УДК 519.718

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОЦІНКИ ЛІКВІДНОСТІ КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ

Л.Д. Назаренко, З.І. Маслова
Сумський державний університет, м. Суми

Пропонується алгоритм побудови математичної й комп'ютерної моделі , що дозволяє оцінити процеси, які мають місце в сучасній банківській системі України. До побудови моделі застосований варіативний підхід, що використовує можливості регресійного аналізу та математичної теорії систем. Математичний алгоритм реалізований у комп'ютерній моделі , створеній у середовищі програмування Delphi 7. Модель протестована на даних Сумської філії одного з найбільших українських банків.

Комп'ютерне моделювання різних аспектів фінансово-господарської діяльності в сучасному суспільстві є дієвим інструментом ефективного менеджменту. Особливо його роль зростає в умовах кризи [1]. Початок кризових явищ в Україні пов'язують перш за все з проблемами банківського кредитування різних галузей економіки. І саме банківський сектор економіки потребує в цих умовах зважених науково обґрунтованих підходів до оцінки і розв'язання проблем. Однією з них є виконання зобов'язань банківської установи шляхом пошуку ресурсів для оперативного підвищення ліквідності [2,3]. Ця проблема тісно пов'язана з науковою концепцією визначення сутності й рівня достатності капіталу, прибутковості, а також практичного розрахунку мінімального рівня ліквідності.

Математичне моделювання процесів оцінки ефективності банківської діяльності здійснюється сьогодні багатьма способами. Для розв'язання оптимізаційних задач ефективно використовують методи математичного програмування. Аналіз взаємовпливу економічних факторів досліджується методами регресійного та дисперсійного аналізу [4]. Математична теорія систем, розроблена в сімдесятих роках минулого століття в роботах Р. Калмана, М Арбіба, П. Фалба, дозволила моделювати процеси з інших позицій. У межах цієї теорії введено математичне визначення системи як сукупності множин часу, входів, виходів, станів і відображень між ними. Побудова таких неперервних або дискретних відображень у вигляді моделей вхід-вихід або моделей із простором станів дозволяє оцінити систему на спостережуваність, стійкість та керованість. Ці характеристики є оцінками стану системи та перспектив її розвитку. Математична теорія систем пропонує апарат побудови моделей керування системами або з метою досягнення їх стійкості, або з метою оптимізації певних параметрів [5].

У цьому дослідженні для побудови математичної моделі використані можливості парного регресійного аналізу та математичної теорії систем. Такий варіативний підхід передбачає створення неперервної регресійної моделі та лінійної дискретної детермінованої стаціонарної моделі з простором станів для дослідження впливу депозитної політики банку на кредитну.

У практичних додатках функція регресії може бути знайдена лише наближено. Регресійні моделі базуються на деяких припущеннях, які істотно впливають на рівняння регресії й відіграють більшу роль при оцінці точності моделі. Розглянемо основні передумови класичної регресійної моделі.

1 Значення аргументу функції регресії змінної x, наприклад, є контрольованими.

2 Через немонотонність вихідних даних функція регресії шукається в класі поліномів $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$.

3 Коефіцієнти регресії є постійними й ідентифікованими величинами. Для цих невідомих параметрів можуть бути однозначно розраховані значення оцінок $\breve{a}_0$, $\breve{a}_1, \ldots,$ $\breve{a}_m$.

4 Математичне сподівання збурювань дорівнює нулю:

$$M(u_i) = 0, \quad i=1,2, \ldots, n. \tag{1}$$

З огляду на те що результуючі значення $y_i = f(x_i) + u_i$, ця передумова означає, що збурювання в середньому не роблять на y ніякого впливу. Якщо функція регресії побудована, тобто знайдені значення оцінок, то для кожного $i=1,2,\ldots,n$ може бути обчислена похибка $\breve{u}_i = y_i - \breve{a}_0 x_i - \breve{a}_1 x^2{}_i - \ldots - \breve{a}_m x^m{}_i$. Похибки визначаються неоднозначно й залежать від методу оцінки параметрів. Однак у будь-якому випадку повинна виконуватися умова $\sum \breve{u}_i = 0$, що випливає з (1). Якість оцінки параметрів регресійної моделі за інших однакових умов є тим вищою, чим меншим є значення функції похибок для n спостережень. За функцію похибок обирається $S = \sum \breve{u}_i^2$.

