УДК 621. 38

# ЧИСЛО І СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ В ЕЛЕКТРОННИХ ЦИФРОВИХ СИСТЕМАХ

***О.А. Борисенко***
*Сумський державний університет*

*У даній роботі розглянуті загальні підходи до роз'яснення поняття числа і систем числення, а також до практичного застосування сучасних систем числення в різних науках. Серед цих наук - теорія кодування, теорія чисел, теорія побудови цифрової техніки. Остання з цих наук важлива для розроблення більш швидкодіючих і надійних систем електронної обчислювальної техніки. Вказано місце сучасних систем числення в дискретній математиці як її підвалини при побудові математичних структур.*

В основі сучасної електронної цифрової техніки лежать числа і системи числення, які ці числа породжують. Тому для подальшого розвитку цифрової техніки важливо проводити подальший пошук нових систем числення і виявляти їх переваги в порівнянні з іншими системами числення, які на даний час вже широко використовуються. Такі системи числення можуть бути більш ефективними при розв'язанні конкретних задач побудови цифрових пристроїв чи систем. Виходячи з цього, важливо з'ясувати, що ж таке в загальному розумінні являють число і система числення. Це непроста задача і, звичайно, вона не може бути досконало розв'язана в даній роботі, але все ж таки деякі аспекти її можна розглянути, що буде корисно для розв'язування поставленої задачі в подальшому.

## 1 ОЗНАЧЕННЯ ЧИСЛА

В основі поняття числа лежить абстракція у вигляді *кількості* елементів скінченної множини, яка не має форми. Однак число є більш загальним поняттям, ніж кількість, оскільки, окрім того, що несе в собі інформацію, ще й надає цій кількості специфічної *форми* у вигляді кодового *зображення*. Його наявність дозволяє виконувати над кількістю різні арифметичні і логічні операції.

При цьому слід звернути особливу увагу на те, що одна і та ж кількість може зображатися по-різному. Так, десяткове число 123 може мати ще зображення, наприклад, у формі двійкового числа 1111011. Таких послідовностей, які кодують одну і ту ж кількість, але мають різний вигляд, може бути безмежно багато. Тому треба відрізняти кількість елементів в множині від його зображення, яке формує цю кількість у вигляді числа. Від форми числа значною мірою залежить ефективність виконання арифметичних і логічних операцій над ним.

Однак і формі числа можуть відповідати різні кількості. Наприклад, п'ятіркове число 123 кодує зовсім іншу кількість, ніж таке саме за виглядом десяткове число 123. У першому випадку п'ятіркове число 123 кодує в десятковій системі числення кількість 38, а в другому - 123. Більше того, послідовність знаків 123 може розглядатися навіть не як число, а як перестановка з трьох елементів, і тоді ця послідовність не кодує ніякої кількості зовсім.

Як випливає із сказаного вище, під числом можна розуміти, з одного боку, кодове зображення кількості у вигляді його форми, а з іншого - саму кількість. Так, число сприймається і в даній роботі, тобто воно розглядається або ж як кількість, або ж як зображення цієї кількості у вигляді якоїсь із її форм, або ж як те і інше поняття разом. Поняття числа, яке використовується в даній роботі, буде зрозуміло з контексту. Воно залежить від того, який робиться наголос в матеріалі, що подається.

Відповідно до двох вище названих функцій числа - як носія кількості і одночасно як зображення її форми - існують дві пов'язані з ними теорії. Перша вивчає властивості чисел безвідносно до форми їх подання. Цим займається така непроста наука, як теорія *чисел*. Друга теорія знаходить способи ефективного формування чисел шляхом їх кодування. Це вже буде інша наука – теорія *кодування* чисел.

Важливу роль при кодуванні чисел відіграють їх особливі види, які називаються *цифрами*. Ними називаються такі специфічні числа, з яких складаються як завгодно великі інші числа. Порядок розміщення цифр у числах може бути різний. Найчастіше це буде лінійна форма, коли цифри йдуть послідовно одна за одною, але можуть бути і розміщення цифр на площині у вигляді матриць. В цих розміщеннях цифр проявляється спосіб кодування чисел, від якого в багатьох випадках залежить ефективність їх використання на практиці.

## 2 КІЛЬКІСНІ І ПОРЯДКОВІ ФУНКЦІЇ ЧИСЕЛ

Число, крім кількості, також використовується для визначення порядку, який складається між елементами множин. Таке число називається ще *номером*. Як правило, це буде ціле невід'ємне число. Але, як вже говорилося вище, число кодує також і кількість. Тобто в загальному плані за своїми функціями число повинно давати можливість отримувати відповідь на питання як про кількість елементів у множинах, так і про порядок їх розміщення. В першому випадку відповідь буде мати вигляд - один, два, три, ..., а в другому - перший, другий, третій ...

