УДК 681.3.06

ПОСТРОЕНИЕ ФАКТОРИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НА ОСНОВЕ ДВОИЧНЫХ СЧЁТЧИКОВ

А.Е Горячев
Сумский государственный университет, г. Сумы

В статье рассматривается получение факториальных чисел как промежуточный шаг при генерации перестановок. Для решения этой задачи разрабатываются алгоритм работы и структура факториального счётчика, а также описываются методы построения структурных элементов данного счётчика.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории и на практике широко распространена задача формирования и перебора перестановок. Перестановки используются для решения задач комбинаторной оптимизации, например, задачи поиска оптимального решения, а также при помехоустойчивой передаче данных и защите их от несанкционированного доступа. Существует множество методов получения перестановок. Одним из таких методов является генерация перестановок на основе факториальных чисел [1].

Перестановки на основе факториальных чисел получаются в соответствии со следующим алгоритмом. Цифра старшего разряда факториального числа остаётся без изменений и считается первым элементом перестановки. Следующую цифру сравнивают с первым элементом перестановки, если она больше, то необходимо увеличить её на 1, в противном случае она остаётся без изменений. Цифры следующих разрядов сравнивают сначала с наименьшим элементом перестановки из ранее определённых. Если значение цифры больше, то необходимо увеличить её на 1 и сравнивать с наименьшим из оставшихся элементов до тех пор, пока её значение не станет меньше того значения элемента перестановки, с которым сравнивается, или же пока не будет произведено сравнение со всеми элементами.

Как следует из вышеприведенного алгоритма, для получения перестановок требуются факториальные числа. Данные числа строятся на основе факториальной системы счисления.

Под факториальной системой счисления понимается выражение вида

$$F_{<\phi>} = X_n \cdot n! + X_{n-1} \cdot (n-1)! + \ldots + X_i \cdot i! + \ldots + X_1 \cdot 1! + X_0 \cdot 0!, \qquad (1)$$

где $i = 0, 1, \ldots, 0 \le X_i \le i$.

Максимальное число F_{max} в факториальной системе имеет вид $n(n\text{-}1)\ldots l\ldots 210$, где $0 \le X_l \le l$. Тогда

$$\mathrm{F}_{<\phi>\max} = (n+1)! - 1. \qquad (2)$$

Минимальное число 00…0…00 в факториальной системе счисления $F_{min} = 0$.

Диапазон факториальных чисел учитывает нуль, поэтому определяется как

$$P = F_{max} + 1. \qquad (3)$$

Факториальная система счисления относится к системам счисления со смешанным основанием.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи генерации факториальных чисел необходимо на основе двоичных счётчиков спроектировать факториальный счётчик, работающий в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Во все двоичные счётчики, отвечающие за разряды факториального счётчика, записываются нули.

2. Так как нулевой разряд факториального числа всегда принимает нулевое значение, он не участвует в пересчёте. В двоичный счётчик, отвечающий за первый разряд факториального счётчика, записывается единица.

3. Добавление единицы в счётчик первого разряда, работающий в двоичном коде, сбрасывает его в ноль, единица переносится в счётчик, отвечающий за второй разряд факториального счётчика, работающий в троичном коде.

4. Пункты 2 и 3 повторяются до тех пор, пока не произойдёт переполнение двоичного счётчика второго разряда. Далее единица переносится в счётчик третьего разряда, максимальное значение цифры в котором равно трём.

5. Увеличение числа на единицу производится до тех пор, пока все двоичные счётчики разрядов факториального счётчика не заполнятся максимально возможными значениями. При этом каждый следующий двоичный счётчик работает с коэффициентом пересчёта на единицу большим, чем предыдущий.

СТРУКТУРА И РАБОТА ФАКТОРИАЛЬНОГО СЧЁТЧИКА

Учитывая, что согласно выражению (1) максимальное число каждого следующего разряда факториального числа увеличивается на 1 по сравнению с предыдущим, коэффициент пересчёта счётчиков, отвечающих за разряды факториального числа, также будут увеличиваться на единицу с каждым новым разрядом. Таким образом, факториальный счётчик представляет собой последовательно соединённые двоичные счётчики с коэффициентом пересчёта 1, 2,..., N, где N – величина максимального разряда факториального числа.

