

Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука

Р.М. Літнарівч

Основи математики

**ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПСИХОЛОГО-
ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ СТЕПЕНЕВОЮ
ФУНКЦІЄЮ**

Навчальний посібник
Для студентів
педагогічного факультету

Частина 5

Рівне 2006

Літнарівч Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту степенною функцією. Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету. Частина 5. МЕНУ, Рівне, 2006, – 17 с.

Рецензенти: В.Г. Бурачек, доктор технічних наук,
професор.

Е.С. Парняков, доктор технічних наук,
професор.

В.О. Боровий, доктор технічних наук,
професор.

Відповідальний за випуск: Й.В.Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор.

Розроблена методика обробки матеріалів за результатами психологічного і педагогічного експерименту. Обробка матеріалів проводиться за способом найменших квадратів степенною функцією. Встановлюється тіснота зв'язку між факторними і результативними ознаками, будується точкова діаграма, підбирається апроксимуюча функція, проводиться контроль і оцінка точності.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

Зміст

	Стор.
Передмова.....	4
1. Представлення операційних змінних	6
2. Побудова точкової діаграми	7
3. Короткі відомості про дії над степенями.....	7
4. Обчислення коефіцієнта кореляції r і коефіцієнтів a і b	10
5. Практична реалізація	12
Висновки.....	15
Література.....	16

Передмова

Для обробки матеріалів психологічного і педагогічного експериментів необхідно використати математичний апарат, який дав би можливість визначити зв'язок між факторними і результативними ознаками і вивести формулу такого зв'язку. При цьому доцільно використати спосіб найменших квадратів, як добре розроблений апарат оптимізації розрахунків експериментальних даних з оцінкою точності результатів.

Матеріал підготовлений за курсом лекцій, прочитаних автором студентам педагогічного факультету Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. академіка Степана Дем'янчука у 2006 році.

Автор виражає щирю вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Йосипу Володимировичу Джуню, який позитивно оцінив науковий напрямок і дав можливість прочитати курс лекцій і підготувати матеріал до видання.



“Талант экспериментатора сказывается в умении выделить в чистом виде изучаемое явление, освободив его от побочных влияний”

А.Ф. Иоффе

Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту степеневою функцією

$$Y = aX^b$$

1. Представлення операційних змінних

Дослідник повинен ознайомитись з експериментальними даними, які були отримані іншими психологами, а також з їхніми спробами пояснити явище, що його зацікавило. Необхідно ознайомитися з опублікованою літературою і уточнити проблему, сформулювати нову гіпотезу та ідею стосовно плану власних експериментальних досліджень.

Експериментальна гіпотеза на відміну від теоретичної (концептуальної) формулюється у вигляді імплікативного висловлювання «Якщо ... , то ... ». Крім того, вона повинна бути операціоналізована, тобто змінні, які фігурують у твердженні «Якщо X ..., то Y ...», повинні контролюватись в експерименті. Змінною X управляє (маніпулює) експериментатор, це – незалежна змінна. Змінна Y повинна бути зареєстрована безпосередньо (або за допомогою апаратури). Це – залежна змінна. Другими словами, X – факторна ознака, Y – результативна.

Крім незалежної та залежної змінних потрібно визначити і операціоналізувати зовнішні змінні, які можуть вплинути на залежну змінну.

Для управління (маніпулювання) незалежною змінною та реєстрації залежних змінних потрібен інструментарій.

У психологічному дослідженні застосовується різноманітний інструментарій, у тому числі психофізіологічний. Його вибір залежить від того, в якій формі плануються незалежна й залежна змінні.

Приведемо результати експерименту.

Таблиця 5.1 Операційні дані психолого-педагогічного експерименту.

X	0,5	1,5	3,3	4	5	7	9	10	12	15
Y	1,91	4,1	7,15	8,2	9,6	12	14	15,5	18	21

2. Побудова точкової діаграми

За даними експериментальних досліджень, приведених у табл. 5.1 будуємо графік з метою виявлення закону для підбору апроксимуючої функції.

