УДК 533.6.013

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РУХУ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА НА ТВЕРДОМУ ПАЛИВІ В АТМОСФЕРІ

В.І. Макєєв, М.М. Ляпа, Л.Д. Назаренко
Сумський державний університет

У цій роботі пропонується математична модель руху літального апарата на твердому паливі з урахуванням обертання та кривизни Землі, впливу вітру, перенесення та зміщення з осі симетрії вектора сили тяги та з найбільш повним урахуванням сил та моментів, що діють на політ літального апарата у збудженому середовищі. Дана модель дозволить вибрати літальний апарат на твердому паливі.

ВСТУП

У наш час відсутня математична модель просторового руху некерованих літальних апаратів на твердому паливі з повним урахуванням інерціально-масових характеристик та аеродинамічних коефіцієнтів. Дана модель дозволить вибрати оптимальні параметри літального апарата: годину ввімкнення двигуна на траєкторії польоту, час роботи двигуна, швидкість провертання при зміщенні снаряда з напрямної та інші параметри, які б забезпечили отримання найбільшої дальності та мали б оптимальну кучність стрільби.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ І МЕТОДИ ЙОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для дослідження особливостей динаміки збудженого руху некерованих літальних апаратів на твердому паливі з метою визначення впливу відхилень умов стрільби від табличних на дальність і напрям необхідна математична модель просторового руху літальних апаратів з якнайповнішим обліком інерційно-масових характеристик і аеродинамічних коефіцієнтів снарядів (мін).

Основу математичної моделі просторового руху літальних апаратів на твердому паливі складає система диференціальних рівнянь, що описує рух центра мас і рух щодо центра мас. Важливим елементом математичної моделі є найбільш точний і оптимальний вибір сил та моментів, що діють на політ літальних апаратів.

Виходячи з цього, вибір і обґрунтування математичної моделі динаміки польоту літальних апаратів виконаний у такій послідовності:

1) проведений аналіз конструктивних параметрів і балістичних характеристик, що перебувають на озброєнні, та перспективних активно-реактивних снарядів (мін) і реактивних систем залпового вогню;

2) поведений вибір систем диференціальних рівнянь просторового руху літальних апаратів;

3) визначені аеродинамічні та інерційно-масові характеристики літальних апаратів, що перебувають на озброєнні;

4) проведені підготовка та складання алгоритмів і програми інтеграції системи диференціальних рівнянь руху некерованих літальних апаратів на твердому паливі.

На основі аналізу систем диференціальних рівнянь руху снарядів (мін), викладених у роботах Я. М. Шапіро [1,2], А. Д. Чернозубова [3], в підручниках "Зовнішня балістика академії імені Ф. Е. Дзержинського ч. I, ч. II, ч. III [3] та ін.., пропонується система диференціальних рівнянь у проекціях на осі напівшвидкісної та зв'язаної системи координат (рис. 1) загальних векторних рівнянь, які виражають зміст теорем про похідні за часом від векторів кількості і моменту кількості руху:

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \bar{V}\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}i$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \sum_{i=1}^{k} \bar{M}i$$

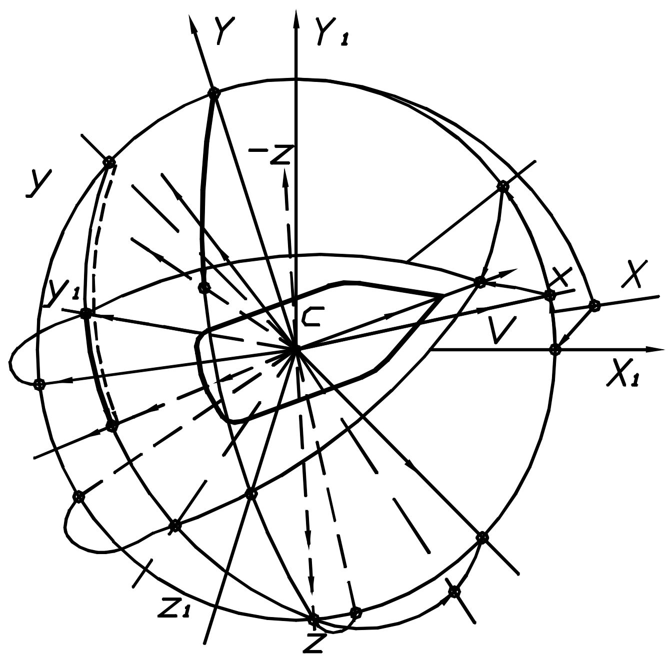

Рисунок 1 - Система координат, що визначає положення літального апарата на траєкторії

Як складові головного вектора діючих сил $\sum_{i=1}^{n} \bar{F}i$ були враховані:

- сила лобового опору;
- підйомна сила;
- сила тяги;
- сила Магнуса-Жуковського;
- сила інерції Коріоліса за рахунок обертання Землі.

