi^*$  шукатимемо у такому вигляді:

$$\psi^* = a \cos \varphi + b \sin \varphi, \quad (15)$$

що після підстановки до рівняння (12) і порівняння коефіцієнтів біля  $\cos \varphi$  і  $\sin \varphi$  дає систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих констант  $a$  і  $b$ :

$$\begin{bmatrix} 2f & 1 \\ -1 & 2f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = 2gR \begin{Bmatrix} 1 \\ -f \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Значення  $a$ ,  $b$  і функції  $\psi^*$  такі:

$$a = \frac{6fgR}{1+4f^2}; \quad b = 2gR \frac{1-2f^2}{1+4f^2}, \quad (17)$$

$$\psi^* = \frac{2gR}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi + (1-2f^2) \sin \varphi \right]. \quad (18)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (10)

$$\psi = C e^{-2f\varphi} + \frac{2gR}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi + (1-2f^2) \sin \varphi \right]. \quad (19)$$

Задовольнимо початкову умову задачі: на початку руху  $\varphi = \varphi_0$  і  $V = V_0$ ,

$$V_0^2 = C e^{-2f\varphi_0} + \frac{2gR}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi_0 + (1-2f^2) \sin \varphi_0 \right], \quad (20)$$

звідки

$$C = e^{2f\varphi_0} \left\{ V_0^2 - \frac{2gR}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi_0 + (1-2f^2) \sin \varphi_0 \right] \right\}. \quad (21)$$

Після підстановки останньої залежності у формулу (19) із урахуванням (9) отримуємо

$$V(\varphi) = \left\{ e^{2f(\varphi_0-\varphi)} \left( V_0^2 - \frac{2gR}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi_0 + (1-2f^2) \sin \varphi_0 \right] \right) + \frac{2gR}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi + (1-2f^2) \sin \varphi \right] \right\}^{1/2}. \quad (22)$$

За допомогою формул (4), (7) і (22) знаходимо силу тертя

$$F_T = fm \left( e^{2f(\varphi_0-\varphi)} \left\{ \frac{V_0^2}{R} - \frac{2g}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi_0 + (1-2f^2) \sin \varphi_0 \right] \right\} + \frac{2g}{1+4f^2} \left[ 3f \cos \varphi + (1-2f^2) \sin \varphi \right] + g \sin \varphi \right). \quad (23)$$

В окремому випадку, коли точка починає рух при  $\varphi_0 = 0$  і  $V_0 = 0$  (рис. 1), сила тертя

$$F_T = \frac{3fmg}{1+4f^2} \left[ 2f (\cos \varphi - e^{-2f\varphi}) + \sin \varphi \right]. \quad (24)$$

## 1.2. Залежність коефіцієнта тертя від кута зупинки

Сила тертя є непотенціальною силою. Для визначення її роботи, яка залежить від форми траєкторії точки і від початкових умов руху, визначимо елементарну роботу

$$\delta A(\bar{F}_T) = F_T ds, \quad (25)$$

де  $ds$  – елементарна дуга кола:

$$ds = R d\varphi. \quad (26)$$

З урахуванням формул (3) – (4), (23) і (25) – (26)

$$\delta A(\bar{F}_T) = -fmR \left( e^{2f(\varphi_0 - \varphi)} \left\{ \frac{V_0^2}{R} - \frac{2g}{1 + 4f^2} [3f \cos \varphi_0 + (1 - 2f^2) \sin \varphi_0] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{2g}{1 + 4f^2} [3f \cos \varphi + (1 - 2f^2) \sin \varphi] + g \sin \varphi \right) d\varphi. \quad (27)$$

Повна робота сили тертя на переміщенні точки, починаючи з кута  $\varphi_0$  і завершуючи кутом  $\varphi_1$ , є інтегралом

$$A(\bar{F}_T) = -fmR \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( e^{2f(\varphi_0 - \varphi)} \left\{ \frac{V_0^2}{R} - \frac{2g}{1 + 4f^2} [3f \cos \varphi_0 + (1 - 2f^2) \sin \varphi_0] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{2g}{1 + 4f^2} [3f \cos \varphi + (1 - 2f^2) \sin \varphi] + g \sin \varphi \right) d\varphi. \quad (28)$$