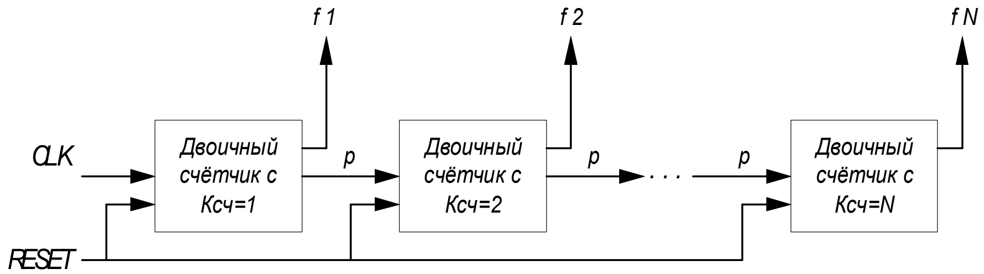

Рисунок 2 – Структурная схема N-разрядного факториального счётчика

Пример построения факториального счётчика показан на рисунке 2. Сигналы $f1$, $f2$, ..., fN обозначают значение цифр разрядов факториального числа, p – сигнал переноса. Нулевой разряд факториального числа всегда принимает значение «0», поэтому не участвует в пересчёте. Для представления k-го разряда факториального числа требуется $\lceil \log_2(k+1) \rceil$ двоичных разрядов, следовательно, для k-разрядного факториального числа требуется следующее количество разрядов:

$$K = \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2(i+1) \rceil . \tag{4}$$

СЧЁТЧИКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕСЧЁТА

Счётчики с коэффициентом пересчёта, равным 2^m, строятся с помощью последовательного соединения Т-триггеров, меняющих своё состояние на противоположное при поступлении импульсов на вход синхронизации. Для реализации Т-триггера может быть использован универсальный D-триггер с обратной связью или JK-триггер. Для построения счётчиков с коэффициентом пересчёта, отличным от 2^m, может использоваться один из следующих методов, описанных ниже: метод управления сбросом счётчика, метод модификации межразрядных связей счётчика, метод предустановки, метод использования счётчиков с $K_{СЧ} = 2^n + 1$ [2, 3, 4].

1 Метод управления сбросом счётчика [2, 3]

Один из принципов построения счётчиков с коэффициентом счёта, отличным от 2^m, состоит в исключении нескольких состояний обычного двоичного счётчика, являющихся избыточными для искомого счётчика. При этом избыточные состояния исключаются с помощью обратных связей внутри счётчика. Число избыточных состояний для любого счётчика определяется из следующего выражения:

$$\mathrm{M} = 2^{\mathrm{m}} - K_{СЧ} , \tag{5}$$

где M – число запрещенных состояний; $K_{СЧ}$ – требуемый коэффициент счёта; 2^{m} – число устойчивых состояний двоичного счётчика.

Задача синтеза такого счётчика заключается в определении необходимых обратных связей и минимизации их числа. Требуемое количество триггеров определяется из выражения

$$\mathrm{n} = \lceil \log_2 K_{СЧ} \rceil . \tag{6}$$

Рассмотрим пример реализации счётчика с $K_{СЧ}$ =10 данным методом. Очевидно, что сбрасывая двоичный четырехразрядный счётчик в нуль каждый раз, когда он будет принимать состояние 1010, можно обеспечить возврат счётчика в исходное состояние после каждых десяти импульсов. Минимизация обратных связей проводится, учитывая неиспользуемые состояния счётчика (рисунок 3). Схема счётчика изображена на рисунке 4. Подобный прием удобно применять при использовании счётчиков в интегральном исполнении, имеющих ячейки конъюнкции (И) на входах установки в нуль.