Складові головного моменту $\sum_{i=1}^{k} \bar{M}i$ кількості руху враховувалися:

- перекидний (для активно-реактивних мін і реактивних снарядів - що стабілізує) момент;

- екваторіальний демпфуючий момент;
- осьовий демпфуючого момент;
- момент Магнуса-Жуковського;
- момент Коріоліса за рахунок закінчення порохових газів;
- моменти, викликані ексцентриситетом тяги і мас.

Крім того, в системі диференціальних рівнянь будемо враховувати вплив вітру і кривизну Землі.

Враховуючи вищевикладене, система диференціальних рівнянь руху активно-реактивних снарядів, мін (АРС, АРМ), а також реактивних систем залпового вогню (РСЗО) може бути представлена у вигляді:

1. $$X = \frac{V \cdot \cos\Theta \cdot \cos\Psi}{1 + \frac{Y}{R_3}}$$

2. $$\dot{Y} = V \cdot \sin\Theta$$

3. $$\dot{Z} = V \cdot \cos\Theta \cdot \sin\Psi$$

4. $$\dot{V} = a_{\mathrm{T}} - a_{\mathrm{X}} - g \cdot \sin\Theta + \frac{p_1}{m_{(t)}}\left(\sin\delta_1 \cdot \cos\delta_3 + \sin\delta_2 \cdot \sin\delta_3\right)$$

5. $$\dot{\Theta} = a_{\mathrm{N}} \cdot \delta_1 + \lambda \cdot \delta_1 + a_L \cdot \delta_2 - \frac{g \cdot \cos\Theta}{V} + \frac{p_1 \cdot \cos\delta_3}{m_{(t)} V} + \frac{V \cdot \cos\Theta}{R_3 + Y} + \\ +2 \cdot \Omega_3 \cdot \cos B_{Ш} \cdot \sin a_{Г}$$

6. $$\dot{\Psi} \cdot \cos\Theta = a_N \cdot \delta_2 + \lambda \cdot \delta_2 + a_L \cdot \delta_1 + \frac{P_1 \cdot \sin\delta_3}{m_{(t)} \cdot V} + \\ +2 \cdot \Omega_3 \cdot \left(\sin B_{Ш} \cdot \cos\Theta + \cos B_{Ш} \cdot \sin\Theta \cdot \cos a_{Г}\right)$$

7. $$\dot{\delta}_1 = Z_1$$

8. $$\dot{\delta}_2 = Z_2$$

9. $$\dot{Z}_1 = -a \cdot Z_2 - \tilde{b}^* \cdot Z_1 + c^* \cdot \delta_1 + e^* \cdot \delta_2 + g \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\Theta}{V}\right) + \frac{\tilde{b}_{Д} \cdot g \cdot \cos\Theta}{V} + \\ +R_{\Delta 1} + R_{ЦМ1} + R_{вр1} + \alpha\omega_{\eta^1} - \tilde{b}_{Д\omega\wp^1}$$

10. $$\dot{Z}_2 = a \cdot Z_1 - \tilde{b} \cdot Z_2 + c \cdot \delta_2 + e \cdot \delta_1 - \frac{\alpha \cdot g \cdot \cos\Theta}{V} + \\ +R_{\Delta 2} + R_{ЦМ2} + R_{вр2} + \alpha\omega_{Y^1} - \tilde{b}_{Д\omega h^1}$$

11. $$\dot{P} = -b_{Г} \cdot p + \frac{m_X}{A} \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S_M \cdot L + \frac{\mu_1 \cdot p(t)}{A} + \frac{\xi_2 \cdot \gamma_1 - \xi_1 \cdot \gamma_2}{A} \cdot P - \\ -\frac{\xi_1 + \xi_2}{A} \cdot m \cdot g \cdot \sin\delta_3 - \frac{\xi_2 - \xi_1}{A} \cdot m \cdot g \cdot \cos\delta_3$$