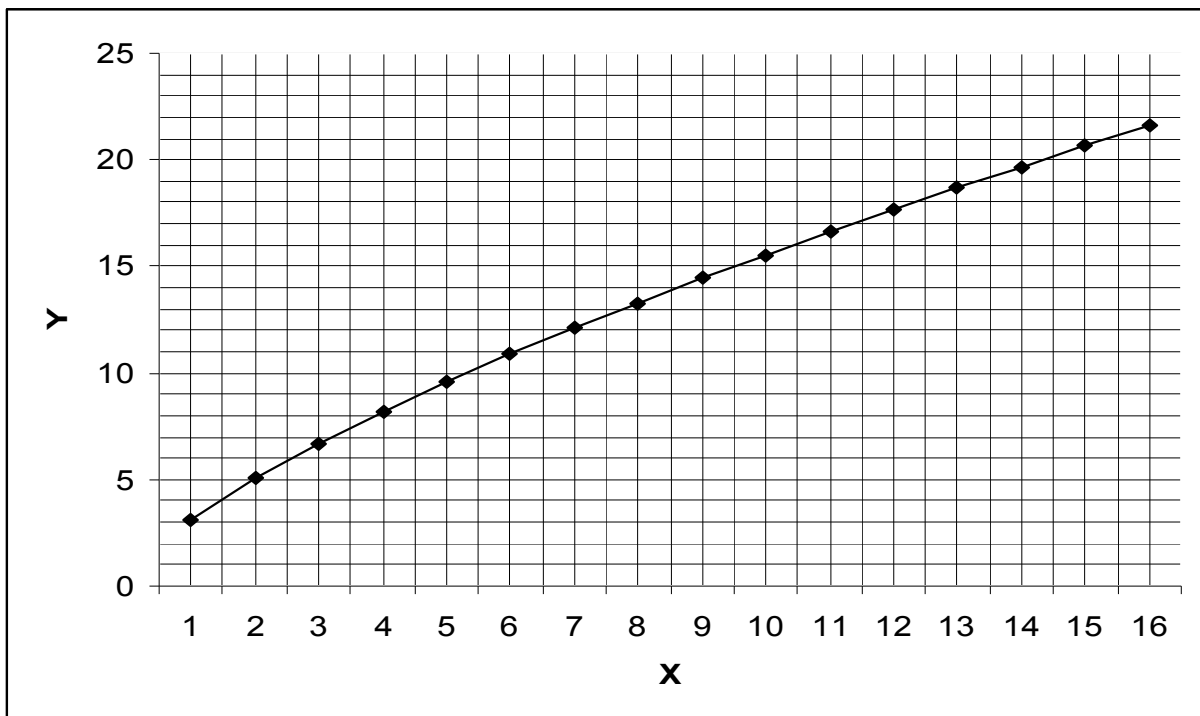


Рис. 5.1. Точкова діаграма і апроксимуюча пряма.

3. Короткі відомості про дії над степенями

Проводячи наукові дослідження і намагаючись вивести формулу степеневих функцій, досліднику необхідно освіжити в пам'яті інструментарій дій над степенями.

Для степенів з позитивними основами справедливі наступні співвідношення

$$\left. \begin{aligned} a^{n_1} * a^{n_2} &= a^{n_1+n_2} \\ a^{n_1} \div a^{n_2} &= a^{n_1-n_2} \end{aligned} \right\} \mathbf{1.}, \quad (5.1)$$

тобто, при множенні (діленні) степенів з однаковою основою показники степенів додаються (віднімаються), а основа зберігається.

$$\mathbf{2.} \quad \left(a^{n_1} \right)^{n_2} = a^{n_1 * n_2}, \quad (5.2)$$

тобто, при піднесенні степені в степінь показники степені перемножуються, а основа зберігається.

$$\mathbf{3.} \quad \left(a * b \dots l \right)^n = a^n * b^n \dots l^n, \quad (5.3)$$

тобто, степінь добутку множників дорівнює добутку степенів цих множників.

$$\mathbf{4.} \quad \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (5.4)$$

тобто, степінь дроби дорівнює дроби степенів чисельника і знаменника.

5.

Із приведених формул слідує подібні співвідношення для арифметичних коренів

$$\sqrt[n]{a * b \dots l} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{l}, \quad (5.5)$$

тобто, корінь із добутку співмножників дорівнює добутку коренів із цих же співмножників.

6.

Корінь із дроби дорівнює дроби коренів із чисельника і знаменника.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad (5.6)$$

7.

