

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОМАССОВОГО РОТОРА ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЩЕЛЕВЫХ УПЛОТНЕНИЙ

**Ю.Я. Тарасевич, Е.Н. Савченко**

*Сумский государственный университет, г. Сумы*

*В работе приведены уравнения совместных радиально-угловых колебаний ротора в щелевых уплотнениях и определены вероятностные характеристики коэффициента демпфирования и собственной частоты радиальных колебаний одномассовой модели ротора в щелевых уплотнениях.*

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция применения для герметизации подвижных узлов сложных уплотнительных систем. Однако, несмотря на разнообразие новых конструкций, основным типом уплотнения проточной части остаются щелевые уплотнения, которые, кроме основной своей функции ограничивать перетоки между рабочими колесами, выполняют функции дополнительных, а в некоторых конструкциях и основных опор ротора. Несмотря на простоту конструкции, аналитический расчет гидродинамических характеристик щелевых уплотнений сопряжен с определенными трудностями. Так, решение уравнений, описывающих трехмерное течение жидкости в зазоре уплотнения, на сегодняшний день не удается получить в замкнутом аналитическом виде. Каждый исследователь при решении данной задачи вынужден вводить допущения и пренебрегать влиянием тех или иных факторов, а полученные результаты проверять экспериментально. В частности, большинство исследователей пренебрегают влиянием инерционных составляющих сил давления и не рассматривают влияние изменения параметров щелевых уплотнений в процессе работы на динамические характеристики ротора, что снижает достоверность полученных результатов.

### ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Авторами на основании решения задачи о течении жидкости в щелевом уплотнении с вращающейся и прецессирующей внутренней поверхностью зазора получены гидродинамические радиальные силы и их моменты, действующие на ротор со стороны слоя жидкости с учетом локальных и конвективных сил инерции [1,2].

Влияние сил и моментов в щелевых уплотнениях на вибрационные характеристики ротора рассмотрено на примере модели консольного ротора, масса которого сосредоточена в центре масс  $C$  (рис.1), а вал представляет собой невесомое упругое тело и вращается в жестких опорах. Модель ротора обладает следующими степенями свободы: центр масс ротора может перемещаться вдоль трех координатных осей, а диск рабочего колеса совершать повороты вокруг оси вращения и двух осей, перпендикулярных оси вращения. Хотя такая упрощенная модель, за исключением частных случаев, не соответствует реальной роторной системе центробежной машины, она сохраняет ее важнейшие динамические свойства и дает возможность оценить влияние уплотнений на динамику ротора. Как показано в [3] усложнение конструкции не приводит к каким-либо принципиально новым результатам. Кроме того, на основании разложения колебаний ротора по собственным формам выводов, сделанные для одномассовой модели, можно непосредственно

применить при исследовании более сложных роторных систем [3].

Учитывая то обстоятельство, что осевые перемещения ротора на установившемся режиме малы и не оказывают влияния на гидродинамические характеристики щелевых уплотнений, осевой подвижностью рабочего колеса при составлении уравнений динамики пренебрегли. В расчете использованы следующие системы координат: неподвижная система  $Ox_0y_0z_0$  с началом в геометрическом центре колеса при недеформированном состоянии вала; подвижная, жестко связанная с вращающимся валом система координат  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ , оси  $O_1\xi_1$  и  $O_1\eta_1$  которой направлены по главным осям инерции поперечного сечения вала, а ось  $O_1\zeta_1$  - по касательной к изогнутой оси вала в точке  $O_1$  центра вала в месте посадки колеса; подвижная система координат  $C\xi\eta\zeta$  с началом в центре масс ротора, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции колеса. Углы поворота вокруг осей  $Ox_0$ ,  $Oy_0$  -  $\vartheta_x$ ,  $\vartheta_y$ . Осевой момент инерции колеса, т.е. момент инерции относительно оси  $C\zeta$ , -  $J_o$ , а моменты инерции относительно осей  $C\xi$  и  $C\eta$  (экваториальные моменты инерции), которые равны между собой, -  $J$ . При концентричном положении ротора и статора точки начала координат систем  $O$  и  $O_1$  совпадают.

