Літнарович Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ. ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ПАЛІНОМІАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Навчальний посібникдля студентів педагогічного факультету

Ч астина 7

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у редакторі Microsoft Office 2003
Мельник Тетяна Леонідівна

Міжнародний Економіко-Гуманітарний Університет імені академіка Степана Дем'янчука

33027, м.Рівне, вул.академ.С.Дем'янчука,4.

Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука

Р.М.Літнарович

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ. ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ПОЛІНОМІАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Навчальний посібник
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

Частина 7

Рівне 2006

Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту поліноміальною функцією.

Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету. Частина 7. МЕГУ, Рівне, 2006, -- 20 с.

Рецензенти:
В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор.
Е.С.Парняков, доктор технічних наук, професор.
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор.

Відповідальний за випуск:
Й.В.Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор.

Розроблена методика обробки матеріалів за результатами психолого-педагогічного експерименту.

Обробка матеріалів проводиться за способом найменших квадратів. Будується точкова діаграма, підбирається апроксимуюча функція, проводиться контроль і оцінка точності.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

Література

1. Бронштейн И.Н., Семедняев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. М.:Наука, 1980, -- 975с.
2. Вища математика: підручник/За ред.. Шинкарика М.І. – Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003, -- 480с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.:А.С.К., 2001, -- 648с.
4. Козира В.М. Елементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників до вузів, студентів, -- Тернопіль: СМП «Астон», 2004, -- 100с.
5. Корн Г., Корн Т. Справ очник по математике. М.:Наука, 1973, -- 831с.
6. Літнарович Р.М. Елементи науково-дослідної роботи студентів під час вивчення теми: «Математична обробка та оцінювання точності геодезичних вимирів». Нові технології навчання. Науково-методичний збірник. Випуск 14. К.:ІСДО, 1995, с.123-126.
7. Лябах Б.В., Літнарович Р.М. Научно-исследовательская работа студентов как фактор интенсификации познавательной деятельности. Основные пути повышения качества подготовки специалистов для народного хояйства. Брянск, БСХИ, 1984, -- с.99-100.
8. Літнарович Р.М., Кравцов М.І. До питання оцінки точності визначення координат пункту із GPS спостережень. Інженерна геодезія. Вип.. 50, -- К.:КНУБА, 2004, -- с. 125-134.
9. Максименко С.Д., Косенко Є.Л. Експериментальна психологія. – К.:МАУП, 2004, -- 128с.
10. Опря А.Т. Статистика. – К.:Центр навчальної літератури, 2005, -- 472с.

Висновки

1. За результатами проведених досліджень встановлено, що експериментальні дані кращим чином апроксимуються поліноміальною функцією.
2. Виведена формула апроксимуючої кривої має вигляд $y' = 3{,}37 - 2{,}54x + 1{,}08x^2$.
3. Виконано зрівноваження результатів експериментальних даних по способу найменших квадратів.
4. Виконана оцінка точності зрівноваження. Отримана середня квадратична похибка одиниці ваги $m_{y'} = 1{,}91$.
5. Отримані середні квадратичні похибки визначення коефіцієнтів *a, b, c* за результатами зрівноваження $m_a = 1{,}50; m_b = 0{,}97; m_c = 0{,}288$.
6. Встановлено, що для проведення досліджень при апроксимації квадратичним поліномом $y = a + bx + cx^2$ нам повністю підходить програма [5x^2] програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP-350.
7. Розроблену в даній роботі методику можна рекомендувати для обробки експериментальних даних психолого-педагогічного експерименту.

ЗМІСТ

Передмова

Провівши педагогічний чи психологічний експеримент і маючи ряд парних експериментальних даних x_i, y_i, необхідно описати залежність між ними формулою, підбираючи таким чином, щоб апроксимуюча крива пройшла б якомога ближче між даними точками.

Спочатку необхідно нанести дані точки за їх координатами у вибраній системі координат і користуючись шаблонними графіками, приведеними в першій частині навчального посібника, вибрати вид функції, якою будемо апроксимувати експериментальні дані.

Побудова апроксимуючої функції використовується за способом найменших квадратів.

Проводиться оцінка точності результатів.

Матеріал підготовлений за курсом лекцій, прочитаних автором, студентам педагогічного факультету Міжнародного Економіко-Гуманітарного Університету імені академіка Степана Дем'янчука у 2006 році.

