УДК 621

БИНОМИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

А.А. Борисенко
Сумский государственній университет

Дана характеристика обобщенных позиционных систем счисления. Рассмотрены их достоинства, такие, как повышенная надежность цифровых устройств, работающих в них, их быстродействие, стоимость, возможность решения специальных задач. В качестве примера приведена одна из таких систем счисления – биномиальная. Дана ее оценка и возможные области применения.

В вычислительной технике широко распространены степенные позиционные системы счисления. Более сложные системы счисления, в которых зависимость между весом разряда и его номером отличается от степенных систем, менее известны. Будем их называть *обобщенными позиционными системами счисления* (ОПСС). В настоящее время они не нашли еще достаточного применения. Исследование этих систем выявило ряд полезных свойств, например, помехоустойчивость, возможность генерирования перестановок и другие [1, 2].

Практическое применение ОПСС основывается на двух важнейших их свойствах: они, во-первых, позволяют формировать и нумеровать комбинаторные объекты различной природы; и, во-вторых, являются помехоустойчивыми.

В результате таких свойств на основе ОПСС можно разрабатывать специализированные управляющие устройства с экстремальными характеристиками по быстродействию, надежности, габаритам, весу; строить адаптивные коды и кодирующие устройства для сквозного контроля информации в процессе ее преобразования, передачи и хранения; разрабатывать алгоритмы и устройства для сжатия и засекречивания информации; предложить новые, более эффективные по быстродействию алгоритмы и реализующие их устройства для решения ряда задач комбинаторной оптимизации.

Разработка специализированных управляющих устройств основывается на разработке такой ОПСС, структура которой в максимальной степени соответствует специфике решаемой задачи. Таким образом происходит экономия аппаратурных затрат и достигается значительный выигрыш в быстродействии (в десятки и сотни раз по сравнению с универсальными ЭЦВМ). Так как ОПСС являются помехоустойчивыми, то наряду с повышением быстродействия и снижением стоимости устройств повышается их надежность и упрощается диагностика неисправностей.

Целесообразно на основе ОПСС разрабатывать управляющие устройства, которые выполняют в основном логические и простейшие арифметические операции над целыми числами. Это вызвано тем, что указанные операции в ОПСС выполняются наиболее эффективно. Отдельные узлы таких специализированных устройств представляют самостоятельный интерес для универсальных ЦВМ, например, помехоустойчивые счетчики, регистры, АЦП [1].

Для решения задачи помехоустойчивого хранения и передачи информации разработано довольно большое количество различных кодов, как обнаруживающих, так и исправляющих ошибки. На практике в своем подавляющем большинстве нашли применение коды для обнаружения ошибок при передаче и хранении информации. Среди указанных кодов особо следует выделить коды, обнаруживающие ошибки не только при передаче и хранении, а и во время обработки информации.

Это арифметические коды и коды в системе остаточных классов. К подобному классу кодов относятся и коды чисел в ОПСС, так как они способны обнаруживать и исправлять ошибки не только в процессе передачи информации, а и при ее обработке.

Их достоинства - простота алгоритмов и устройств обнаружения ошибок, регулярность структуры, высокая помехоустойчивость, возможность регулирования избыточности кода и соответственно обнаруживающей способности в зависимости от состояния канала связи (адаптивность), помехоустойчивость кодирующих и декодирующих устройств. Применение этих кодов приобретает особое значение в специализированных автоматических системах управления. Съем информации, ее обработка, передача и выработка управляющих воздействий происходят в одном и том же коде ОПСС. В результате возможно наряду с повышением помехоустойчивости получать выигрыш в аппаратуре, быстродействии и габаритах. Этим не ограничиваются возможности чисел ОПСС. Важное их свойство - способность формирования комбинаторных кодов, например: равновесных, сменно-посылочных, сменно-качественных и т. д. [3].

Одной из актуальных задач при хранении и передаче информации является ее сжатие, например, сжатие информации, не требующее применения словаря, - оптимальное кодирование на основе кодов Шеннона - Фано и Хаффмана [3, 4]. В настоящее время существует также довольно широкий арсенал других средств решения задачи сжатия, что не исключает разработки новых или усовершенствования старых. Одно из них - *нумерация* сообщений. Основные достоинства нумерации - алгоритмический характер кодирования, позволяющий легко осуществить его техническую реализацию, а также отсутствие потребности в словаре. Как раз применение ОПСС позволяет расширить класс нумеруемых сообщений и тем самым усовершенствовать и упростить алгоритмическую и аппаратную реализацию задачи сжатия сообщений.

Как задачу нумерации, так и задачу денумерации на основе ОПСС можно эффективно использовать для засекречивания информации. При этом имеется возможность получать помехоустойчивые шифры, обладающие высокой стойкостью и простыми ключами. Особое значение имеют простота и надежность аппаратурной реализации шифрации и дешифрации засекречиваемых сообщений.

