УДК 681.5

# РАСПОЗНАВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ БАЙЕСА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПОТЕРЬ

***А.Д. Полонский,* Б.К. Лопатченко, А.И. Новгородцев, В.Н. Гапич**
*Сумский государственный университет*

*На основе сочетания методов теории нечетких множеств и алгебры ранговых предикатов (АРП) решена задача распознавания состояний объектов управления (РСОУ) по критерию Байеса в условиях неопределенности (УН) потерь. Приведены экспериментальные результаты, подтверждающие эффективность применения предложенного метода РСОУ в УН потерь.*

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу РСОУ, когда относительно случайного процесса (СП) $u$, наблюдаемого на выходе канала обратной связи (КОС), может оказаться справедливой одна из гипотез:

$$H_\theta : u = (1-\theta)x_0 + \theta x_1 + v, \ \ \theta = \overline{0,\ 1},$$

где $x_\theta$ – сигнал, соответствующий $\theta$-му классу состояния ОУ; $v$ – помеха наблюдения.

Решение рассматриваемой задачи сводится к нахождению оценки $\hat{\theta}$ класса $\theta$, для чего может быть использован ранговый предикат [1]

$$\hat{\theta} = \pi(u, U_0) = \begin{cases} 0 \mid u = u^{(1)} = \min(u, U_0); \\ 1 \mid u = u^{(2)} = \max(u, U_0), \end{cases}$$

где $u^{(r)} = \Xi_r(u, U_0)$ – наименьший $(r = 1)$ и наибольший $(r = 2)$ по величине элемент множества $\{u, U_0\}$; min (max) – операция конъюнкции (дизъюнкции) непрерывной логики; $\Xi_r(u, U_0)$ – функция порядковой логики ранга $r$; $U_0$ – порог, оптимальный в смысле заданного критерия проверки гипотез.

*Актуальность исследования.* Наибольшее распространение в научной литературе получил подход к определению порога, основанный на минимизации критерия Байеса, рассматриваемого как среднее значение потерь [2]:

$$\bar{U}_0 = \arg[\min_{\{U_0\}} J(U_0)],$$

где $\bar{U}_0$ – оценка порога $U_0$; $J(U_0)$ – байесовский риск

$$J(U_0) = P_0 P\{U_0 \mid H_0\}(\Pi_{00} - \Pi_{10}) + P_1 P\{U_0 \mid H_1\}(\Pi_{10} - \Pi_{11}); \quad (1)$$

$P_\theta$ – априорные вероятности гипотез $H_\theta$ $(\theta = \overline{0,\ 1})$; $P\{U_0 \mid H_\theta\}$ – вероятности РСОУ; $\Pi_{ij}(i, j = \overline{0,\ 1})$ – потери при правильном $(i = j)$ и ошибочном $(i \neq j)$ РСОУ.

Байесовский подход к определению порога предполагает, что потери известно точно. Это предположение зачастую сильно идеализирует реальную ситуацию, когда существует неопределенность в задании ожидаемых потерь при возможных исходах. В этом случае подход к определению порога из условия минимума байесовского риска не пригоден. Поэтому остаётся актуальной проблема РСОУ в УН потерь.

*Цель исследования* состоит в решении проблемы РСОУ при задании исходных данных о потерях в виде нечетких множеств.

*Задача исследования* заключается в разработке метода классификации состояний ОУ по критерию байесовского риска при нечетких потерях.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что могут быть определены заранее ограниченные области возможных значений потерь, представляемых нечеткими множествами:

$$\mu_{ij} = \{\Pi_{ij}, U(\Pi_{ij})\},\ i, j = \overline{0,\ 1}, \quad (2)$$

где $U(\Pi_{ij})$ – функция принадлежности (ФП) элемента $\Pi_{ij}$ нечеткому множеству $\mu_{ij}$.