Підкореневе число можна підвести в будь-яку степінь K , помноживши на це ж число K показник кореня n (величина кореня від цього не зміниться).

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}. \quad (5.7)$$

Примітка. Якщо розглядаються не тільки арифметичні корені, то наведені вище формули приводять до абсурдних співвідношень. Наприклад,

$$\begin{aligned} 2 = \sqrt{4} &= \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{-2} * \sqrt{-2} = (\sqrt{-2})^2 = -2. \\ -2 &= \sqrt[3]{-8} = \sqrt[5]{64} = 2 \\ \frac{2}{3} &= \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[4]{\frac{(-2)^4}{3^4}} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

8.

Винесення множника з під радикала. Якщо a і b додатні числа, то

$$a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}. \quad (5.8)$$

Ця формула справедлива для будь-яких n лише при додатних a і b ; а при непарних n формула справедлива для будь-яких дійсних a і b . Тому не можна писати, наприклад,

$$\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b},$$

а слід писати

$$\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}, \quad (5.9)$$

тобто,

$$\sqrt{a^2 b} = \begin{cases} a \sqrt{b}, & a \geq 0, \\ -a \sqrt{b}, & a \leq 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

4. Обчислення коефіцієнта кореляції r і коефіцієнтів a і b

Коефіцієнт кореляції r розраховується за формулою

$$r^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (\ln Y_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln Y_i \right)^2 \right]}. \quad (5.11)$$

Позначимо

$$\left[\sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i \right] = A, \quad (5.12)$$

$$\left[\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2 \right] = B. \quad (5.13)$$

Тоді, формула (5.11) буде

$$r^2 = \frac{A^2}{B \left[\sum_{i=1}^n (\ln Y_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln Y_i \right)^2 \right]}. \quad (5.14)$$

Коефіцієнт b розраховують за формулою

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2}, \quad (5.15)$$

або

$$b = \frac{A}{B}. \quad (5.16)$$

Коефіцієнт a розраховують за формулою

$$a = \exp \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{i=2}^n \ln Y_i - b \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \right]. \quad (5.17)$$

Підставивши вирахований коефіцієнт b за формулою (5.16) у формулу (5.17), отримують коефіцієнт a .

Одержавши із результатів обчислень коефіцієнти a і b , записують апроксимуючу функцію у вигляді

$$Y' = a * X^b \quad (5.18)$$

5. Практична реалізація

Підготовка даних ведеться в спеціальній обчислювальній таблиці

Таблиця 5.2. Обчислювальна таблиця.

i	X _i	Y _i	lnX _i	lnY _i	lnX _i lnY _i	(lnX _i) ²	(lnY _i) ²	Y=3,1*X ^{0,7}	V _i =Y-Y	V _i ²
1	0,5	1,91	-0,6931	0,6471	-0,4485	0,4804	0,4187	1,90	-0,01	0,0001
2	1,5	4,1	0,4055	1,4110	0,5722	0,1644	1,9909	4,11	+0,01	0,0001
3	3,3	7,15	1,1939	1,9671	2,3485	1,4254	3,8694	7,14	-0,01	0,0001
4	4	8,2	1,3863	2,1041	2,9169	1,9218	4,4272	8,18	-0,02	0,0004
5	5	9,6	1,6094	2,2618	3,6401	2,5902	5,1157	9,56	-0,04	0,0016
6	7	12	1,9459	2,4849	4,8354	3,7865	6,1747	12,11	+0,11	0,0121
7	9	14	2,1972	2,6390	5,7984	4,8277	6,9643	14,44	+0,44	0,1936
8	10	15,5	2,3026	2,7408	6,3110	5,3020	7,5120	15,55	+0,05	0,0025
9	12	18	2,4849	2,8904	7,1824	6,1747	8,3544	17,68	-0,32	0,1024
10	15	21	2,7080	3,0445	8,2445	7,3333	9,2690	20,67	-0,33	0,1089
n=10	67,3	111,46	15,5406	22,1907	41,4009	34,0064	54,0963			0,4218