Среди комбинаторных задач особое место занимают задачи комбинаторной *оптимизации*. Причем в самом общем виде указанные задачи могут даже не иметь четко выраженной целевой функции и задаваться, например, в терминах предпочтения. Для таких задач наиболее распространенным решением является перебор возможных вариантов и выбор из него наилучшего по некоторому критерию. В случае, если перебор невозможен, то он заменяется случайным поиском [2]. В том и другом случаях требуется организовать или перебор, или генерирование комбинаторных объектов. ОПСС дают возможность предложить общий метод решения этой задачи.

Таким образом, ОПСС на основе единого подхода дают возможность эффективно решать ряд практических задач различного характера.

Однако в вычислительной технике все же более распространены степенные системы счисления с двоичным алфавитом. Более сложные системы счисления, например, в которых зависимость между весом разряда и его номером отличается от степенных систем, менее известны. Поэтому они еще не нашли достаточно широкого практического применения. Однако их полезные свойства, такие, как генерация и перебор комбинаторных конфигураций, кодирование информации и т. д., позволяют утверждать об их перспективности в ближайшем будущем.

Здесь предлагаются нестепенные системы счисления с биномиальными весами и двоичным алфавитом {1,0} - биномиальные системы счисления [5,6].

Количественный эквивалент кодовой комбинации n-разрядной k-биномиальной системы счисления $A_i = (a_{j-1}, a_{j-2},\ldots,a_0)$, $i = 0, 1,\ldots,P$-1 определяется выражением

$$A_i = a_{j-1}C_{n-1}^{r-q_j} + \ldots + a_l C_{n-j+l}^{k-q_{l+1}} + \ldots + a_0 C_{n-j}^{k-q_1} \qquad (1)$$

при соблюдении систем ограничений:

$$\begin{cases} q_0 = k, & (2) \\ j < n, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-k = j - q_0, & (4) \\ q_0 < k, & (5) \end{cases}$$

где q_0 - число единиц в биномиальном числе;

P - диапазон чисел;

j - количество разрядов биномиального числа (длина);

l - 0, 1, ..., j-1 - порядковые номера разряда; q_l - сумма единичных значений цифр от (j-1)-го разряда до l -го включительно:

$$q_l = \sum_{i=l}^{j} a_i, \qquad (6)$$

$$q_j = a_j = 0 \,. \qquad (7)$$

Система счисления должна удовлетворять требованиям *конечности, эффективности, однозначности*. Однако этих требований для нестепенных систем счисления недостаточно. Кроме того, для систем счисления с числами неравной длины важно свойство *префиксности*, которое позволяет отличать одни кодовые комбинации от других, и *непрерывности*, позволяющее утверждать, что для каждого числа из заданного диапазона существует другое число, значение которого больше первого на единицу. Исключение делается только для наименьшего и наибольшего числа.

Из выражения (1) следует, что требования конечности и эффективности для биномиальных систем счисления выполняются, т. е. существует вычислительный алгоритм, который за конечное число шагов осуществляет переход от биномиальной кодовой комбинации A_i ограниченной длины к соответствующему числу. Требования однозначности, префиксности и непрерывности доказаны в работах (5,6).

В табл. 1 для n = 6 и k = 4 приведены биномиальные комбинации (числа) и их количественные эквиваленты, формирование которых осуществляется по следующему алгоритму:

1 Формируется начальная комбинация, состоящая из ($n-k$) нулей.

2 В младший разряд записывается единица и к нему справа

приписывается нуль.

3 Пункт 2 повторяется до тех пор, пока число единиц в кодовом слове не станет равным k. В этом случае приписывание нуля справа не происходит.

4 В младший разряд, содержащий нуль, записывается 1.

5 Определяется число единиц в комбинации. Если оно равно k и единицы не занимают k старших разрядов, то происходит возврат к пункту 4.

6 Если k единиц занимают в комбинации k старших разрядов, то происходит останов.

7 Если число единиц в комбинации не равно k, то справа от младшего разряда, содержащего 1, записываются нули до тех пор, пока их общее число не станет равным $(n - k)$.

8 Возврат к пункту 2.