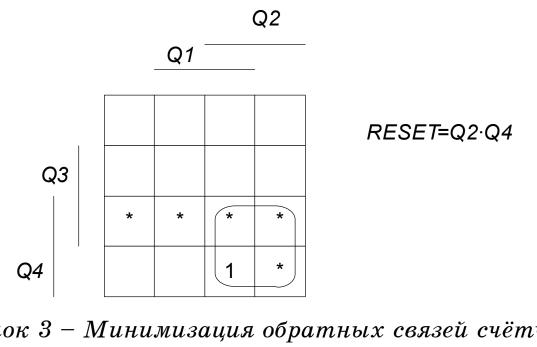

Рисунок 3 – Минимизация обратных связей счётчика

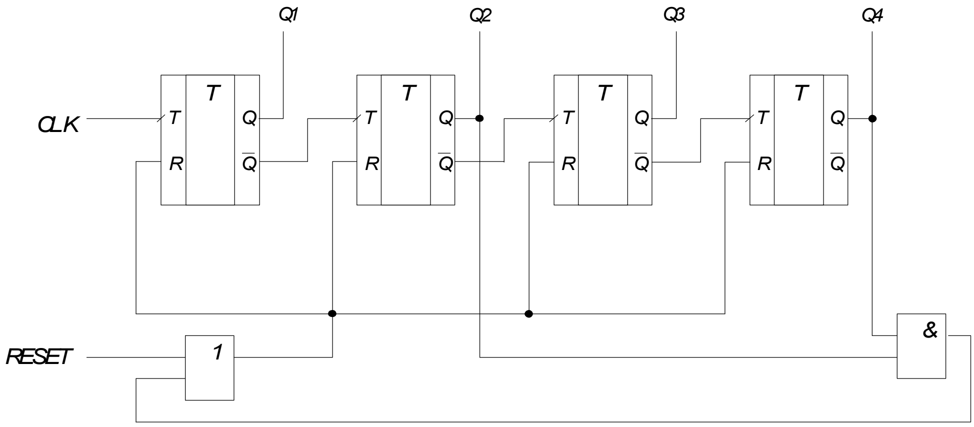

Рисунок 4 – Пример реализации счётчика с $K_{СЧ}$ = 10

2 Метод модификации межразрядных связей счётчика [2, 3]

Один из методов проектирования счётчиков с заданным коэффициентом пересчёта заключается в исключении неиспользуемых состояний счётчика из его таблицы переходов. В первых столбцах данной таблицы отражены текущие состояния триггеров счётчика, а в последующих – следующие за ними состояния. Анализ таблицы позволяет установить те переходы, которые должны быть осуществлены триггерами, входящими в состав счётчика. Затем с помощью управляющей таблицы соответствующего триггера находятся значения логических функций на управляющих входах триггеров, позволяющие осуществить эти переходы.

Таблица 1 представляет собой пример таблицы переходов для построения счётчика с коэффициентом пересчёта, равным 10. На рисунке 4 приведены карты Карно для логических функций, которым должны соответствовать сигналы, присутствующие на управляющих входах триггеров (нулевые значения функций в клетки карты Карно не записаны).

Таблица 1 – таблица переходов состояний триггеров для счётчика с $K_{СЧ}$ = 10

N	t				t+1				J4	K4	J3	K3	J2	K2	J1	K1
	Q4	Q3	Q2	Q1	Q4	Q3	Q2	Q1								
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	*	0	*	0	*	1	*
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	*	0	*	1	*	*	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	*	0	*	*	0	1	*
3	0	0	1	1	0	1	0	0	0	*	1	*	*	1	*	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1	0	*	*	0	0	*	1	*
5	0	1	0	1	0	1	1	0	0	*	*	0	1	*	*	1
6	0	1	1	0	0	1	1	1	0	*	*	0	*	0	1	*
7	0	1	1	1	1	0	0	0	1	*	*	1	*	1	*	1
8	1	0	0	0	1	0	0	1	*	0	0	*	0	*	1	*
9	1	0	0	1	0	0	0	0	*	1	0	*	0	*	*	1