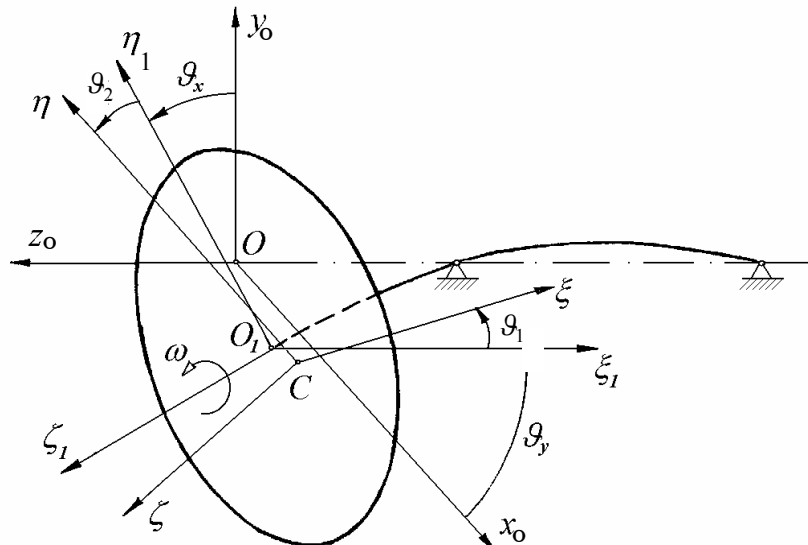


Рисунок 1 – Расчетная схема ротора в щелевых уплотнениях

На основании теорем об изменении количества и момента количества движения системы уравнения радиальных и угловых колебаний ротора в уплотнениях в проекциях на неподвижные оси  $Ox_0y_0z_0$  имеют такой вид:

$$m\ddot{x}_c = F_{ox}, \quad m\ddot{y}_c = F_{oy}, \quad (1)$$

$$J\ddot{\vartheta}_x + (J_o - J)\omega\dot{\vartheta}_{\eta_1} = M_{ox}, \quad J\ddot{\vartheta}_y + (J_o - J)\omega\dot{\vartheta}_{\xi_1} = M_{oy}.$$

Для малых параметров неуравновешенности рабочего колеса, малых линейных и угловых перемещений связь между перемещениями осей  $C\xi\eta\zeta$  и  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$  в неподвижной системе координат имеет вид:

$$x_c = x + e_{c\xi_1} \cos \vartheta_x - e_{c\eta_1} \sin \vartheta_x, \quad y_c = y + e_{c\xi_1} \sin \vartheta_x + e_{c\eta_1} \cos \vartheta_x,$$

$$\vartheta_{\xi_1} = \vartheta_x + \vartheta_1 \cos \vartheta_z - \vartheta_2 \sin \vartheta_z, \quad \vartheta_{\eta_1} = \vartheta_y + \vartheta_1 \sin \vartheta_z + \vartheta_2 \cos \vartheta_z,$$

где  $\vartheta_1, \vartheta_2$  – характеризуют параметры неуровновешенности рабочего колеса -динамический дисбаланс.

Поскольку  $\vartheta_z = \omega t$ , получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= \ddot{x} - \omega^2(e_{c\xi_1} \cos \omega t - e_{c\eta_1} \sin \omega t), & \ddot{y}_0 &= \ddot{y} - \omega^2(e_{c\xi_1} \sin \omega t + e_{c\eta_1} \cos \omega t), \\ \ddot{\vartheta}_{\xi_1} &= \ddot{\vartheta}_x - \omega^2(\vartheta_1 \cos \omega t - \vartheta_2 \sin \omega t), & \ddot{\vartheta}_{\eta_1} &= \ddot{\vartheta}_y - \omega^2(\vartheta_1 \sin \omega t + \vartheta_2 \cos \omega t). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (1), получим систему уравнений движения рабочего колеса относительно неподвижной системы координат с учетом изгибной жесткости вала:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x - k_{12}\vartheta_y &= \sum F_{x_0} + F_{dx_0}, \\ m\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\vartheta_x &= \sum F_{y_0} + F_{dy_0}, \\ J\ddot{\vartheta}_x + k_{22}\vartheta_x + (J_o - J)\omega\dot{\vartheta}_y + k_{12}y &= \sum M_{x_0} + M_{dx_0}, \\ J\ddot{\vartheta}_y + k_{22}\vartheta_y - (J_o - J)\omega\dot{\vartheta}_x - k_{12}x &= \sum M_{y_0} + M_{dy_0}, \end{aligned}$$