5 Збурювання гомоскедастичні, тобто мають однакову дисперсію $\sigma_{u_i}^2 = \sigma_u^2$, $i=1,2,\ldots,n$. Незміщеною оцінкою дисперсії збурювань σ_u^2 є вибіркова дисперсія

$$\breve{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum \breve{u}_i^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum \left(y_i - \breve{y}(x_i)\right)^2 . \tag{2}$$

Оптимальне рівняння регресії дає та функція розглянутого класу, для якої

$$S = \sum \left[y_i - \breve{a}_0 - \breve{a}_1 x_i - \ldots - \breve{a}_m x_i^m \right] \to \min . \tag{3}$$

Оцінки a_0, a_1, $\ldots, a_m$ знаходимо з умови

$$\frac{\partial S}{\partial \breve{a}_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial \breve{a}_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial \breve{a}_m} = 0.$$

У результаті одержуємо систему $m+1$ лінійних рівнянь з $m+1$ невідомими:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 \quad + \quad \hat{a}_1 \sum x_i + \ldots + \hat{a}_m \sum x_i^m = \sum y_i, \\ \hat{a}_0 \sum x_i + \hat{a}_1 \sum x_i^2 + \ldots + \hat{a}_m \sum x_i^{m+1} = \sum y_i x_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{a}_0 \sum x_i^m + \hat{a}_1 \sum x_i^{m+1} + \ldots + \hat{a}_m \sum x_i^{2m} = \sum y_i x_i^m. \end{cases} \tag{4}$$

Оскільки функції $1, x, x^2, \ldots, x^m$ лінійно незалежні, то визначник системи (4) відмінний від нуля, і її єдиний розв'язок - МНК-оцінки a_0, $a_1, \ldots, a_m$ – приводить до мінімуму функції похибок (3). За теоремою Гаусса-Маркова з усіх можливих лінійних незміщених оцінок параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ класичної регресійної моделі тільки МНК-оцінки $a_0, \ldots, a_m$ є найкращими лінійними незміщеними оцінками.

Якість регресійної моделі будемо характеризувати коефіцієнтом детермінації $R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$. Значення R^2 (у відсотках) означає, що лінійна модель пояснює R^2% всієї дисперсії показника, інші (1-R^2)% не обумовлені моделлю.

Будуємо дискретні моделі вхід-вихід. Розглянемо для дискретних аналогів часу $k=1, \ldots, K$ скалярний процес $y(k)$, що залежить від скалярного процесу $u(k)$, і поставимо завдання визначити закон перетворення $u(k)$ в $y(k)$ на прикладі даних вхід-вихідного експерименту $\{(\bar{u}(1), \ldots, \bar{u}(K), \bar{y}(1), \ldots, \bar{y}(K) \quad)\}$. Будемо шукати лінійну модель, що у середньоквадратичному змісті найкращим способом відображає отримані досліджувані дані. Зафіксуємо n і будемо шукати модель вхід-вихід вигляду

$$y(k+n) = -a_1 y(k) - \ldots - a_n y(k+n-1) + c_1 u(k) + \ldots + c_n u(k+n-1)\,. \qquad (5)$$

Невідомі коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_n$ шукаємо за методом найменших квадратів з умови величини $J = \sum_{k=n}^{K} (y(k) - \bar{y}(k))^2 \to \min$, де будемо розглядати як міру відхилення реального закону поводження процесу від математичної моделі. Обраний порядок моделі n повинен задовольняти умову $K \geq 3n$, що забезпечить існування розв'язку $\theta = \mathrm{col}(\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \ldots, \theta_{2n}) = \mathrm{col}(-a_1, \ldots, -a_n, c_1, \ldots, c_n)$. Він буде визначений з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$R^* R\theta = R^* \bar{Y}\,.$$

Тут $\bar{Y} = col(\bar{y}(n+1), \bar{y}(n+2), \ldots, \bar{y}(K))$, а матриця R має вигляд

$$R = \begin{pmatrix} \bar{y}(0) & \bar{y}(1) & \ldots & \bar{y}(n) & \bar{u}(0) & \ldots & \bar{u}(n) \\ \bar{y}(1) & \bar{y}(2) & \ldots & \bar{y}(n+1) & \bar{u}(1) & \ldots & \bar{u}(n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{y}(N-n) & \ldots & \bar{y}(N-1) & & \bar{u}(N-n) & \ldots & \bar{u}(N-1) \end{pmatrix}.$$

Визначивши коефіцієнти моделі вхід-вихід, можна побудувати еквівалентну їй дискретну стаціонарну лінійну детерміновану модель з простором станів

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \qquad (6)$$

Тут $A=Fb(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ – матриця Фробеніуса, $B=e_n$ і $C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$. Такий вигляд моделі дозволяє розглянути ряд проблем керованості, спостережуваності та стійкості системи.