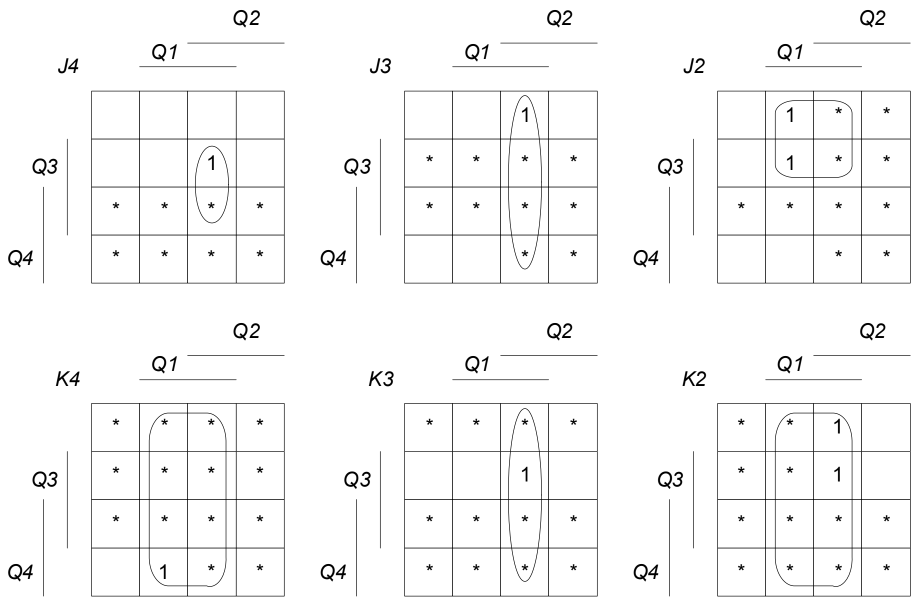

Рисунок 4 – Карты Карно для логических функций счётчика с Ксч = 10

После упрощения с помощью карт Карно полученные логические выражения, используемые для управления входами “J” и “K”, выглядят как

$$J4 = Q1 \cdot Q2 \cdot Q3; \qquad K4 = Q1;$$
$$J3 = Q1 \cdot Q2; \qquad K3 = Q1 \cdot Q2;$$
$$J2 = Q1 \cdot \overline{Q4}; \qquad K2 = Q1.$$

Просмотр столбцов J1 и K1 в таблице 1 показывает, что все принимаемые значения либо «*», либо «1». Так как безразличные состояния могут также участвовать в процессе упрощения, то все клетки карты Карно для J1 и K1 оказываются заполненными символами «1» и «*». Следовательно, $J1 = K1 = 1$.

На рисунке 5 показана схема синхронного счетчика с $K_{СЧ}$ = 10.

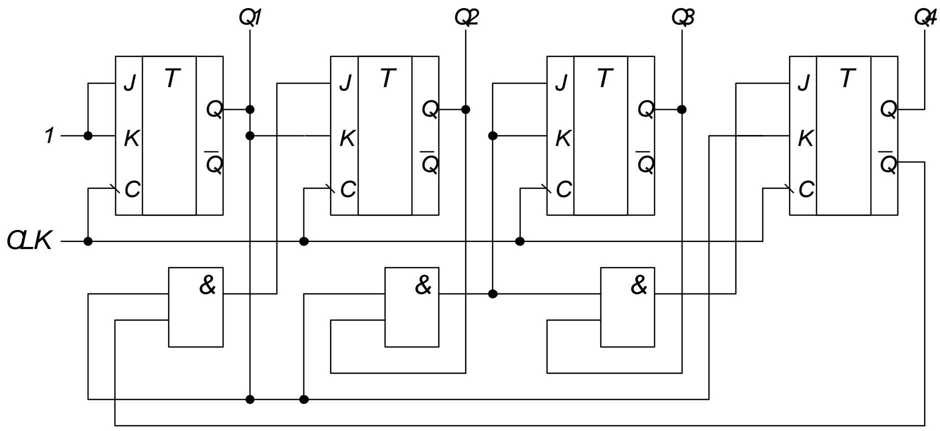

Рисунок 5 – Схема реализации синхронного счётчика с коэффициентом пересчёта $K_{СЧ}$ = 10

Преимуществом данного метода является возможность построения счётчиков с любой счётной последовательностью, недостаток метода – усложнение процесса минимизации при увеличении разрядности счётчика.

Если счётчик из-за какой-либо неисправности окажется в одном из запрещенных (неиспользуемых) состояний, то его работа может быть прервана специальным сигналом, и также может быть подан сигнал тревоги о неисправности в схеме счётчика. Обнаружить это позволяет схема, реализующая выражение, описывающее функцию неиспользуемых состояний.