где  $\sum F_{x_0, y_0}$ ,  $\sum M_{x_0, y_0}$  – проекции сил и моментов в двух щелевых уплотнениях на оси  $Ox_0$ ,  $Oy_0$ ;

$F_{dx_0} = m\omega^2(e_{c\xi_1} \cos \omega t - e_{c\eta_1} \sin \omega t)$ ,  $F_{dy_0} = m\omega^2(e_{c\xi_1} \sin \omega t + e_{c\eta_1} \cos \omega t)$  – проекции статического дисбаланса;

$$M_{dx_0} = \omega^2(2J - J_o)(\vartheta_1 \cos \omega t - \vartheta_2 \sin \omega t), \quad M_{dy_0} = \omega^2(2J - J_o)(\vartheta_1 \sin \omega t + \vartheta_2 \cos \omega t)$$

– проекции динамического дисбаланса на оси неподвижной системы координат.

В случае линейности силовых факторов, входящих в состав колебательной системы ротор-щелевые уплотнения, параметры неуровновешенности играют роль внешнего возмущающего воздействия, определяя закон вынужденных колебаний рабочего колеса.

Полученные уравнения пригодны для описания движения модели как симметричного, так и консольного одномассового ротора, имеющего, кроме гидродинамических щелевых опор-уплотнений, еще и наружные подшипниковые опоры.

Для случая, когда ротор обладает осевой симметрией, что позволяет провести ось  $O_1\xi_1$  через центр масс колеса, выражения для статического дисбаланса упростятся:

$$F_{dx_0} = m\omega^2 e_c \cos \omega t, \quad F_{dy_0} = m\omega^2 e_c \sin \omega t.$$

Для консольной схемы уравнения связанных радиально-угловых колебаний примут вид:

$$(1 + a_1)\ddot{x} + a_2\dot{x} + \omega_1^2 x + a_3\dot{y} + a_4 y + \alpha_2\dot{\theta}_y + a_c\theta_y - \alpha_4\dot{\theta}_x - \alpha_5\theta_x = \frac{F_{dx_0}}{m},$$

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)\ddot{y} + a_2\dot{y} + \omega_1^2 y - a_3\dot{x} - a_4 x - \alpha_2\dot{\theta}_x - a_c\theta_x - \alpha_4\dot{\theta}_y - \alpha_5\theta_y &= \frac{F_{dy_0}}{m}, \\
(1 + \beta_1)\ddot{\theta}_x + \beta_2\dot{\theta}_x + \omega_2^2\theta_x + \beta_3\dot{\theta}_y + \beta_4\theta_y - b_2\dot{y} + b_c y + b_3\dot{x} + b_4 x &= \frac{M_{dx_0}}{J}, \\
(1 + \beta_1)\ddot{\theta}_y + \beta_2\dot{\theta}_y + \omega_2^2\theta_y - \beta_3\dot{\theta}_x - \beta_4\theta_x + b_2\dot{x} - b_c x + b_3\dot{y} + b_4 y &= \frac{M_{dy_0}}{J}.
\end{aligned}$$

Переходя к комплексным переменным:  $u = x + iy$ ;  $v = \theta_x + i\theta_y$ , уравнения движения можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)\ddot{u} + a_2\dot{u} + \omega_1^2 u - i(a_3\dot{u} + a_4 u) - i(\alpha_2\dot{v} + a_c v) - \alpha_4\dot{v} - \alpha_5 v &= a\omega^2 e^{i\omega t}, \\
(1 + \beta_1)\ddot{v} + \beta_2\dot{v} - \omega_2^2 v - i(\beta_3\dot{v} + \beta_4 v) + i(b_2\dot{u} - b_c u) + b_3\dot{u} + b_4 u &= \Gamma\omega^2 e^{i\omega t},
\end{aligned} \quad (2)$$