Систему вважають керованою, якщо можна організувати такі входи в систему, щоб отримати потрібні виходи. Достатньою умовою повної керованості є критерій Калмана

$$rg(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n. \tag{7}$$

Систему називають спостережуваною, якщо за відомими значеннями входів і виходів системи можна оцінити її стани. Критерій повної спостережуваності в цьому випадку має вигляд

$$rg\, col(C, CA, \ldots, CA^{n-1}) = n. \tag{8}$$

Для аналізу й синтезу керованих систем важливим є встановлення їх асимптотичної стійкості. Ця властивість показує здатність системи виходити на стабільний рівень функціонування в результаті імпульсного впливу. Нестійка система обов'язково руйнується. Для асимптотичної стійкості системи необхідно й достатньо, щоб всі власні значення матриці A знаходилися в одиничному колі комплексної площини.

Представлений алгоритм побудови математичної моделі просто реалізується програмно алгоритмічною мовою високого рівня.

Розглянемо практичну реалізацію моделі, що дозволить протестувати кредитно-депозитну політику однієї з регіональних філій великого комерційного банку.

Вихідними даними для побудови моделі є щомісячні показники виданих філією банку кредитів, дані про вкладені у банк депозити і середню заробітну плату в гривнях у Сумській області за 2004-2007 роки. Ілюструвати процес обробки інформації в комп'ютерній моделі дозволяє інтерфейс програмного пакета, виконаного в середовищі програмування Delphi 7. У статті наводяться у вигляді рисунків фрагменти роботи комп'ютерної моделі розглянутої системи.