В окремому випадку, коли точка починає рух при  $\varphi_0 = 0$  і  $V_0 = 0$ ,

$$A(\bar{F}_T) = -\frac{3fmgR}{1 + 4f^2} (e^{-2f\varphi} - \cos \varphi + 2f \sin \varphi). \quad (29)$$

Визначимо залежність між коефіцієнтом тертя і кутом зупинки, використовуючи теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A(\bar{G}) + A(\bar{F}_T). \quad (30)$$

Для нульових початкової і кінцевої швидкостей точки ( $V_0 = V_1 = 0$ ) останнє рівняння набирає вигляду

$$A(\bar{G}) + A(\bar{F}_T) = 0. \quad (31)$$

Із застосуванням формули (29) і виразу для роботи сили тяжіння (рис. 1)

$$A(\bar{G}) = mgR \sin \varphi \quad (32)$$

отримаємо нелінійну залежність між коефіцієнтом тертя  $f$  і кутом зупинки  $\varphi$ :

$$e^{-2f\varphi} - \cos \varphi + 2f \sin \varphi = 0. \quad (33)$$

Наприклад, для  $f = 0,6$  кут зупинки  $\varphi_1 = 90^\circ$  (рис. 2). Залежність коефіцієнта тертя  $f$  від кута зупинки  $\varphi$  подано на рис. 2.

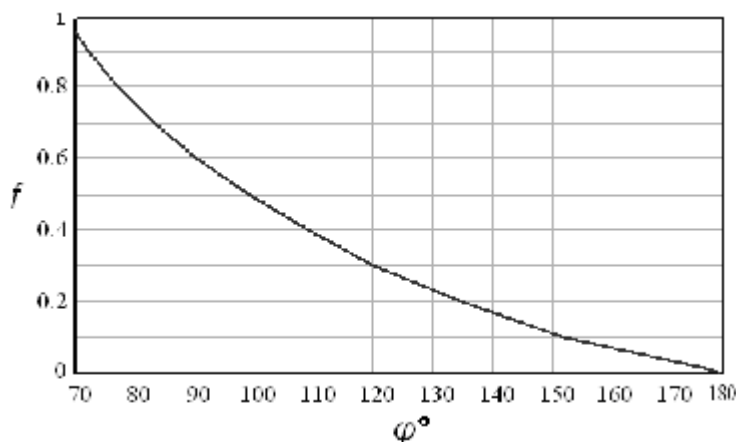


Рисунок 2 – Залежність коефіцієнта тертя від кута зупинки

### ВИСНОВКИ

При розв'язанні задач динаміки матеріальної точки, як правило, замість безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь другого закону Ньютона використовують загальні теореми в інтегральному вигляді, в тому числі – теорему про зміну кінетичної енергії. Для застосування останньої необхідно вміти визначати роботи сил, що діють на точку, на скінченних переміщеннях. При застосуванні зазначеної теореми на криволінійних ділянках нехтують силою тертя, що вносить суттєві похибки в розрахунки. Так, наприклад, для коефіцієнта тертя 0,1 кут зупинки відрізняється на  $28^\circ$  від аналогічного кута без урахування тертя, що становить відносну похибку 16%. Для коефіцієнта тертя 0,2 така похибка становить 25%.

На підставі розгляду системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки по криволінійній траєкторії аналітичним шляхом визначена робота сили тертя, змінної як за модулем, так і за напрямом. З'ясована залежність кута зупинки від коефіцієнта тертя для нульових початкових умов задачі.

### SUMMARY

#### DETERMINATION OF THE FRICTION WORK OF THE MATERIAL PARTICLE MOVEMENT IN A CIRCULAR ARC

*I.V. Pavlenko,*  
Sumy State University, Sumy

*In this paper the material particle moving problem was solved for circular trajectory, included the friction force. The axial-friction dependence was found. The non-conservative work was solved analytically.*

**Keywords:** *dynamics, force, friction, work, material particle.*

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акуленко В.Л., Спажакин В.А. Наклонная плоскость. Как избежать противоречий при решении задач // Учебно-методическая газета «Физика».- М.: Издательский дом «Первое сентября» – 2010, №4 (899).
2. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов.- М.: Физматлит, 2003.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2004.– 514 с.
4. Matematyka. Poradnik encyklopedyczny/ Pod redakcją I.N.Bronszteina i K.A.Siemiendajewa.- Warszawa: Wydawnictwo naukowe PWN, 2004.

*Надійшла до редакції 23 березня 2010 р.*