На першому з наведених вище питань базуються *кількісні* операції над елементами множин, а на другому – різні способи впорядкування цих елементів. Кількісні операції вивчає теорія *кардинальних* чисел, а порядкові - теорія *порядкових* чисел. Ці теорії дуже важливі для розуміння природи числа, яка до сьогоднішнього дня ще не зовсім визначена і тому потребує подальших досліджень.

Способи кодування чисел не залежать від того, що визначається – кількість чи порядок елементів в множині, тобто за виглядом числа можна як встановлювати їх кількість, так і номер елемента в ній по порядку. Наприклад, число 120 може визначати кількість - сто двадцять, а може і порядок - сто двадцятий. Однак самі властивості кількості і порядку, як вже відмічалося раніше, відрізняються між собою. Відповідь на кількість елементів у тій чи іншій не порожній множині дає *кількісне* число, а на порядок розміщення того чи іншого елемента в ній – *порядкове* число – тобто його номер.

Тільки числа, які мають вказані дві функції, можуть вважатися достатньо ефективними при їх використанні на практиці, тому що з допомогою цих функцій можна дістати відповідь на питання: скільки елементів містить множина і яке місце в ній по порядку займає той чи інший елемент? В останньому випадку розв'язується задача *нумерації* чисел.

При цьому номерами, як правило, вважаються числа, які не тільки вирішують питання нумерації елементів, а і потребують для своєї побудови *мінімального* числа знаків. Тобто не кожне число можна вважати номером, а тільки те, яке несе в собі максимальну кількість інформації, а отже не є надлишковим. Тому задача нумерації належить не тільки до задачі визначення порядку, а також і до задачі стиснення інформації.

## 3 НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

Кількісне число характеризує деякий клас скінченних множин, тобто множин, в яких між їх елементами можна установити взаємно-однозначну відповідність. Такими множинами, наприклад, можуть бути множина п'яти пальців руки і множина букв слова „книга", тому що кожному пальцю може бути поставлена у відповідність одна із букв слова „книга". Очевидно, що числу п'ять може бути поставлено у відповідність дуже велику кількість різних множин, і тому воно виражає те спільне, що мають ці множини між собою, - кількість елементів, яка дорівнює п'яти. Тобто число п'ять створює клас множин, кожна з яких містить рівно п'ять елементів.

Такі ж класи створюють і інші числа - 1, 2, ... Наведена нескінченна упорядкована дискретна послідовність чисел має назву *натурального* ряду чисел. Якщо конкретне число в ряду визначає кількість чисел в ньому, то це буде *кількісне* натуральне число, а якщо порядковий номер цього числа, то *порядкове* натуральне число. Ця послідовність дискретна, тому що між числами натурального ряду не існує проміжних елементів. Наприклад, між числами 2 і 3 немає такого елемента, як, наприклад, 2,5. У цьому ряду немає також найбільшого числа, тому що, яке б не взяли натуральне число, за ним буде йти на одиницю більше інше наступне натуральне число, яке відповідає попередній множині елементів з ще приєднаним до неї одним елементом.

## 4 НУЛЬ І ОДИНИЦЯ В РЯДУ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Слід окремо відзначити, що натуральний ряд починається з одиниці, а не нуля. Нуль походить від латинського слова порожній (nulus), тобто відображає порожню множину. Нуль не має всіх властивостей натуральних чисел і в той же час має специфічні властивості, яких не мають натуральні числа. Наприклад, якщо помножити будь-яке число на нуль, то одержимо нуль, тобто одне і те ж число. Для інших натуральних чисел це не так.

Хоча, що правда, і одиниця, з якої починається натуральний ряд, має деякі властивості, відмінні від інших чисел натурального ряду. Так, якщо помножити одиницю на будь-яке число, то отримаємо те ж саме число. Для других чисел так не буде. Тому невипадково визначний філософ і математик сімнадцятого століття Лейбніц вважав одиницю і нуль особливими числами. Одиницю він вважав божественним началом і початком всього сущого, а нуль – небуттям всього. Але все ж таки одиниця входить в натуральний ряд, а нуль ні. Це пов'язано з історією створення цього ряду, який до надання йому сучасного вигляду як нескінченної послідовності цілих чисел створювався не одну тисячу років.

