УДК 620.178(088.8)

ДО ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

І.Д. Пузько
Сумський державний університет, м. Суми

Розглянуто математичну модель у вигляді диференціального рівняння поперечних коливань стрижня, що знаходиться під дією повздовжніх періодичних сил. Застосовано рівняння першого наближення для амплітуди і фази асимптотичного методу КБМ. Розглянуто випадок для двох швидкостей зміни частоти періодичної сили за лінійним законом. Отримано нові аналітичні співвідношення для визначення інерційно-жорсткісних параметрів.

Отримано нові аналітичні співвідношення для визначення оцінок інерційно-жорсткісних параметрів при застосуванні рівнянь першого наближення асимптотичного методу КБМ і методу найменших квадратів.

ВСТУП І ПОСТАВЛЕННЯ ЗАДАЧІ

Для розв'язання задач вібродіагностики, вібровипробувань на віброміцність, вібростійкість, вібронадійність, при розробленні нових вібраційних технологій виникає необхідність проведення досліджень і аналізу динамічних амплітудно – частотних характеристик (АЧХ) елементів випробуваних конструкцій, зокрема, визначення типів АЧХ, визначення резонансних частот і параметрів статичних резонансних піків [1].

Методи ідентифікації для деяких класів нелінійних коливальних систем при урахуванні інформації, що формується із експериментальних частотних характеристик та часових даних, розглянуто в роботах[1, 2, 3].

У роботі [4] розроблено алгоритм для визначення власної частоти коливань породжувальної коливальної системи, що відповідає нелінійній коливальній системі, при застосуванні асимптотичного методу КБМ на підставі рівнянь першого наближення для амплітуди і фази і реалізації режимів вільних коливань.

У роботі [5] при застосуванні асимптотичного методу КБМ визначені інерційно – жорсткісні параметри одного класу нелінійних коливальних систем на підставі рівнянь першого наближення для амплітуди і фази.

Однак відомі дослідження проведені при застосуванні математичної моделі, що відповідає нелінійному диференціальному рівнянню другого порядку із постійними параметрами.

У практиці проведення вібровипробувань знаходять застосування нелінійні коливальні системи із одним степенем вільності, математична модель яких формується у вигляді нелінійного диференціального рівняння другого порядку, у якому деякі параметри поступово змінюються за часом, зокрема, змінюються за часом частоти зовнішніх збуджувальних «періодичних» сил.

У роботі [6] проведений аналіз і побудовані рівняння першого наближення для моделі коливальної системи із розподіленими параметрами в режимі розгортки частоти зовнішньої «періодичної» сили за лінійним законом $\omega(t) = \omega_n + VsignVt$, причому при $signV = 1$ частота ω збільшується, при $signV = -1$ частота ω зменшується.

Однак у відомих дослідженнях не розв'язана задача оцінки параметрів для математичної моделі коливальної системи з розподіленими параметрами на підставі рівнянь першого наближення асимптотичного методу КБМ при застосуванні методу найменших квадратів.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ АНАЛІЗУ

Розглянемо математичну модель у вигляді диференціального рівняння поперечних коливань стрижня, що знаходиться під дією повздовжніх періодичних сил

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+E_0\cos\theta\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=0\ , \tag{1}$$

де EI – жорсткість матеріалу стрижня, A – площа поперечного перерізу, γ – щільність матеріалу, із якого зроблено стрижень; g – прискорення сили тяжіння; $E_0\cos\theta$ – періодична повдовжня сила.