12. $\dot{\delta}_3 = p$

13. $\dot{\pi}(y) = -\dfrac{\pi(y)\cdot\dot{y}}{R(\tau_y + \Delta\tau)}$

$$a_T = \frac{\left[\dot{\omega}(I_1 + \dfrac{\partial I_1}{\partial \mathrm{T}_{3p}}\cdot\Delta\mathrm{T}_{3p} - F_a\cdot\pi(y)\cdot h_0\cdot 13{,}6)\right]\cdot g}{q_{\text{H}} - \dfrac{\omega\cdot(t - t_{\text{H}})}{\left(\tau_a + \dfrac{\partial\tau_a}{\partial \mathrm{T}_{3p}}\cdot\Delta\mathrm{T}_{3p}\right)}}$$

$$\dot{\omega} = \frac{\omega}{\left(\tau_a + \dfrac{\partial\tau_a}{\partial \mathrm{T}_{3p}}\cdot\Delta\mathrm{T}_{3p}\right)}\cdot\left[i_p - \frac{2\cdot(i_p - 1)}{\tau_a + \dfrac{\partial\tau_a}{\partial \mathrm{T}_{3p}}\cdot\Delta\mathrm{T}_{3p}}\cdot(t - t_{\text{H}})\right]$$

$$a_X = -0{,}474\frac{i\cdot d^2}{q}\cdot\pi(y)\cdot V_{r\tau}^2\cdot C_X(V_{r\tau})$$

$$a_N = 0{,}474\frac{d^2}{q}\cdot\pi(y)\cdot V_{r\tau}\cdot C_y^{\delta}(V_{r\tau})$$

$$a_L = 0{,}474\frac{d^3}{q}\cdot\pi(y)\cdot p\cdot C_L^{\bar{p}\bar{\delta}}(V_{r\tau})$$

$$b_{Д} = 0{,}474\frac{d^2\cdot L^2}{B\cdot g}\cdot\pi(y)\cdot V_{r\tau}\cdot m_z^{\bar{\omega}z}(V_{r\tau})$$

$$b_{Г} = 0{,}474\frac{d^3\cdot L}{A\cdot g}\cdot\pi(y)\cdot V_{r\tau}\cdot m_x^{\bar{\omega}x}(V_{r\tau})$$

$$b_L = 0{,}474\frac{d^3\cdot L}{B\cdot g}\cdot\pi(y)\cdot p\cdot V_{r\tau}\cdot m_L^{\bar{p}\delta}(V_{r\tau})$$

$$b_R = 0{,}474\frac{d^2\cdot L}{B\cdot g}\cdot\pi(y)\cdot V_{r\tau}^2\cdot m_z^{\delta}(V_{r\tau})$$

$$V_{r\tau} = V_r\sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau(y) + \Delta\tau}}$$

$$a = \alpha + \frac{a_L}{b}$$

$$\alpha = \frac{A}{B} \cdot p_0 \cdot \exp\left(-\int_0^t b_r dt \right)$$

$$p_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot V_0}{\eta \cdot d}$$

$$\tilde{b}^* = 0,474 \cdot \frac{d^2 \cdot L^2}{B \cdot g} \cdot \pi(y) \cdot V_{r\tau} \left[m_z^{\omega z}(V_{r\tau}) + \frac{B}{m \cdot L^2} \cdot C_y^{\delta}(V_{r\tau}) \right] + \frac{a_T}{V} + \frac{\lambda' \cdot a_T \cdot m}{B}$$

$$\lambda' = \frac{1}{U_e} \left[c^2 - \frac{a^2 + a \cdot b + b^2}{3} \right]$$

$$\lambda = \frac{a_T}{V}$$

$$\tilde{b}_Д = b_Д + \frac{\lambda' \cdot a_T \cdot m}{B}$$

$$c^* = \pm b_R + \alpha \cdot a_L - b_Д \cdot (a_N + \lambda) - \dot{a}_N - \dot{\lambda}$$

$$e^* = b_L - \alpha \cdot (a_N + \lambda) - \tilde{b}_Д \cdot R_L - \dot{a}_L$$

$$R_{\Delta 1} = \frac{P_1}{m \cdot V} \cdot \dot{\delta}_3 \cdot \sin\delta_3 - \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{p_1}{m \cdot V} \right) \cdot \cos\delta_3 -$$
$$-\tilde{b}_Д \cdot \frac{p_1}{m \cdot V} \cdot \cos\delta_3 - \alpha \cdot \frac{p_1}{m \cdot V} \cdot \sin\delta_3 + \frac{p \cdot \Delta}{B} \cdot \cos\delta_3$$

$$R_{\Delta 2} = -\frac{P_1}{m \cdot V} \cdot \dot{\delta}_3 \cdot \cos\delta_3 - \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{p_1}{m \cdot V} \right) \cdot \sin\delta_3 -$$
$$-\tilde{b}_Д \cdot \frac{p_1}{m \cdot V} \cdot \sin\delta_3 + \alpha \cdot \frac{p_1}{m \cdot V} \cdot \cos\delta_3 - \frac{p \cdot \Delta}{B} \cdot \sin\delta_3$$