где для автомоделной области турбулентного течения:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{k_g - k_{py}\theta_0(\zeta_m - \theta_0\Delta\zeta)}{m}, \quad a_2 = \frac{k_d + k_{py} + k_{g2}\theta_0(3\zeta_0 - \Delta\zeta)}{m}, \\
\omega_1^2 &= \frac{k_s}{m}\varphi_f + \frac{k_v}{m}, \quad a_3 = \kappa\omega_a a_1, \quad a_4 = \kappa\omega_a a_2, \\
\alpha_2 &= k_d \frac{l}{5m}\theta_0 + \frac{k_{p\dot{\theta}}}{m} - \frac{k_{g2}l}{m}\theta_0\zeta_m, \quad \alpha_c = \frac{k_{s\vartheta}}{m} - \frac{k_{12}}{m}, \quad \alpha_4 = \alpha_1\kappa\omega_a, \quad \alpha_5 = \kappa\omega_a\alpha_2, \\
\beta_1 &= k_g \frac{l^3}{60J}, \quad \beta_2 = k_d \frac{l^2}{60J} - \left( \frac{k_{pm\dot{\theta}}}{J} - k_{g2} \frac{l^2}{15J}\theta_0\zeta_0 \right), \quad \beta_3 = \kappa\omega_a\beta_1 - \frac{J_0 - J}{J}\omega, \\
\beta_4 &= \kappa\omega_a\beta_2, \quad \omega_2^2 = \frac{k_{22}}{J} + k_s \frac{l^2}{6J}\varphi_3, \\
b_2 &= k_d \frac{l}{5J}\theta_0 + k_{pmj1} \frac{(\zeta_m - \theta_0\Delta\zeta)}{J} + k_{pmj2} \frac{(\zeta_0 + \Delta\zeta)}{J}(\Delta\zeta - 2\theta_0\zeta_m), \\
b_c &= \frac{k_{12}}{J} + k_s \frac{l}{6J}\varphi_{mf}, \quad b_3 = \kappa\omega_a b_1, \quad b_4 = \kappa\omega_a b_2
\end{aligned}$$

– коэффициенты гидродинамических сил и моментов;  $a = e_{c\xi_1} + ie_{c\eta_1}$ ,

$\Gamma = \left(2 - \frac{J_0}{J}\right)(\vartheta_1 + i\vartheta_2)$ . В приведенных формулах  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  – парциальные частоты соответственно радиальных и угловых колебаний ротора, а гидродинамические коэффициенты определяются по следующим формулам [1]:

$$k_{s\vartheta} = k_s \frac{l}{2} \frac{1}{\zeta_0^2} \left[ \zeta_0^2 - 2(\zeta_m^2 - 0.5\Delta\zeta(\zeta_0 + 2\zeta_m\theta_0)) \right],$$

$$k_s = \frac{\Delta p l \pi r}{2H}, \quad k_d = \frac{\mu l^3 k_0 \pi r}{12H^3 K},$$

$$k_{px} = \frac{\rho^2 l \pi r}{\mu k_0 H} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) + \frac{\rho l^2 \pi r}{4 H^2} q_{po} \left( \Delta \zeta + \frac{2 \theta_0}{3} \left( 2 - \frac{\Delta \zeta}{\zeta_0} \right) \right),$$

$$k_{py} = \frac{\rho^2 l^2 \pi r}{6 \mu k_0} q_{oo},$$

$$k_{p\delta} = \left( \frac{\rho^2 l^2 \pi r}{12 \mu k_0 H} \frac{q_{oo}^2}{\zeta_0} \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (3 \zeta_m + 4 \theta_0 \zeta_0) - \frac{\rho l^3 \pi r}{24 H^2} q_{oo} \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} \right) (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta),$$

$$k_{sy} = k_s \left[ \theta_0 + \frac{1}{\zeta_0^2} (\zeta_m \zeta_0 - \Delta \zeta \zeta_m + \theta_0 \Delta \zeta^2) \right], \quad k_g = \frac{\rho l^3 \pi r}{12 H}, \quad k_{g2} = \frac{\rho l^2 \pi r}{6 H^2 \zeta_0} q_{po},$$

$$k_{py} = \frac{\rho^2 l \pi r}{4 \mu k_0 H \zeta_0} q_{oo}^2 \sqrt{\frac{\zeta_{20}}{\zeta_0}} (\zeta_0 + \Delta \zeta) (\zeta_m - \theta_0 \Delta \zeta) + \frac{\rho l^2 \pi r}{4 H^2} q_{po} \Delta \zeta.$$