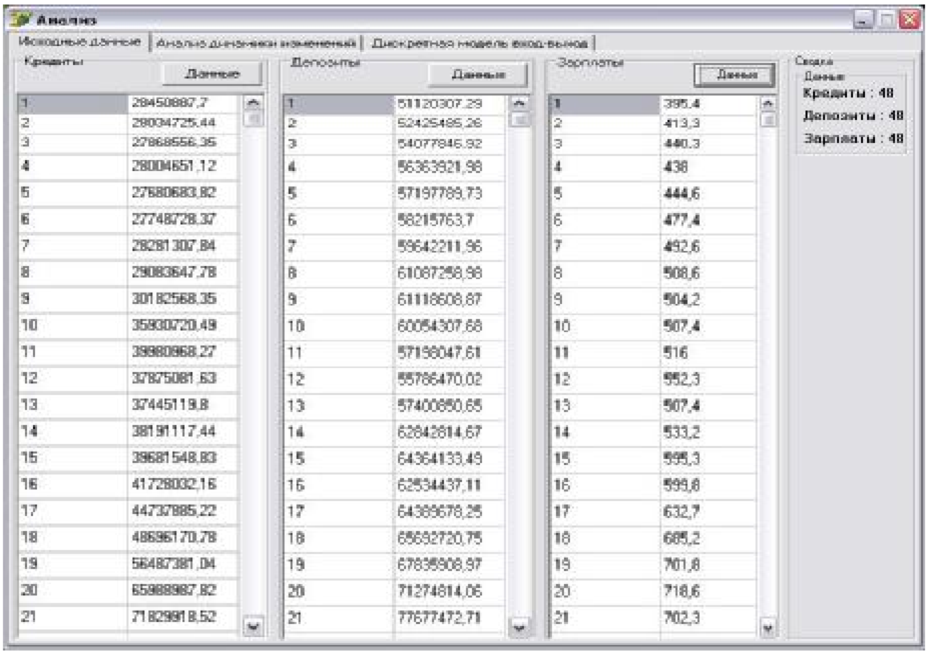

Рисунок 1 - Уведення експериментальних даних

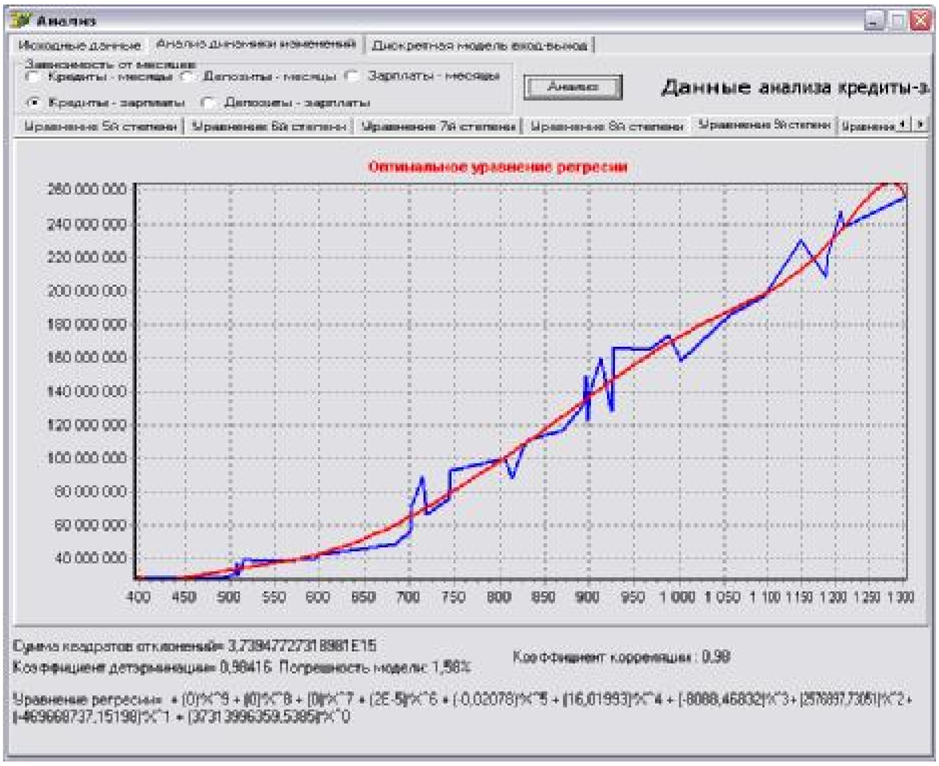

Рисунок 2 - Залежність кредитів від середньої заробітної плати

Рисунок 3 - Залежність депозитів від середньої заробітної плати

Проводиться регресійний аналіз змін показників щомісячно залежно від середньої заробітної плати. Були побудовані рівняння поліноміальної регресії починаючи з 2 степеня.

Оптимальна регресійна модель впливу заробітної плати на кредити має вигляд

$$y = 0,00002x^6 - 0,02078x^5 + 16,01993x^4 - 8088,46832x^3 + 2576897,73051x^2 - \\ -469668737,1598x + 37313996359,5385.$$

Її якість становить 98,42%, коефіцієнт кореляції - 0,98.Оптимальна регресійна модель впливу заробітної плати на депозити має вигляд

$$y = 0,00003x^6 - 0,03078x^5 + 23,01422x^4 - 11238,69158x^3 + 3452257,29999x^2 - \\ -604618859,68178x + 46008735370,6208.$$

Далі побудуємо модель, що дозволить оцінити стан процесів взаємодії зміни заробітної плати й показників кредитів і депозитів.

Спочатку побудуємо допоміжну дискретну модель вхід-вихід за показниками входів у систему u(середня заробітна плата) і її реакцій y (кредити або депозити), які визначаються в однакові моменти часу K=48 разів. Вибираємо порядок моделі з умови $n \le \frac{48}{3} = 16$. Оберемо $n = 3$. Вважаємо, що істотний вплив на показники ліквідності мають результати попереднього кварталу. Вигляд моделі

$$y(k+3) = -a_1 y(k) - a_2 y(k+1) - a_3 y(k+2) + c_1 u(k) + c_2 u(k+1) + c_3 u(k+2).$$

Завдання зводиться до знаходження такого значення векторного параметра $\theta = (-a_1, -a_2, -a_3, c_1, c_2, c_3)$, що мінімізує середньоквадратичне відхилення

$$J(\theta) = \sum_{i=3}^{47} (y(i) - \overline{y}(i))^2 .$$

Для моделі з простором станів

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases}$$

маємо матриці $A=Fb(-a_1,-a_2,-a_3)$ – матриця Фробеніуса, $B=e_3$ і $C=(c_1,c_2,c_3)$.

Критерії керованості та спостережуваності для розглянутих моделей виконуються. Оцінка впливу депозитів на кредити показує, що одне із власних чисел матриці A відповідної моделі з простором станів більше за одиницю, тому дана система не є асимптотично стійкою. Інші досліджувані системи - асимптотично стійкі.