3 Метод предустановки [3]

Данный метод построения счётчиков с коэффициентом счёта, отличным от 2^m, заключается в использовании счётчиков с предустановкой (рисунок 6). Суть метода состоит в том, что двоичный счётчик предварительно устанавливается в исходное состояние, отличное от нулевого. Номер исходной двоичной комбинации определяется из выражения

$$N_0 = 2^m - K_{СЧ}\,, \tag{7}$$

где N_0 – номер исходной комбинации; $K_{СЧ}$ – требуемый коэффициент пересчёта; 2^m – число состояний двоичного счётчика.

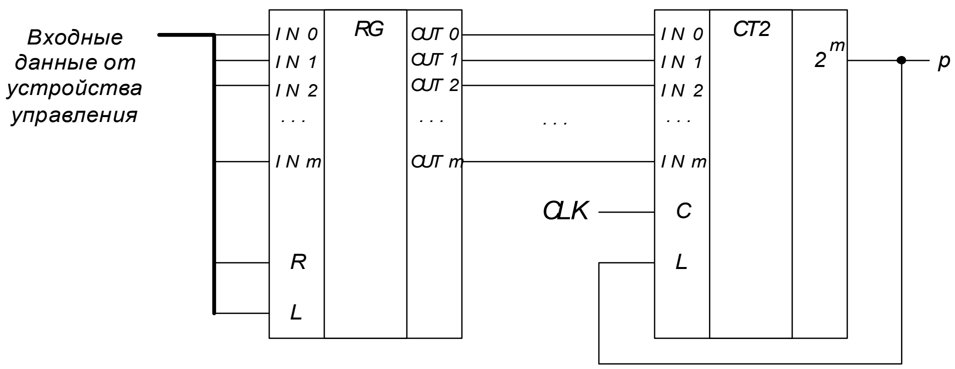

Рисунок 6 – Схема реализации счётчика с предустановкой

Установка счётчика осуществляется с помощью записи данных из элемента памяти, который получает их от устройства управления счётчиком. Вначале каждого цикла пересчёта исходная комбинация считывается из элемента памяти и записывается в двоичный счётчик. При переходе счётчика в нулевое состояние сигнал переполнения счётчика p подаётся на вход разрешения записи L и обеспечивает запись начальной комбинации в счётчик.

Для построения двоичных счётчиков с естественным порядком счёта (от 0 до $K_{СЧ}$) на основе данного метода необходимо выходы счётчика завести на входы преобразователя кодов, осуществляющего определение номера текущей комбинации в счётчике.

Преимуществом метода является возможность настраивать счётчик на различные коэффициенты пересчёта с помощью записи различных исходных двоичных комбинаций в элемент памяти. Недостаток состоит в необходимости использования дополнительных микросхем для реализации запоминающего устройства.

4 Метод использования счётчиков с $K_{СЧ} = 2^n + 1$ [4]

В основе данного метода лежит использование счётчиков с коэффициентом пересчёта, на единицу большим степени двойки (рис. 7). Увеличение коэффициента пересчёта на единицу достигается использованием дополнительного (единичного) JK-триггера. Данный триггер в отличие от прочих триггеров счётчика, работающих в счётном режиме, объединяет по своему J-входу выходы предыдущих триггеров. На вход K единичного триггера подаётся 1, на вход C, так же, как и на аналогичный вход триггера младшего разряда счётчика, подаётся тактирующий импульс CLK. Выходы Q всех двоичных разрядов счётчика подключаются через логический элемент И ко входу J единичного триггера, инверсный выход единичного триггера подключается ко входу триггера младшего разряда счётчика.