Из (2) следует, что величина байесовского риска, определяемая в общем случае отношением (1), становится нечеткой:

$$\tilde{J}(U_0) = P_0 P\{U_0 \mid H_0\}(\mu_{00} - \mu_{10}) + P_1 P\{U_0 \mid H_1\}(\mu_{10} - \mu_{11}). \quad (3)$$

Требуется определить порог РСОУ при нечетком байесовском риске (3).

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

Использование АРП [1] представляется одним из подходов к решению поставленной задачи. Предлагаемый подход основан не на оценивании порога по критерию (1), как это обычно делается при априори известных потерях, а на обеспечении с максимальной достоверностью условия непревышения среднего риска некоторым заданным допустимым его значением $\mu_{00} = \{\Pi_{00}, U(\Pi_{00})\}$, что характеризует нечеткую цель РСОУ. При этом условие для выбора ФП $U(\Pi_{00})$ задается в виде отношения нестрогого порядка:

$$R_0 = \{\tilde{J}(U_0) \leq \mu_{00}\}. \quad (4)$$

Для оценивания порога из условия (4) перейдем к идентифицируемой переменной $Y = \mu_{00} - \tilde{J}(U_0)$. Отсюда следует еще одно отношение нестрогого порядка:

$$Y = \mu_{00} - P_0 P\{U_0 \mid H_0\}(\mu_{00} - \mu_{01}) - P_1 P\{U_0 \mid H_1\}(\mu_{10} - \mu_{11}) \le 0 . \qquad (5)$$

Отношение (5) задает критерий выбора порога при нечетких потерях в классе.

***Утверждение.*** Реализация критерия (5) достигается в классе функций скалярного произведения (ФСП) [1]:

$$z(y) = \sum_{i=1}^{4} z_i(y) \prod_{j=1}^{4} \pi(z_i(y), z_j(y)) , \qquad (6)$$

где $z_k(y),\ k = \overline{1,\ 4},$ – функции АРП

$$\begin{cases} z_1(y) = \pi(y, U(\Pi_{00}))U(\Pi_{00}) + \pi(U(\Pi_{00}), y))y; \\ z_2(y) = \pi(y, U(\Pi_{01}))U(\Pi_{01}) + \pi(U(\Pi_{01}), y))y; \\ z_3(y) = \pi(y, U(\Pi_{10}))U(\Pi_{10}) + \pi(U(\Pi_{10}), y))y; \\ z_4(y) = \pi(y, U(\Pi_{11}))U(\Pi_{11}) + \pi(U(\Pi_{11}), y))y; \end{cases} \qquad (7)$$

$U(\Pi_{ij})$ – ФП вида

$$U(\Pi_{ij}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mid \Pi_{ij} - A_{ij} \mid}{B_{ij}} \mid \Pi_{ij} \in l_{ij}; \\ 0 \mid \Pi_{ij} \notin l_{ij}; \end{cases} \qquad (8)$$

$l_{ij} = [(A_{ij} - B_{ij}), (A_{ij} + B_{ij})]$; $A_{ij}$ и $B_{ij}$ – параметры ФП, характеризующие соответственно центр и разброс значений соответствующих величин $(i, j = \overline{0,\ 1})$.

***Доказательство.*** Подстановка (8) в (7), а затем в (6) приводит к ФП

$$z(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mid y - Z_A(P) \mid}{Z_B(P)} \mid y \in L; \\ 0 \mid y \in L, \end{cases} \qquad (9)$$

где $L = [(Z_A(P) - Z_B(P)), (Z_A(P) + Z_B(P))]$;

$Z_A(P) = A^T B$; $Z_B(P) = B^T P$;

$A = [A_{00}, A_{ij}, i, j = \overline{0,1}]$; $B = [B_{00}, B_{ij}, i, j = \overline{0,1}]$;

$P = [1, P_0 P\{U_0 \mid H_1\}, P_1 P\{U_0 \mid H_0\}, P_0 P\{U_0 \mid H_0\}, P_1 P\{U_0 \mid H_1\}]$;

$T$ – символ транспонирования векторов.