Отримані результати системного аналізу зображені на рис. 4 – рис.6. Аналіз моделі зростання показав, що зростання середньої заробітної плати визначає збільшення депозитів у банку та більші його кредитні можливості. У той самий час вплив депозитів на кредити є нестійкою системою. Цей фактор є ключовим для оцінки ліквідності комерційного банку. Отже, керівництву філії необхідно переглянути кредитно-депозитну політику, оскільки незабаром філія не зможе виконувати свої зобов'язання перед клієнтами.

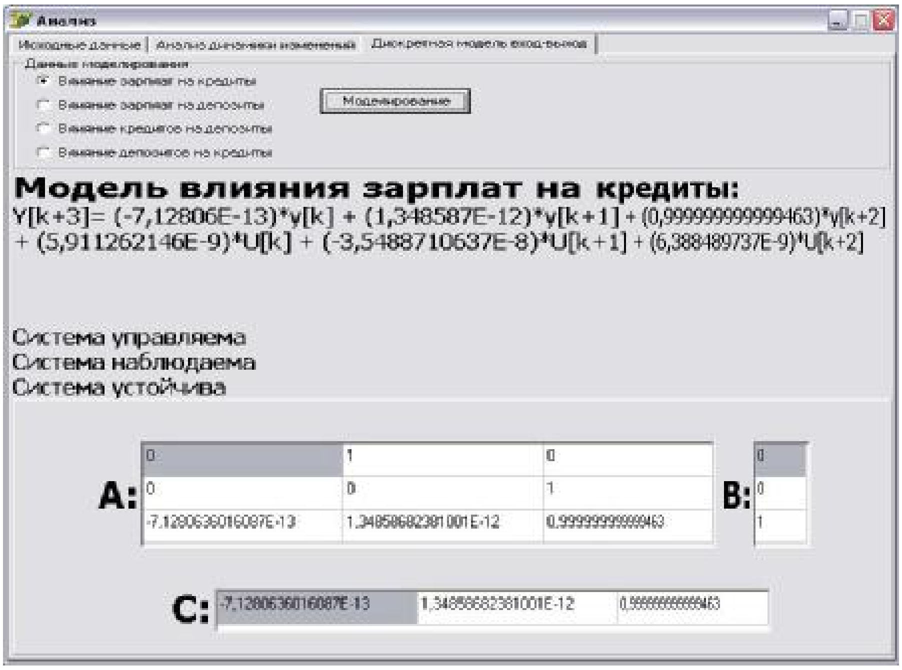

Рисунок 4 - Модель впливу середньої заробітної плати на кредити

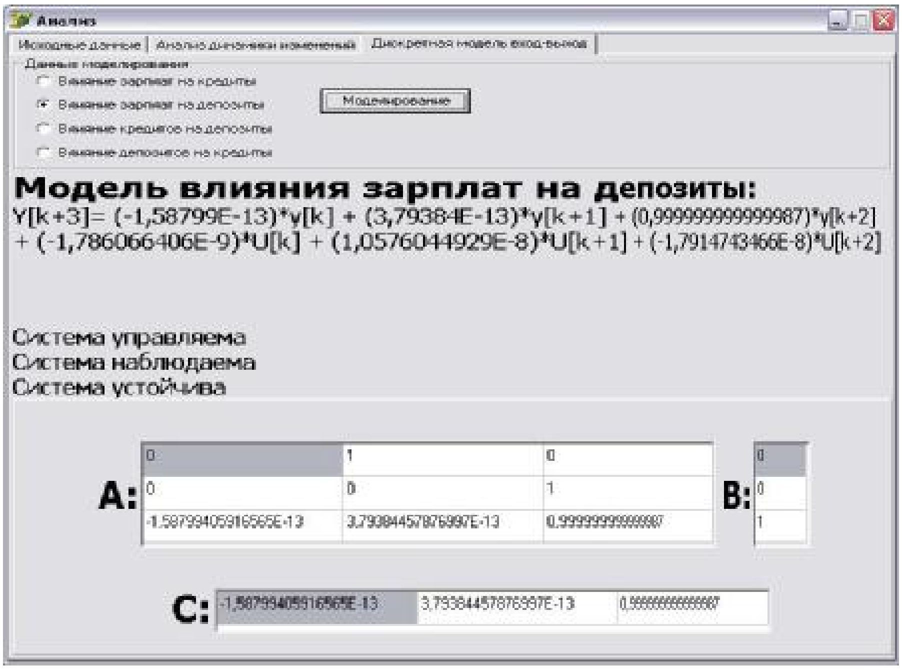

Рисунок 5 - Модель впливу середньої заробітної плати на депозити

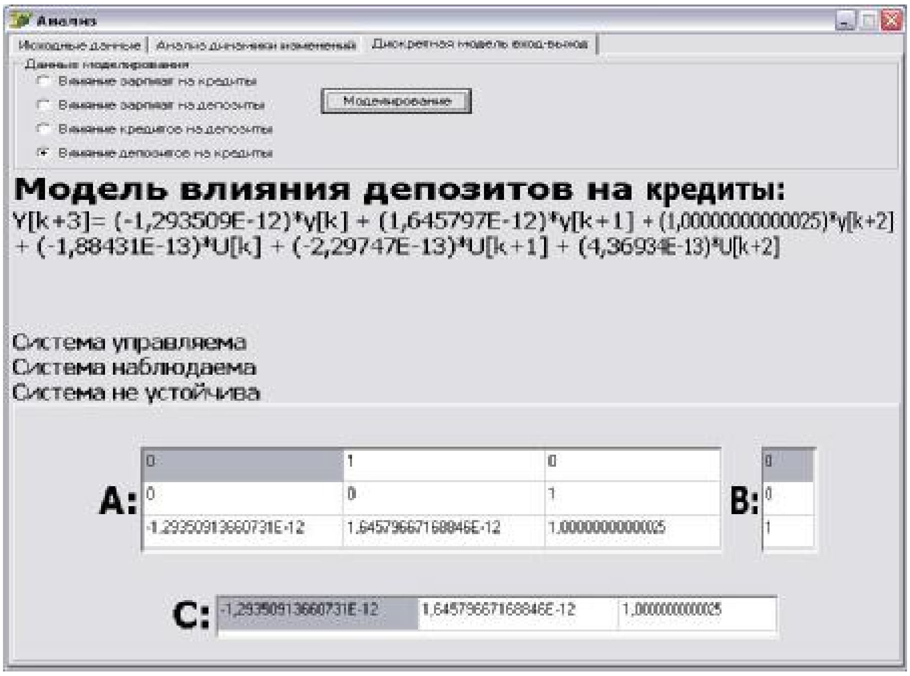

Рисунок 6 - Модель впливу депозитів на кредити

ВИСНОВКИ

1 Побудовано математичну й комп'ютерну моделі оцінки ліквідності комерційного банку. Математична модель має варіативний вигляд, тобто складається з двох складових - неперервної і дискретної, які дозволяють як спрогнозувати обсяги кредитів і депозитів залежно від рівня середньої заробітної плати клієнтів, так і оцінити стан і перспективи функціонування банківської установи. Комп'ютерна модель створена в середовищі Delphi 7.

2 Висновки моделі підтверджені сучасною реальною ситуацією в цій та інших філіях банку. В умовах банківської кризи розроблена модель може ефективно оцінювати поточні можливості банку, а отже, і сприяти оперативному вирішенню нагальних проблем.