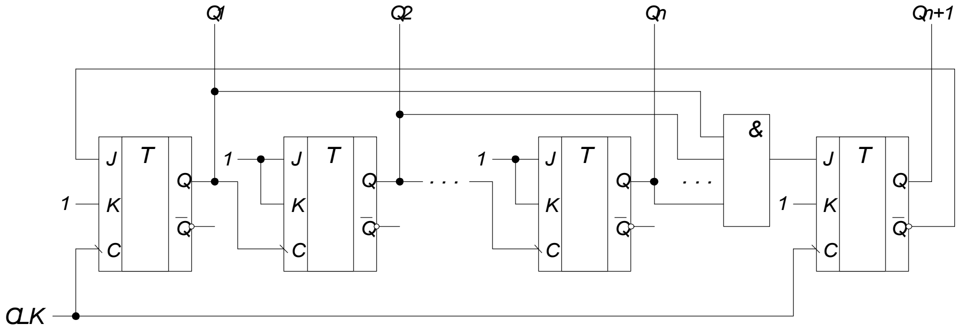

Рисунок 7 – Схема счётчика с коэффициентом пересчёта $2^n + 1$

Исходным состоянием для счётчика является нулевое. Инверсный сигнал с выхода единичного триггера обеспечивает счётный режим работы триггера младшего разряда. После того как все счётные триггеры установятся в единичное состояние, сигналы с их выходов обеспечат переключение единичного триггера в 1, и счётчик перейдёт в $2^n + 1$ состояние. При этом запись 1 в триггер младшего разряда запрещается сигналом с инверсного выхода единичного триггера. Следующий тактирующий импульс установит счётчик в исходное состояние.

При подаче на тактирующий вход рассмотренного выше счётчика сигнала с выхода обычного двоичного счётчика с $K_{СЧ} = 2^n$ можно получить счётчик, коэффициент пересчёта которого определяется как $K_{СЧ} = 2^n \cdot (2^n + 1)$.

Пример счётчика для n = 1 представлен на рисунке 8. Для него коэффициент пересчёта $K_{СЧ} = 2^1 \cdot (2^1 + 1) = 6$.

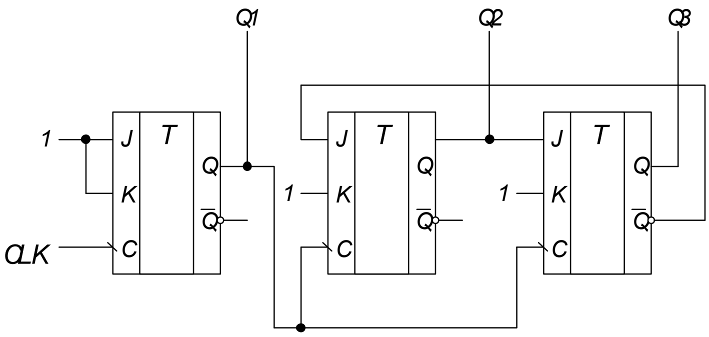

Рисунок 8 – Схема счётчика с коэффициентом пересчёта 6, построенного по схеме объединения счётчиков с $K_{СЧ} = 2^n$ и $K_{СЧ} = 2^n + 1$

Преимуществом использования счётчиков с $K_{СЧ} = 2^n + 1$ является более простая в ряде случаев структура счётчиков из-за отсутствия логических элементов, обеспечивающих обратные связи. Недостаток метода состоит в невозможности использования для построения счётчиков с $K_{СЧ} \neq 2^n$ $(2^n + 1)$.

ВЫВОДЫ

Для решения поставленной задачи перебора факториальных чисел был синтезирован алгоритм работы, а также построена схема факториального счётчика. Данная схема предполагает использование двоичных счётчиков с различным коэффициентом пересчёта, поэтому были рассмотрены основные методы синтеза таких счётчиков, а также их преимущества и недостатки. Основным достоинством полученного факториального счётчика является возможность последовательной генерации всех факториальных чисел с заданной разрядностью, а также возможность увеличения разрядности счётчика за счёт добавления дополнительных двоичных счётчиков.

SUMMARY

FACTORIAL NUMBER GENERATION BASED ON BINARY COUNTERS

A.E. Goryachev, postgraduate
Sumy State University

Receipt of factorial numbers as an intermediate step for permutation generating can be achieved by using factorial counter. Structural elements of this counter are connected binary counters with increasing counter capacity. Major methods of development of binary counters with random counter capacity are shown in the article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко А.А., Кулик И.А., Горячев А.Е. Электронная система генерации перестановок на базе факториальных чисел // Вісник СумДУ. Технічні науки. – 2007. – №1. – С.183 – 188.
2. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 528с.: ил.
3. Зубчук В.И., Сигорский В.П., Шкуро А.Н. Справочник по цифровой схемотехнике. – К.: Техника, 1990. – 448с.
4. Букреев И.Н., Горячев В.И., Мансуров Б.М. Микроэлектронные схемы цифровых устройств. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1990. – 416с.: ил.

Горячев А.Е., аспирант

Поступила в редакцию 10 сентября 2008 г.