На рис. 1 представлена графическая интерпретация ФП (9). Анализ графика ФП позволяет сделать вывод о том, что чем меньше значение

$\mu_Y(y)$ в точке $y = 0$, тем строже выполняется критерий (5). А это и требовалось показать.

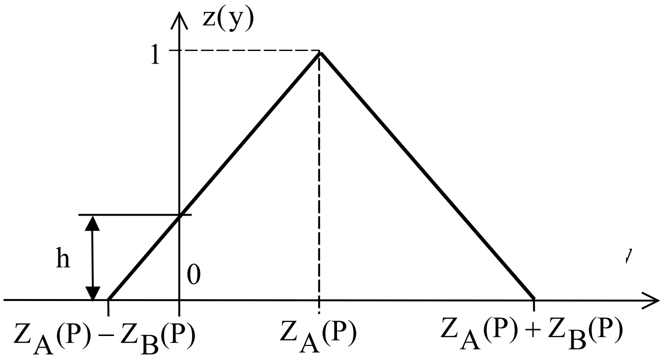


*Рисунок 1 – Линейно-изломная ФП нечетких переменных множеству отношений нестрогого порядка*

Из доказательства утверждения следует, что величина среднего риска с большей достоверностью будет меньше своего допустимого значения. Поэтому оценку $\bar{U}_0$ порога $U_0$ целесообразно определять из условия минимизации величины отрезка $h$ (рис.1), характеризующего степень достоверности выполнения неравенства (5). Решение такой задачи заключается в следующем.

Из (9) *при* $y = 0$ находим

$$z(0) = h = -Z_{(A-B)}(P)/Z_B(P).$$

Решая дифференциальное уравнение $\partial h / \partial U_0 = 0$ и учитывая, что $Z_B(P) \neq 0$, получаем

$$A^T P B^T \frac{\partial P}{\partial U_0} - A^T \frac{\partial P}{\partial U_0} B^T P = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) позволяет определять оценку $\bar{U}_0$ порога $U_0$ для РСОУ в УН потерь. Ожидаемое при этом значение среднего риска является наиболее приемлемым из всех возможных значений, исходя из концепции максимальной степени достоверности выполнения условия (5).

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу РСОУ по критерию байесовского риска в УН потерь и синтезируем классификатор в элементном базисе АРП [1] при следующих исходных данных и ограничениях:

– относительно СП, наблюдаемого на выходе КОС, может оказаться справедливой одна из гипотез о классах состояний ОУ:

$$H_\theta : u \sim F(U_0 \mid x_\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \int_{-\infty}^{U_0} \exp\left[-\frac{(u - x_\theta)^2}{2\sigma_v^2}\right] du, \quad \theta = \overline{0,1}, \tag{11}$$

где $U_0$ – порог, подлежащий определению; $x_\theta$ – детерминированный сигнал, соответствующий $\theta$-му классу состояния ОУ; $v$ – гауссова помеха с нулевым средним и ограниченной дисперсией $D[v] = \sigma_v^2 < \infty$;

– вероятности $P_\theta = P\{H_\theta\}$ гипотез $H_\theta, \theta = \overline{0,\ 1}$ равны:

$$P_0 = P_1 = 0,5; \tag{12}$$

– потери при правильном РСОУ отсутствуют:

$$\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0; \tag{13}$$

– на множестве отношений нестрогого порядка заданы нечеткие потери от ошибок первого и второго рода таким образом, что выполняется условие

$$A_{01}B_{10} - A_{10}B_{01} = 0. \tag{14}$$

При ограничениях (11) – (14) корнем уравнения (10) является оценка порога

$$\bar{U}_0 = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{\sigma_v^2}{x_1 - x_0} \ln \frac{A_{00}B_{00} + A_{10}B_{00}}{A_{00}B_{01} + A_{01}B_{00}}, \tag{15}$$

зависящая как от параметров распределения (11), так и параметров ФП (9), характеризующих степень принадлежности потерь своим возможным значениям. При этом правило РСОУ представляет собой функцию АРП вида

$$z = \pi(u, \bar{U}_0)x_0 + [1 - \pi(u, \bar{U}_0)]x_1. \tag{16}$$

Выражение (16) описывает алгоритм функционирования и структуру (рис. 2) классификатора для РСОУ в УН потерь при ограничениях (12) – (14).