Таблица 1- Биномиальные неравномерные числа

Пор. номер	Биномиальное число	Количественный эквивалент
0	00	$0C_5^4 + 0C_4^4$
1	010	$0C_5^4 + 1C_4^4 + 0C_3^3$
2	0110	$0C_5^4 + 1C_4^4 + 1C_3^3 + 0C_2^2$
3	01110	$0C_5^4 + 1C_4^4 + 1C_3^3 + 1C_2^2 + 0C_1^1$
4	01111	$0C_5^4 + 1C_4^4 + 1C_3^3 + 1C_2^2 + 1C_1^1$
5	100	$1C_5^4 + 0C_4^3 + 0C_3^3$
6	1010	$1C_5^4 + 0C_4^3 + 1C_3^3 + 0C_2^2$
7	10110	$1C_5^4 + 0C_4^3 + 1C_3^3 + 1C_2^2 + 0C_1^1$
8	10111	$1C_5^4 + 0C_4^3 + 1C_3^3 + 1C_2^2 + 1C_1^1$
9	1100	$1C_5^4 + 1C_4^3 + 0C_3^2 + 0C_2^2$
10	11010	$1C_5^4 + 0C_4^3 + 0C_3^2 + 1C_2^2 + 0C_1^1$
11	11011	$1C_5^4 + 1C_4^3 + 0C_3^2 + 1C_2^2 + 1C_1^1$
12	11100	$1C_5^4 + 1C_4^3 + 1C_3^2 + 0C_2^1 + 0C_1^1$
13	11101	$1C_5^4 + 1C_4^3 + 1C_3^2 + 0C_2^1 + 1C_1^1$
14	1111	$1C_5^4 + 1C_4^3 + 1C_3^2 + 1C_2^1$

Полезными свойствами биномиальной системы счисления являются: помехоустойчивость при передаче, хранении и обработке информации; способность перебирать, генерировать и нумеровать комбинации кодов с постоянным весом; возможность построения помехоустойчивых цифровых устройств.

Для обнаружения ошибок с помощью биномиальных комбинаций необходимо дополнить их нулями или единицами до получения равномерного ($n - 1$)-разрядного биномиального кода, как это приведено в табл. 2.

Таблица 2 – Биномиальные равномерные числа

Пор. ном.	Биномиальный код	Биномиальный равномерный код	Пор. ном.	Биномиальный код	Биномиальнй равномерный код
0	00	00000	8	10111	10111
1	010	01000	9	1100	11000
2	0110	01100	10	11010	11010
3	01110	01110	11	11011	11011
4	01111	01111	12	11100	11100
5	100	10000	13	11101	11101
6	1010	10100	14	1111	11110
7	10110	10110			

Основными признаками ошибки в биномиальной комбинации в первом случае является превышение числа единиц в ней величины k, во втором - числа (n - k) нулей. Особым свойством биномиального помехоустойчивого кода является его способность обнаруживать ошибки при обработке информации. Это позволяет организовать сквозной контроль в каналах обработки информации, в которые входят и цифровые устройства.

В табл. 3 приведен переход от биномиальной комбинации к коду с постоянным весом, который осуществляется приписыванием к комбинации единиц, если она содержит (n - k) нулей, или нулей, если в ней содержится k единиц, до тех пор, пока ее длина не станет равной n.

Биномиальная комбинация является биномиальным номером комбинации с постоянным весом, т. е. является ее сжатым отображением. Если есть необходимость представить ее номером в степенной системе счисления, то тогда необходимо воспользоваться выражением (1).

Алгоритмы перебора и генерирования биномиальных комбинаций и на их основе комбинаций с постоянным весом более подробно рассмотрены в работе [6].

Таблица 3 – Код с постоянным весом

Пор. ном.	Биномиаль-ный код	Код с постоянным весом	Пор. ном.	Биномиаль-ный код	Код с постоянным весом
0	00	001111	8	10111	101110
1	010	010111	9	1100	110011
2	0110	011011	10	11010	110101
3	01110	011101	11	11011	110110
4	01111	011110	12	11100	111001
5	100	100111	13	11101	111010
6	1010	101011	14	1111	111100
7	10110	101101			

Таким образом, предложенная биномиальная система счисления способна осуществлять сквозной контроль канала преобразования информации и позволяет перебирать, генерировать и нумеровать комбинации кодов с постоянным весом.

SUMMARY

The characteristic of general positional number systems is given. Their merits such as a heightened reliability of digital devices, working in these, speed, cost, possibility of special task decision. As an example one of the number systems, binomial one, is considered. Its estimation and possible areas of its application is given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стахов А. П. Коды золотой пропорции.- М.: Радио и связь, 1984. - 150 с.
2. Стоян Ю. Г., Соколовский В. З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. - К.: Наук. думка, 1980. - 205 с.
3. Цымбал В. П. Теория информации и кодирование. - К.: Вища шк., Головное изд-во, 1977. - 287 с.
4. Кузьмин И. В., Кедрус В. А. Основы теории информации и кодирования.- К.: Вища шк., Головное изд-во, 1977. - 279 с.
5. Борисенко А. А. Введение в теорию биномиального счета: Монография. – Сумы: Университетская книга. 2004. – 86 с.
6. Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика: Монография. – Сумы: Университетская книга. 2004. – 168 с.

Борисенко А.А., д-р техн. наук, профессор

Поступила в редакцию 08 мая 2008 г.