Если рассматривать только радиальные колебания ротора, то критическая частота радиальных колебаний определяется решением первого уравнения системы (2) без правой части при  $\alpha_i = 0$ . Поскольку критическая частота колебаний зависит от жесткости уплотнения, а на амплитуду вынужденных колебаний существенно влияют демпфирующие характеристики жидкого слоя, в работе определены коэффициенты жесткости и демпфирования с учетом случайного изменения радиального зазора, параметра конусности уплотнения и дросселируемого перепада давления (без учета влияния инерционных составляющих сил давления). Данные случайные величины зависят от многих случайных факторов, поэтому согласно центральной предельной теореме теории вероятностей [4] закон их распределения можно принять нормальным.

Интегральная функция распределения для коэффициента демпфирования будет равна

$$F(k_d) = \int_{k_{d \min}}^{k_{d \max}} f(\psi(k_d)) \left| \frac{\partial \psi(k_d)}{\partial k_d} \right| dk_d,$$

где  $\psi(k_d) = \sqrt[3]{\frac{\mu l^3 \pi r}{m k_d}}$  - обратная функция. Плотность вероятности коэффициента демпфирования  $f(k_d)$  находится дифференцированием функции распределения:

$$f(k_d) = \frac{dF(k_d)}{dk_d} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \exp \left[ -\frac{(\psi(k_d) - m_H)^2}{2\sigma_H^2} \right] |\psi'(k_d)|.$$

Для уплотнения с параметрами  $H = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $r = 0.035$ ,  $l = 0.02$ ,  $m = 200$  ( $m_H = 3 \cdot 10^{-4}$ ) математическое ожидание коэффициента демпфирования составило:  $m = 0.012$  (детерминированное значение 0,011), дисперсия:  $D = 1.458 \cdot 10^{-5}$ , а среднеквадратическое отклонение:  $\sigma = 3.818 \cdot 10^{-3}$ . Т.е. отличие неслучайного значения коэффициента демпфирования от его математического ожидания составляет 9%, а

максимальное отклонение (согласно правилу трех сигм) может в два раза превышать детерминированное значение.

Изменение зазора, обусловленное эрозионным изнашиванием его поверхностей, в силу случайности свойств материала и условий работы уплотнения представляет собой случайный процесс. В качестве математического ожидания последнего можно принять значение радиального зазора, полученное в работе [1] на основании исследований, приведенных в [5]. Тогда отклонение неслучайного расчетного значения коэффициента демпфирования от его математического ожидания может превышать 30%, что существенно сказывается на амплитуде вынужденных колебаний ротора в целевых уплотнениях и значениях действующих напряжений.

Частота радиальных колебаний одномассовой модели ротора в целевых уплотнениях для автотельной области турбулентного течения определяется по формуле

$$\omega_1^2 = \frac{k_v}{m} + \frac{k_s}{m} \left( \theta_0 + \frac{\zeta_m}{\zeta_0} \right) = \frac{k_v}{m} + \frac{k_s}{m} \left( \theta_0 + \frac{2H\zeta_m}{\lambda l + 2H(\Delta\zeta - 2\theta_0\zeta_m)} \right),$$

где  $k_v$  – жесткость самого ротора;  $k_s = \frac{\Delta p l \pi r}{2H}$  – гидростатическая жесткость щелевого уплотнения с параллельными стенками без учета местных гидравлически сопротивлений. С учетом того что параметр конусности уплотнения  $\theta_0 = \frac{9l}{2H}$ , можно записать

$$\omega_1^2 = \frac{k_v}{m} + \frac{k_s}{m} \left( \frac{9l[2H\Delta\zeta + \lambda l] - 2\zeta_m l^2 9^2 + 4H^2 \zeta_m}{2H[\lambda l + 2H\Delta\zeta - 2\zeta_m l 9]} \right).$$