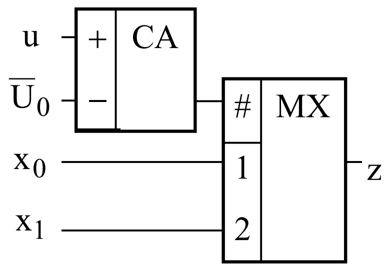


*Рисунок 2 –- Классификатор на основе рангера, состоящего из компаратора CA и мультиплексора MX*

Если на выходе классификатора возникает сигнал $z = x_0$ $(z = x_1)$, то принимается гипотеза $H_0$ $(H_1)$ о том, что в КОС присутствует сигнал, отвечающий классу $\theta = 0$ $(\theta = 1)$ состояния ОУ.

## ВЫВОДЫ

Вышеизложенным методом оценивания порога можно пользоваться для принятия решений по однократному наблюдению при нечетком задании потерь, характерном для этапа проектирования систем управления с наблюдателями типа «классификатор».

*Научная новизна* исследования состоит в том, что поставлена и решена задача РСОУ по критерию байесовского риска в УН потерь.

*Практическая значимостть.* Наличие элементного базиса АРП (рангеров) позволяет решать задачи РСОУ при нечетких потерях, описываемых линейно-изломно-разрывными ФП.

*Сравнение с аналогом.* В настоящее время для решения задач по РСОУ в условиях структурной и параметрической неопределенности находят широкое применение методы теории нейроподобных сетей [3]. Однако в рамках этой теории отсутствуют методы синтеза нейроподобных классификаторов по критерию Байеса в УН потерь.

*Направление дальнейшего исследования.* Представляет научный и практический интерес расширение функциональных возможностей вышеизложенного метода на класс задач по РСОУ в УН, проявляемой в отсутствии априорной информации о функциональном виде распределения случайного процесса в КОС.

## SUMMARY

**IDENTIFICATION STATES OF CONTROL OBJECTS' STATES ON THE BAYES' CRITERION IN THE CONDITIONS OF INDEFINITENESS OF LOSSES**

***A.D. Polonsky, B.K. Lopatchenko, A.I. Novgorodzev, A.V. Gapich***
*Sumy State University, R-Korsakova Str., 2, Sumy, 40007*

*On the basis of combination of methods of theory of fuzzy sets and algebra of rank predicates the task of identification states of control objects' states is decided on the Bayes' criterion in the conditions of indefiniteness of losses. Experimental results, confirmative efficiency of application of the offered method task of identification of control objects' states in the conditions of indefiniteness of losses, are resulted.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полонский А. Д. Нейроподобный классификатор бинарных состояний объектов управления в условиях неопределенности // АСУ и приборы автоматики. –2004. – Вып. 129. – С. 47 – 53.
2. Васильев В. И. Распознающие системы. – К.: Наук. думка, 1983. – 424 с.
3. Бондарев В. Н., Аде Ф. Г. Искусственный интеллект. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 615 с.

***Полонский А.Д.***, доктор техн. наук, доцент, СумГУ, г. Сумы;
***Лопатченко Б.К.,*** канд. техн. наук, доцент, СумГУ, г. Сумы;
***Новгородцев А.И.,*** канд. техн. наук, доцент, СумГУ, г. Сумы;
***Гапич В.Н.,*** инженер, СумГУ, г. Сумы

*Поступила в редакцию 20 октября 2007 г.*