$$R_{ЦМ1} = p^2 \cdot \frac{B - A}{B} \cdot (\gamma_1 \cdot \cos\delta_3 - \gamma_2 \cdot \sin\delta_3) +$$
$$+\frac{a_x + m \cdot g - p(t)}{B} \cdot \left(\varepsilon_1 \cdot \cos\delta_3 - \varepsilon_2 \cdot \sin\delta_3 \right)$$

$$R_{ЦМ2} = p^2 \cdot \frac{B - A}{B} \cdot (\gamma_1 \cdot \sin\delta_3 + \gamma_2 \cdot \cos\delta_3) +$$
$$+\frac{a_x + m \cdot g - p(t)}{B} \cdot \left(\varepsilon_1 \cdot \sin\delta_3 - \varepsilon_2 \cdot \cos\delta_3 \right)$$

$$R_{вр1} = -\tilde{b}_Д \cdot \Omega_3 \cdot \cos B_Ш \cdot \sin a_Г - \alpha \cdot \Omega_3 \cdot (\sin B_Ш \cdot \cos\Theta + \cos B_Ш \cdot \sin\Theta \cdot \cos a_Г)$$
$$R_{вр2} = \alpha \cdot \Omega_3 \cdot \cos B_Ш \cdot \sin a_Г - \tilde{b}_Д \cdot \Omega_3 \cdot (\sin B_Ш \cdot \cos\Theta + \cos B_Ш \cdot \sin\Theta \cdot \cos a_Г)$$

$$\alpha_{\omega\eta'} = \alpha \cdot \frac{V \cdot \cos^2\Theta}{R_3} \cdot \sin a_Г \cdot tg B_Ш$$

$$\alpha_{\omega\wp'} = -\alpha \cdot \frac{V \cdot \cos\Theta}{R_З}$$

$$\tilde{b}_{Д\omega\eta'} = \tilde{b}_Д \cdot \frac{V \cdot \cos^2\Theta}{R_З} \cdot \sin a_Г \cdot tg\mathrm{B}_{Ш}$$

$$\tilde{b}_{Д\omega\wp'} = -\tilde{b}_Д \cdot \frac{V}{R_З} \cdot \cos\Theta$$

$$P_1 = P \cdot \sin\gamma_{аэр.}$$

$$\mathrm{P}(t) = \dot{\omega} \cdot \left(\mathrm{I}_1 + \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\Pi_{зр}} \cdot \Delta\mathrm{T}_{зр} \right) - F_a \cdot \Pi(y) \cdot h_0 \cdot 13{,}6$$

$$\mu_1 = \frac{U}{U_e} \cdot r \cdot tg\gamma$$

$$U_e = \mathrm{I}_1 \cdot g$$

$$\tau(y) = \begin{cases} 288{,}9 - 00{,}006328 \cdot Y - при - 0 \le \mathrm{Y} \le 9300 \\ 230 - 0{,}006328 \cdot (Y - 9300) + 0{,}000001172 \cdot (Y - 9300)^2 - при - 9300 \le \mathrm{Y} \le 12000 \\ 221{,}5 - при - 1200 \le \mathrm{Y} \le 25700 \\ 221{,}5 + 0{,}00265 \cdot (Y - 25700) - при - \mathrm{Y} < 25700 \end{cases}$$

Врахування впливу вітру при $t = 0$

$$V_{r_o} = \sqrt{(V_{Xo} - W_X)^2 + (V_{Yo} - W_Y)^2 + (V_{Zo} - W_Z)^2}$$

$$X_{r_o} = X_0; Y_{r_o} = Y_0; Z_{r_o} = Z_0; \text{ так як } (W) = const$$

$$V_{Xo} = V_0 \cdot \cos\Theta_0 \cdot \cos\Psi_0$$

$$V_{Yo} = V_0 \cdot \sin\Theta_0$$

$$V_{Zo} = V_0 \cdot \cos\Theta_0 \cdot \sin\Psi_0$$

$$\Psi_{r_0} = \Psi_0 \cdot \left(1 + \frac{W_X}{V_{Xo}} \right) - \frac{W_Z}{V_{Xo}}$$

$$\Theta_{r_0} = \Theta_0 \cdot \left(1 + \frac{W_X}{V_{Xo}} \right) - \frac{W_y}{V_{Xo}}$$

$$\delta_{1r_0} = \delta_{1o} - \Theta_0 \cdot \frac{W_X}{V_{Xo}} + \frac{W_Y}{V_{Xo}}$$

$$\delta_{2r_0} = \delta_{2o} - \Psi_0 \cdot \frac{W_X}{V_{Xo}} + \frac{W_Z}{V_{Xo}}$$