При створенні цього ряду розглядались тільки множини, які не були порожніми, і тому не було необхідності в нулі, який би відображав кількість елементів у порожній множині. Відповідно до цих не порожніх множин лічба теж починалася з одиниці, а не нуля. Потреба в нулі з'явилася тільки тоді, коли абстрактне мислення людей дійшло до такого ступеня, на якому виникла потреба в порожній множині. В цьому випадку необхідно було позначити кількість елементів в цій множині. Таким позначенням був нуль.

Множину, що утворюється приєднанням до множини натуральних чисел нуля, називають множиною цілих *невід'ємних* чисел. Нуль у цій множині ставлять перед числом 1, тобто маємо таку упорядковану множину невід'ємних чисел – 0,1,2,3, ... . Множина цих чисел має всі властивості натурального ряду чисел, тобто вона упорядкована, дискретна і нескінченна, але відрізняється від нього тим, що починається з нуля, а не одиниці.

## 5 АКСІОМА ЛІЧБИ

Вказані вище дві теорії кардинальних і порядкових чисел так чи інакше використовуються, крім кодування чисел, ще і для *лічби* елементів у множинах, тобто для їх підрахунку шляхом послідовного перебору.

Лічба відіграє особливу роль при кодуванні чисел, тому що з допомогою саме лічби можна одночасно визначити як порядок розміщення елементів в множинах, так і їх кількість в них. При цьому результат лічби не залежить ні від порядку, в якому вона проходить, ні від системи нумерації предметів. Важливо лише, щоб при лічбі не було пропущено жодного елемента і щоб кожен елемент був полічений один раз. Тільки тоді може бути знайдений порядок кожного елемента в множині і знайдена їх загальна кількість. Це визначення відоме як *аксіома* лічби.

## 6 ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Як вже зазначалося раніше, число, визначене як кількість, є абстрактним поняттям і не залежить від способів його зображання – кодування, але сама техніка виконання над ним арифметичних і логічних операцій істотно залежить від цих способів. Такі способи реалізуються з допомогою систем *числення* чи ще, як інколи їх називають, систем *нумерацій*.

Поняття числа невід'ємно пов'язане з *системами числення*, які у своєму розвитку пройшли важкий шлях від найпростіших непозиційних систем через лічбу на пальцях до теперішніх позиційних систем числення.

*Системою числення, або нумерацією, називається сукупність правил і знаків, за допомогою яких можна зобразити (кодувати) будь-яке невід'ємне число.*

До систем числення висувається ряд вимог, серед яких найбільш важливими є вимоги *однозначного* кодування невід'ємних чисел 0,1, ... з деякої їх скінченної множини - *діапазону P* за *скінченне* число кроків і можливістю виконання над числами *арифметичних* і *логічних* операцій. Крім того, системи числення розв'язуютьще задачу *нумерації*, тобто задачу ефективного переходу від зображень чисел до номерів, які в даному випадку повинні мати *мінімальну* кількість цифр. Від вдалого чи невдалого вибору системи числення залежить ефективність рішень нею вказаних задач і її використання на практиці.

При вирішенні задачі кодування чисел може виникнути необхідність мати зображення чисел, які розв'язують деякі допоміжні задачі, наприклад, задачу підняття перешкодостійкості чисел. Але в цьому випадку вони можуть бути побудовані досить складно і тому не зовсім економно з точки зору кількості цифр у них. Тому часто на практиці трапляється зворотна задача до розглянутої вище – задача нумерації зображень чисел. При її розв'язанні відбувається *стиснення* інформації, що дозволяє знаходити розв'язок ряду як теоретичних, так і практичних задач.

При побудові зображень чисел і при їх нумерації системи числення в загальному плані вирішують задачу *кодування* і тому теорію їх побудови слід віднести до теорії кодування. Однак особливість систем числення, яка являє собою потребу у виконанні ними арифметичних і логічних операцій, приводить до необхідності розглядати їх також і з позиції теорії чисел.

Тобто теорія позиційних систем числення межує між теорією кодування і теорією чисел. В цьому проявляються її особливість і специфіка, хоча здебільшого вона все ж таки належить до теорії кодування. Виходячи з такого свого стану, ця теорія повинна розглядатися як самостійна наука і тому мати свій математичний апарат і свої, тільки їй притаманні задачі як кодування чисел, так і їх теоретичного аналізу.

На сьогодні інколи вважається, що на основні практичні питання побудови систем числення знайдені відповіді, тому що на практиці добре себе зарекомендували наявні системи числення. Звідсиля випливає, що в даний час немає потреби розвивати їх теорію. Але такий підхід має свої недоліки, оскільки розвиток теорії систем числення має в собі ще великий не використаний на практиці позитивний потенціал.