Розрахунок коефіцієнта кореляції r

$$r^2 = \frac{\left[41,4009 - \frac{1}{10} * 15,5406 * 22,1907 \right]^2}{\left[34,0064 - \frac{1}{10} * (15,5406)^2 \right] \left[54,0963 - \frac{1}{10} * (22,1907)^2 \right]}$$

$$A = \left[41,4009 - \frac{1}{10} * 15,5406 * 22,1907 \right] = 6,9152 ,$$

$$r^2 = \frac{(6,9152)^2}{9,8554 * 4,8536} = \frac{47,8200}{47,8342} = 0,9997 ,$$

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0,9997} = 0,9998 ,$$

$$B = |34.0064 - 1/10(15.5406)^2| = 9.8554 ,$$

$$b = \frac{A}{B} = \frac{6,9152}{9,8554} = 0,7017 ,$$

$$a = \exp\left[\frac{1}{10}(22,1907 - 0,7017 * 15,5406)\right] = \\ = \exp(1,12858).$$

Звідки

$$a = 3,0913 .$$

Таким чином, за результатами проведених досліджень ми отримали слідуєчий тренд.

$$y' = 3,0913 * X^{0,7017} . \quad (5.19)$$

Для практичного використання формула (5.19) набуде вигляду

$$y' = 3,1 * X^{0,7} . \quad (5.20)$$

Для контролю були проведені розрахунки на програмованому мікрокалькуляторі CINIZEN SRP-350 по програмі [3 Pwr] і отримані результати:

$$r = 0,999824582 ,$$

$$a = 3,091514234 ,$$

$$b = 0,701655873 .$$

Там же були розраховані контрольні значення параметрів y_i' за їх факторними ознаками X_i . ці дані, заокруглені до 0,01 приводяться в табл. 5.2.

Приведемо оцінку точності результатів. Середня квадратична похибка розрахунків за формулою (5.19) буде

$$m_{y'} = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,4218}{9}} = 0,216 .$$

Висновки

1. За результатами проведених психолого-педагогічних досліджень встановлено, що коефіцієнт кореляції між факторними і результативними ознаками дорівнює 0,9998, що говорить про надто високий зв'язок.

2. Побудований тренд функціонального зв'язку. Виведена формула має вигляд

$$y' = 3,1 * X^{0,7} .$$

3. Виконана оцінка точності побудованого тренду і встановлено, що виведена нами функція має середню квадратичну похибку $m = 0,216$ по відхиленням розрахункових даних від експериментальних.

4. Встановлено, що для проведення досліджень при апроксимації степеневою функцією $y = a * x^b$ нам повністю підходить програма [3 Pwr] програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP-350.

5. Дані експерименту кращим чином апроксимуються степеневою функцією.

Література

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1980, - 975 с.
2. Вища математика: Підручник / За ред. Шинкарика М.І. – Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003, - 480 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2001, - 648 с.
4. Козира В.М. Елементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників до вузів, студентів. – Тернопіль: СМП «Астон», 2004, - 100 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике, М.: Наука, 1973, - 831 с.
6. Літнарівч Р.М. Елементи науково-дослідної роботи студентів під час вивчення теми «Математична обробка та оцінювання точності геодезичних вимірів». Нові технології навчання. Науково-методичний збірник. Випуск 14. К.: ІСДО, 1995, с. 123-126.
7. Лябах Б.В., Литнарівч Р.Н. Научно - исследовательская работа студентов как фактор интенсификации познавательной деятельности. Основные пути повышения качества подготовки специалистов для народного хозяйства. Брянск, БСХИ, 1984, - с. 99 – 100.
8. Літнарівч Р.М., Кравцов М.І. До питання оцінки точності визначення координат пункту із GPS спостережень. Інженерна геодезія. Вип. 50, - К.: КНУБА, 2004, - с. 125 – 134.
9. Максименко С.Д., Носенко Є.Л. Експериментальна психологія. – К.: МАУП, 2004, - 128 с.
10. Опря А.Т. Статистика, К.: Центр навчальної літератури, 2005, - 472 с.

Літнарівч Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

Основи математики

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПСИХОЛОГО-
ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ СТЕПЕНЕВОЮ
ФУНКЦІЄЮ

Навчальний посібник
Для студентів
педагогічного факультету

Частина 5

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і
дизайн у редакторі Microsoft® Office 2003®
Воронко Ірина Олександрівна

Міжнародний Економіко - гуманітарний Університет
імені академіка Степана Дем'янчука
33027, м. Рівне, вул. акад. С. Дем'янчука, 4.