3 Модель може бути інструментом ефективного менеджменту для дослідження взаємодії будь –яких інших процесів, що впливають на роботу банківських установ.

SUMMARY

MATHEMATIC AND COMPUTER MODELLING OF THE LIQUIDITY EVALUATION OF THE COMMERCIAL BANK

L.D. Nazarenko, Z.I. Maslova
Sumy State University

The algorithm of mathematic and computer modeling, that allows to evaluate the processes jn the modern Ukrainian banking system, is suggested. The model uses the variative approach, based on the opportunities of the regressive analysis and system's mathematic theory. Mathematic algorism, realized in the computer model, is created by the programming environment Delphi 7. The model was tested on the data of the Sumy branch of one of the biggest Ukrainian banks.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Завадская Д. Оптимизация кредитно-депозитной стратегии банка// Банківська справа. – 2004. – № 2. – С.87-91.
2. Коммерческие банки - http://www.ccas.ru/mmes/educat/lab01/9/b.html
3. Офіційний сайт «Приватбанку» – http://privatbank.ua/
4. Назаренко А.М., Основи эконометрики: Підручник. – Київ: Центр наукової літератури, 2004. – 392с.
5. Любчак В.О., Назаренко Л.Д. Основи математичної теорії систем: Навчальний посібник. – Суми: Видавництво Сумду, 2008. – 212с.

Назаренко Л.Д., доцент, СумДУ, м. Суми;
Маслова З.І., канд. техн. наук, доцент, СумДУ, м. Суми

Надійшла до редакції 26 листопада 2008 р.