Це підтверджує і те, що час від часу з'являються нові системи числення з новими властивостями і можливостями, які можна використовувати в тих чи інших сферах науки і практики. Серед таких систем числення є досить складні, до яких можна віднести системи залишкових класів, факторіальні, поліадичні, фібоначчієві і багато інших.

Так, вони не настільки економні і прості з точки зору кількості елементів у їх структурах, як, наприклад, десяткова, але ж вони мають свої позитивні специфічні властивості, які слід використовувати на практиці. Це і можливість генерації різних комбінаторних об'єктів, таких, наприклад, як перестановки або сполучення з самими різними обмеженнями на них, так і їх перешкодостійкість, і інші більш специфічні властивості, які проявляються при конкретних застосуваннях. Крім того, в ряді випадків з допомогою таких систем числення можна підняти швидкодію обчислювальних пристроїв і систем до величин, які недосяжні при використанні звичайних традиційних систем.

Ці системи не є конкурентами традиційних систем числення, як інколи це вважається, хоча б тому, що останні за своєю універсальністю і простотою виконання арифметичних і логічних операцій недосяжні для будь-яких інших систем числення з більш складною структурою. Однак такі системи числення є ефективним доповненням звичайних універсальних систем, тому що можуть сумісно з ними працювати при розв'язанні одних і тих же задач, збільшуючи надійність чи швидкодію пристроїв і систем, які їх використовують. З цього випливає, що не зовсім правильним є протиставлення звичайних простих і більш нових складних систем числення. Для будь-якої системи числення можуть визнайтися особливі умови, де вона зможе зарекомендувати себе з кращої сторони.

## 7 ІСТОРІЯ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

Історично першими виникли непозиційні системи числення. В їх фундаменті лежить кількісний підхід до визначення числа, в якому для кодування тих чи інших кількостей вигадувалися особливі знаки-числа. Кожному такому знаку відповідав кількісний еквівалент. Наприклад, в так званій римській нумерації знаку $X$ відповідала кількість елементів множини, яка дорівнювала 10.

В подальшому такими знаками – числами користувалися також і для одержання інших чисел. Так, якщо перед знаком X ставилася вертикальна риска, то отримували знак IX, який означав, що від десяти треба відняти одиницю, і результуюча кількість буде дорівнювати 9. Знаки, подібні до X, називаються вузловими. Вони широко використовувались в первісних непозиційних системах числення. Слід ще раз відмітити, що серед цих знаків не було знака, який би відповідав нулю. Це свідчить про те, що нуль в той час ще не був сформований як число.

Кількість чисел, яку можна було одержати з допомогою непозиційного кодування, через його складність і відповідно велику кількість чисел, які треба було запам'ятовувати, була обмежена декількома сотнями і, крім того, над цими числами досить важко було виконувати арифметичні і логічні операції. Тому в подальшому при розвитку науки з'явилася потреба у більш ефективних системах числення, які б мали прості правила кодування чисел і тим самим не обмежували б їх кількість та легко виконували над ними арифметичні і логічні операції. Такими системами чисел були *позиційні* системи.

Таким чином, системи числення і на їх основі розуміння числа ще далеко не закінчили свого розвитку, а, можливо, навіть ті результати, які маємо на сьогодні, це лише початок серйозного розуміння значення систем числення для математики і електронних систем. Сьогодні системи числення в переважній своїй більшості розв'язують лише задачі виконання арифметичних і логічних операцій в електронних обчислювальних системах. Але вони можуть робити значно складніші операції, до яких належить і задачі стиснення інформації, і перешкодостійкого кодування, і шифрування даних, і зовсім на сьогодні незвичні операції - це генерування математичних об'єктів, в тому числі і дуже складних. Але якщо говорити взагалі то системи числення в неявному вигляді є тим, що складає підвалину всієї дискретної математики, тому що вони створюють структуру будь-яких її об'єктів.

## SUMMARY

*The general aproach to explanatihg the concepts of a number systems as well putling into practice contemporary number systems in different applications, is considered in the paper. There are coding theory, number theory and theory of constructing digital technics among these applications. Theory of constructing digital technics is important for developing more speed and reliable electronic computed equipment. The place of contemporary number systems is pointed out in discrete mathematics, as its basement for building mathematical structures.*

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кухар В. М., Білий Б. М. Теоретичні основи початкового курсу математики. - Київ: Вища школа, 1980.
2. Вивалюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. - Київ: Вища школа, 1988.

***Борисенко О.А.,*** д-р тех. наук, професор, СумДУ, м. Суми

*Надійшла до редакції 12 вересня 2007 р.*