При заданні граничних умов

$$y\big|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right|_{z=0}=0;\qquad y\big|_{z=l}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right|_{z=l}=0 \tag{2}$$

і при формі підстановки $y=x\sin\pi\dfrac{z}{l}$, (l – довжина стрижня) отримуємо диференціальне рівняння [6]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2(1-h\cos\theta)x=0\ , \tag{3}$$

де
$$h=E_0l^2(EI\pi)^{-1},\qquad \omega_0^2=g\pi^2EI(\gamma Al^4)^{-1}. \tag{4}$$

При заданні розв’язання $x=X_a\cos(\dfrac{1}{2}\theta+\psi)$ і $\dfrac{d\theta}{dt}=\omega_n+Vt$ отримано такі рівняння першого наближення [6]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX_a}{dt}&=-\frac{X_ah\omega_0^2}{2(\omega_n+Vt)}\sin 2\psi,\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega_0-\frac{\omega_n+Vt}{2}-\frac{h\omega_0^2}{2(\omega_n+Vt)}\cos 2\psi\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Після нескладних перетворень отримаємо таке рівняння (для спрощення беремо $\omega_n=0$):

$$d\psi=\omega_0dt-\frac{1}{2}Vtdt+ctg\psi\frac{dX_a}{X_a}. \tag{6}$$

Після проведення інтегрування і при умові $d\psi=2\pi n$ (n – число циклів) отримаємо рівняння

$$2\pi n=\omega_0\Delta t-\frac{1}{4}V\Delta^2t+\int\limits_{X_{a0}}^{X_a}ctg\psi\frac{dX_a}{X_a}, \tag{7}$$

де X_{a0}, X_a – початкове і кінцеве значення амплітуди коливань, що відповідає проміжку часу Δt і числу циклів n.

На підставі (7) отримаємо систему рівнянь для визначення параметра ω_0 при реалізації режимів із швидкостями V_1, V_2 розгортки частоти

$$\left.\begin{aligned} 2\pi n_1 &= \omega_0 \Delta_1 t - \frac{1}{4} V_1 \Delta_1^2 t + \int_{X_{a1}}^{X_{a2}} ctg\psi \frac{dX_a}{X_a}, \\ 2\pi n_2 &= \omega_0 \Delta_2 t - \frac{1}{4} V_2 \Delta_2^2 t + \int_{X_{a1}}^{X_{a2}} ctg\psi \frac{dX_a}{X_a} \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Із системи (8) рівнянь отримаємо співвідношення для визначення ω_0

$$\omega_0 = \frac{2\pi(n_1 - n_2) + \frac{1}{4}(V_1 \Delta_1^2 t - V_2 \Delta_2^2 t)}{(\Delta_1 t - \Delta_2 t)}. \qquad (9)$$

Беручи до уваги (4), (9), отримаємо співвідношення для визначення параметрів EI, h

$$EI = \omega_0^2 \gamma A l^4 (g\pi^2)^{-1} \qquad (10)$$

$$h = \frac{g\pi E_0 (\Delta_1 t - \Delta_2 t)^2}{\gamma A l^4 [2\pi(n_1 - n_2) + \frac{1}{4}(V_1 \Delta_1^2 t - V_2 \Delta_2^2 t)]^2}. \qquad (11)$$

Беручи до уваги той факт, що часові інтервали $\Delta_i t \quad (i = \overline{1, N})$, числа циклів n_i, що відповідають часовим інтервалам $\Delta_i t$, та амплітудні значення X_{ai} вимірюються за наявності похибок, на підставі рівняння (7) отримаємо дві таких системи, в кожній з яких сформовано N рівнянь, а саме:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi n_i &= \omega_0 \Delta_i t - \frac{1}{4} V_i \Delta_i^2 t + \int_{X_{a1}}^{X_{a2}} ctg\psi \frac{dX_a}{X_a} + \xi_i(t), \quad (i = (\overline{1, N})), \\ 2\pi n_j &= \omega_0 \Delta_j t - \frac{1}{4} V_j \Delta_j^2 t + \int_{X_{a1}}^{X_{a2}} ctg\psi \frac{dX_a}{X_a} + \xi_j(t), \quad (j = (\overline{(N+1), 2N})) \end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

де $\xi_i(t)$, $\xi_j(t)$ – некорельовані випадкові процеси, що мають нульове математичне сподівання і обмежену дисперсію.