Аналогично тому как это сделано для плотности распределения коэффициента демпфирования, получена плотность распределения частоты колебаний ротора в уплотнениях

$$f(\omega_1) = \frac{dF(\omega_1)}{d\omega_1} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_H \sigma_g \sigma_{\Delta p}} \int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \exp \left[ -\frac{(H - m_H)^2}{2\sigma_H^2} \right] \times \\ \times \int_{p_{\max}}^{p_{\min}} \exp \left[ -\frac{(\Delta p - m_{\Delta p})^2}{2\sigma_{\Delta p}^2} \right] \times \left( \exp \left[ -\frac{(\psi_1(\omega_1, H, \Delta p) - m_g)^2}{2\sigma_g^2} \right] |\psi_1'(\omega_1, H, \Delta p)| + \right. \\ \left. + \exp \left[ -\frac{(\psi_2(\omega_1, H, \Delta p) - m_g)^2}{2\sigma_g^2} \right] |\psi_2'(\omega_1, H, \Delta p)| \right) dH.$$

С увеличением времени работы кривая распределения становится более выпуклой, а частота смещается в область низких частот. С увеличением дросселируемого давления увеличивается значение  $\sigma_{\omega_1}$ , а кривая распределения становится более плоской. В этом случае значения собственных частот, рассчитанные для номинальных параметров, будут существенно завышены.

## ВЫВОДЫ

Проведенные исследования показали, что для одномассового ротора изменение коэффициента демпфирования при случайном изменении среднего радиального зазора может превышать 30%, а значит, и амплитуда колебаний ротора будет существенно отличаться от детерминированного значения. Дальнейшие исследования многомассовой модели позволят определить величины амплитуд колебаний и тем самым уточнить величины действующих напряжений.

Согласно нормам расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных электростанций интервал отстройки собственных частот для первых форм колебаний принимается равным 30% от  $\omega_n$ . Но, как следует из проведенных расчетов для одномассовой модели ротора в щелевых уплотнениях, собственная частота колебаний ротора будет лежать в интервале  $0,28\omega_n < \omega_n < 0,38\omega_n$ .

Работа выполнена за счет бюджетных средств МОН Украины, полученных в 2008 г. как грант Президента Украины.

## SUMMARY

### DYNAMIC CHARACTERISTICS OF ONE-MASS ROTOR UNDER STOCHASTIC VARIATIONS OF ANNULAR SEALS PARAMETERS

*Y.Y. Tarasevich, E.N. Savchenko*  
*Sumy State University*

*In this paper the complex radial-angular oscillations of rotor in annular seals equations are given and stochastic characteristics of damping coefficient and natural frequencies of radial one-masses rotor oscillations are determined.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарасевич Ю.Я. Разработка методов расчета вибрационного состояния роторов в щелевых уплотнениях: Дисс.... канд. техн. наук: 05.02.09. – Харьков, 2006. – 189 с.
2. Тарасевич Ю.Я. Влияние щелевых уплотнений на вибрационные характеристики роторов центробежных насосов// Удосконалювання турбоустановок методами математичного і фізичного моделювання. Праці міжнарод. наук.-техн. конф. / НАН України та ін. – Харків: Ін-т проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАН України, 2003. – Т. 2. – С. 602-606.
3. Марцинковский В.А. Гидродинамика и прочность центробежных насосов. – М.: Машиностроение, 1970. – 270с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
5. Ратнер А.В., Зеленский В.Г. Эрозия материалов теплоэнергетического оборудования. – М.: Энергия, 1966. – 272 с.

**Тарасевич Ю.Я.**, канд. техн. наук, СумГУ,  
г. Сумы;  
**Савченко Е.Н.**, канд. техн. наук, доцент,  
СумГУ, г. Сумы

*Поступила в редакцию 15октября 2008 г.*