$$\dot{\delta}_{1r_0} = \dot{\delta}_{1o} - \dot{\Theta}_0 \cdot \frac{W_X}{V_{Xo}} - \Theta_0 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{W_X}{V_X}\right)_0 + \frac{d}{dt}\left(\frac{W_Y}{V_X}\right)_0$$

$$\dot{\delta}_{2r_0} = \dot{\delta}_{2o} - \dot{\Psi}_0 \cdot \frac{W_X}{V_{Xo}} - \Psi_0 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{W_X}{V_X}\right)_0 + \frac{d}{dt}\left(\frac{W_Y}{V_X}\right)_0$$

Після інтегрування системи (2) при початкових умовах виконаємо перехід до абсолютних кінематичних формул:

$$V_X = V_{r_x} + W_x; V_Y = V_{r_y} + W_y; V_Z = V_{r_z} + W_z$$

$$x = x_r + W_x \cdot t$$

$$y = y_r + W_y \cdot t$$

$$z = z_r + W_z \cdot t$$

$$\Psi = \Psi_r \cdot \left(1 - \frac{W_X}{V_X}\right) + \frac{W_Z}{V_X}$$

$$\Theta = \Theta_r \cdot \left(1 - \frac{W_X}{V_X}\right) + \frac{W_Y}{V_X}$$

$$\delta_1 = \delta_{1r} + \Theta_r \cdot \frac{W_X}{V_X} - \frac{W_Y}{V_X}$$

$$\delta_2 = \delta_{2r} + \Psi_r \cdot \frac{W_X}{V_X} - \frac{W_Z}{V_X}$$

$$\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_{1r} + \dot{\Theta}_r \cdot \frac{W_X}{V_X} + \Theta_r \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{W_X}{V_X}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{W_Y}{V_X}\right)$$

$$\dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_{2r} + \dot{\Psi}_r \cdot \frac{W_X}{V_X} + \Psi_r \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{W_X}{V_X}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{W_Z}{V_X}\right).$$

Інші позначки є загальноприйнятими у зовнішній балістиці:
i_p - коефіцієнт витрат пального (регресивність горіння);

λ' - складова сили Коріоліса за рахунок закінчення порохових газів;

$\xi_1, \xi_2; \gamma_1, \gamma_2$ - лінійні кутові ексцентриситети центра мас.

Розв'язання систем диференціальних рівнянь може бути виконане методом чисельного інтегрування з використанням ЕВМ.

ВИСНОВКИ

Запропонована в роботі модель просторового руху АРС (АРМ) та РСЗО може бути спрямована на вирішення багатьох практичних питань, таких як:

1) розроблення методів стійкості руху перспективних АРС (АРМ) і РСЗО та для забезпечення необхідності кучності стрільби;

2) обґрунтування конструктивних заходів, що сприяють зменшенню розсіювання траєкторії польоту АРС (АРМ) і РСЗО, що обумовлені їх коливаннями щодо центра мас;

3) з'ясування впливу руху АРС (АРМ) і РСЗО щодо центра мас із метою розрахунку змін елементів траєкторії (наприклад, визначення дериваційних відхилень АРС та турбореактивних снарядів при розрахунку похибкових значень таблиць стрільби).

SUMMARY

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE SPATIAL MOVING THE FLYING MACHINE ON SOLID FUEL IN ATMOSPHERE.

Makeev V.I., Lyapa M.M., Nazarenko L.D.

In given work is offered mathematical model of the moving the flying machine on solid fuels with provision for rotations and curvatures of the Land, influences winds, carrying and offsets with axis of the vector of power of the pulling, and with most full account of power and moments, acting on flight of the flying machine in air ambience. Given model will allow to choose the optimum parameters of the flying machine on solid fuels.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шапиро Я.М. Внешняя баллистика. – Ч. IV. – М.: Издательство академии им. Дзержинского, 1957.
2. Шапиро Я.М. Внешняя баллистика неуправляемых реактивных снарядов. – М.: Издательство академии им. Дзержинского, 1956.
3. Чернозубов А.Д. Внешняя баллистика. – Ч. II. – М.: Издательство физико-математической литературы, 1959.
4. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых ракет и нарядов. – М.: Воениздат, 1973.
5. Внешняя баллистика. – Ч. I, II, III: Военная артиллерийская академия им. Дзержинского. – М., 1954.

Макєєв В.І., канд. техн. наук, доцент;

Ляпа М.М., канд. техн. наук, доцент;

Назаренко Л.Д., доцент

Надійшла до редакції 8 травня 2008 р.