На підставі системи (12) отримаємо таке рівняння:

$$2\pi\left(\sum_{i=1}^{N} n_i - \sum_{j=N+1}^{2N} n_j\right) = \omega_0\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_i t - \sum_{j=N+1}^{2N}\Delta_j t\right) - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\Delta_i^2 t - \sum_{j=N+1}^{2N} V_j\Delta_j^2 t\right) +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{X_{a1}}^{X_{a2}} ctg\psi\,\frac{dX_a}{X_a} - \sum_{j=N+1}^{2N}\int_{X_{a1}}^{X_{a2}} ctg\psi\,\frac{dX_a}{X_a}\right) + \left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i(t) - \sum_{j=N+1}^{2N}\xi_j(t)\right). \quad (13)$$

На підставі (13) отримаємо таку функцію S_1:

$$S_1 = 2\pi\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(n_i - n_j\right) - \omega_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(V_i\Delta_i^2 t - V_j\Delta_j^2 t\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(ctg\psi\,\frac{dX_a}{X_a} - ctg\psi\,\frac{dX_a}{X_a}\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(\xi_i(t) - \xi_j(t)\right). \quad (14)$$

Із (14) отримаємо мінімізуючу функцію S:

$$S = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left[2\pi\left(n_i - n_j\right) - \omega_0\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right) - \frac{1}{4}\left(V_i\Delta_i^2 t - V_j\Delta_j^2 t\right)\right]^2. \quad (15)$$

Нормальне рівняння для визначення оцінки ω_0 із умови $\frac{\partial S}{\partial \omega_0} = 0$ має вигляд

$$2\pi\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(n_i - n_j\right)\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right) - \omega_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(V_i\Delta_i^2 t - V_j\Delta_j^2 t\right)\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right) = 0. \quad (16)$$

Із (16) отримаємо співвідношення для визначення оцінки ω_0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(n_i - n_j\right)\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(V_i\Delta_i^2 t - V_j\Delta_j^2 t\right)\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N}\left(\Delta_i t - \Delta_j t\right)^2}. \quad (17)$$

Оцінки $\widehat{EI}$, h параметрів EI, h визначаємо відповідно із (4) при застосуванні співвідношення (17).

Таким чином, у роботі отримані аналітичні співвідношення (9), (10), (11) для визначення параметрів ω_0, EI, h при застосуванні рівнянь першого наближення асимптотичного методу КБМ, а також співвідношення (17) для визначення оцінки ω_0 параметра ω_{o} і оцінки $\widehat{EI}$, h параметрів EI, h при застосуванні рівнянь першого наближення асимптотичного методу КБМ і методу найменших квадратів.

ВИСНОВКИ

У роботі отримані аналітичні співвідношення для визначення оцінок параметрів для математичної моделі лінійної коливальної системи із розподіленими параметрами при застосуванні рівнянь першого наближення асимптотичного методу КБМ і методу найменших квадратів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Божко А.Е., Личкатый Е.А., Полищук О.Ф., Пузько И.Д., Савченко В.И. Резонансные виброиспытательные системы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
2. Ленк Ф., Ренитц Ю. Механические испытания приборов и аппаратов. – М.: Мир, 1976. – 270 с.
3. Кононенко В.О., Плахтиенко Н.П. Методы идентификации механических нелинейных колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1976. – 116 с.
4. Авт. св. №1703990 СССР, МКИ G01H11/00. Способ определения параметра колебаний нелинейной диссипативной колебательной системы / Е.В. Матвеев, В.В. Крылов, Е.В. Кочкин, Д.С Михайлов и А.В. Медарь. – Опубл. 07.01.92.
5. Пузько И.Д., Хворост В.А. Параметрична ідентифікація нелінійних коливальних систем // Машинознавство. – 1999. - №7(25). – С. 36-40.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963. – 501 с.

Пузько І.Д., канд. техн. наук

Надійшла до редакції 27 листопада 2007 р.