Автор висловлює щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Йосипу Володимировичу Джуню, який позитивно оцінив науковий напрямок і дав можливість прочитати курс лекцій і підготовити матеріал до видання.

$$m_b = 1{,}91 \cdot \sqrt{\frac{112860}{435600}} = 0{,}97$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта *c*, буде

$$m_c = m_{y'} \cdot \sqrt{\frac{A_3}{\Delta}}, \qquad (7.29)$$

де

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 285 \\ 285 & 2025 \end{vmatrix} =$$

$$= 45 \cdot 2025 - (285)^2 = 9900 \cdot$$

і в нашому випадку

$$m_c = m_{y'} \cdot \sqrt{\frac{A_3}{\Delta}} = 1{,}91 \cdot \sqrt{\frac{9900}{435600}} = 0{,}288$$

$$m_{y'} = \sqrt{\frac{\sum VV}{n-1}} = \sqrt{\frac{32{,}9224}{9}} = 1{,}91.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a за результатами зрівноваження по способу найменших квадратів розраховується за формулою

$$m_a = m_{y'}\sqrt{\frac{A_1}{\Delta}}, \qquad (7.26)$$

де

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2, \qquad (7.27)$$

і в нашому випадку

$$A_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 285 & 2025 \\ 2025 & 15333 \end{vmatrix} =$$

$$= 285 \cdot 15333 - (2025)^2 = 269280$$

Тоді

$$m_a = 1{,}91 \cdot \sqrt{\frac{269280}{435600}} = 1{,}50;$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b, буде

$$m_b = m_{y'} \cdot \sqrt{\frac{A_2}{\Delta}} \qquad (7.28)$$

де

$$A_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 285 \\ 2025 & 15333 \end{vmatrix} =$$

$$= 45 \cdot 15333 - 285 \cdot 2025 = 112860,$$

Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту поліноміальною функцією.

1. *Представлення операційних змінних.*

Усіх потенційних досліджуваних, які можуть бути об’єктом конкретного психологічного чи педагогічного дослідження, розглядають як популяцію або генеральну сукупність.

Кількість досліджуваних (людей чи тварин), які беруть участь в експерименті, називають вибіркою.

Склад вибірки повинен репрезентувати генеральну сукупність, адже висновки експерименту поширюються на всіх членів популяції.

Потенційні досліджувані характеризуються різною статтю, віком, соціальним станом, рівнем освіти тощо. Крім того, вони мають різні індивідуально-психологічні особливості (наприклад, інтелект, рівень нейротизму, агресивності).

Для того, щоб вибірка репрезентувала всіх членів популяції, застосовують техніку рандомізації, згідно з якою різним представникам генеральної сукупності пристосовують відповідний індекс, а потім з кожної підгрупи випадково вибирають членів експериментальної вибірки.

Дослідник організовує під час експерименту взаємодію з досліджуваними, ознайомлює їх з інструкцією (якщо потрібно, здійснює навчальну серію експерименту). Він змінює незалежну зміну (тобто завдання, зовнішні умови тощо), і реєструє (поведінку, успішність і т.і.) досліджуваних.

Приведемо результати нашого експерименту.

Таблиця 7.1. Операційні дані.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2,4	3,0	2,0	6,5	10	19	25	40	48	70

Для того, щоб описати математично результати, приведені в таблиці 7.1., необхідно побудувати точкову діаграму і графік (якщо це можливо) по цих дискретних даних.

Пізніше, на основі шаблонів графіків різних функцій, приведених в частині **1** даного навчального посібника, підібрати саме ту функцію, яка описує даний графік.

В подальшому залишиться лише вирахувати методом найменших квадратів, тобто щоб сума квадратів відхилень розрахункових результативних ознак мінімально відхилялась від експериментальних даних, коефіцієнта a, b, c.

2. Побудова точкової діаграми.

За даними експериментальних досліджень, приведених у таблиці 7.1., будуємо графік з метою виявлення закону для підбору апроксимуючої функції.

$$\Delta c = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc|cc} 10 & 45 & 225,9 & 10 & 45 \\ 45 & 285 & 1605,5 & 45 & 285 \\ 285 & 2025 & 12306,5 & 285 & 2025 \end{array} \right. =$$

$$= 10 \cdot 285 \cdot 12306,5 + 45 \cdot 1605,5 \cdot 285 + 225,9 \cdot 45 \cdot 2025 -$$

$$- 225,9 \cdot 285 \cdot 285 - 10 \cdot 1605,5 \cdot 2025 - 45 \cdot 45 \cdot 12306,5 =$$

$$= 468435,$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{468435}{435600} = 1,0753787.$$

Таким чином, ми отримали формулу

$$y' = a + bx + cx^2 = 3,37 - 2,5396x + 1,0754x^2. \qquad (7.24)$$

Для практичної реалізації формула (7.24) прийме вигляд

$$y' = 3,37 - 2,54x + 1,08x^2. \qquad (7.25)$$

Контрольні розрахунки були проведені на програмованому мікрокалькуляторі CITIZEN SRP-350 по програмі [5x^2].

Вони були округлені до 0,01 і приведені у стовпчику y' табл. 7.2.

5. Оцінка точності результатів.

Середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження за способом найменших квадратів

$$\Delta a=\left|\begin{array}{ccc|cc}225{,}9 & 45 & 285 & 225{,}9 & 45\\ 1605{,}5 & 285 & 2025 & 1605{,}5 & 285\\ 12306{,}5 & 2025 & 15333 & 12306{,}5 & 2025\end{array}\right. =$$

$$=225{,}5\cdot 285\cdot 15333+45\cdot 2025\cdot 12306{,}5+285\cdot 1605{,}5\cdot 2025-$$
$$-285\cdot 285\cdot 12306{,}5-225{,}9\cdot 2025\cdot 2025-45\cdot 1605{,}5\cdot 15333=$$
$$=1467972,$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_i^4\end{vmatrix}=435600,$$

$$a=\frac{\Delta a}{\Delta}=\frac{1467972}{435600}=3{,}37,$$

$$\Delta b=\left|\begin{array}{ccc|cc}10 & 225{,}9 & 285 & 10 & 225{,}9\\ 45 & 1605{,}5 & 2025 & 45 & 1605{,}5\\ 285 & 12306{,}5 & 15333 & 285 & 12306{,}5\end{array}\right. =$$

$$=10\cdot 1605{,}5\cdot 15333+225{,}9\cdot 2025\cdot 285+285\cdot 45\cdot 12306{,}5-$$
$$-285\cdot 1605{,}5\cdot 285-10\cdot 2025\cdot 12306{,}5-225{,}9\cdot 45\cdot 15333=$$
$$=-1106259,$$

$$b=\frac{\Delta b}{\Delta}=\frac{-1106259}{435600}=-2{,}5396212,$$

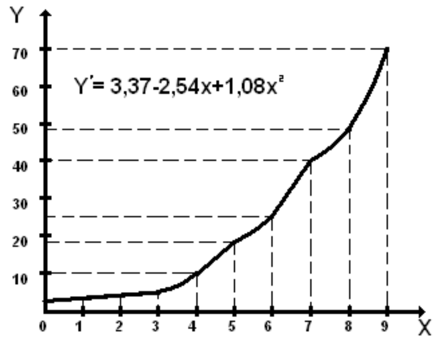

Рис.7.1.Точкова діагностика і апроксимуюча крива.

При нанесенні точок відносно координатних осей, ми не знаємо, чи можна буде провести апроксимуючу криву. Тому, спочатку будуємо точкову діаграму і після (якщо це можливо) наносимо графік по експериментальних даних і лише після всіх розрахунків наносимо апроксимуючу криву.

3. *Короткі довідкові дані. Визначники.*

Нехай, дана квадратна таблиця із дев'яти чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}. \qquad (7.1)$$

Визначником третього порядку, який відповідає таблиці (матриці) (7.1.) називається число, яке позначається символом Δ,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \qquad (7.2)$$

і визначається рівністю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 \quad (7.3)$$

Числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ називаються елементами визначника. Елементи $a_1,\ b_2,\ c_3,$ розташовані на діагоналі визначника, яка називається головною; елементи $a_3,\ b_2,\ c_1$ складають його побічну діагональ.

Розкривають визначник за правилом Саррюса, приписуючи до нього перші два стовпчики і перемножуючи елементи по діагоналях, як показано на рис.(7.4.).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} =$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 \qquad (7.4)$$

Зберемо члени, що утримують який-небудь один елемент визначника і винесемо цей елемент за дужки; величина, що останеться в дужках, називається алгебраїчним доповненням цього елемента.

Алгебраїчне доповнення елемента позначимо великою буквою того ж найменування із тим же номером, що і буква, яким позначений сам елемент.

Наприклад, алгебраїчне доповнення елемента a_1 буде позначатися через A_1, елемента b_1 – через B_1 і т.і.

Таблиця 7.2. Підготовка даних

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	$x_i y_i$	x_i^4	$x_i^2 y_i$	y_i'	$V_i = y_i' - y_i$	V_i^2
1	0	2,4	0	0	0	0	0	3,37	+0,97	0,9409
2	1	3,0	1	1	3	1	3	1,90	-1,10	1,21
3	2	2,0	4	8	4	16	8	2,59	+0,59	0,3481
4	3	6,5	9	27	19,5	81	58,5	5,43	-1,07	1,1449
5	4	10	16	64	40	256	160	10,42	+0,42	0,1764
6	5	19	25	125	95	625	475	17,56	-1,44	2,0736
7	6	36	36	216	150	1296	900	26,84	+1,84	3,3856
8	7	40	49	343	280	2401	1960	38,29	-1,71	2,9241
9	8	48	64	512	384	4096	3072	51,88	+3,88	15,0544
10	9	70	81	729	630	6561	5670	67,62	-2,38	5,6644
$n=10$	$\sum 45$	225,9	285	2025	1605,5	15333	12306,5		$\sum 0$	32,9224

Застосовуючи правило Саррюса, отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 45 & 285 \\ 45 & 285 & 2025 \\ 285 & 2025 & 15333 \end{vmatrix}\begin{matrix} 10 & 45 \\ 45 & 285 \\ 285 & 2025 \end{matrix} =$$

$$= 10 \cdot 285 \cdot 15333 + 45 \cdot 2025 \cdot 285 + 285 \cdot 45 \cdot 2025 -$$

$$-(285)^3 - 10 \cdot (2025)^2 - 15333 \cdot (45)^2 = 435600,$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \end{vmatrix}, \qquad (7.20)$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \end{vmatrix}, \qquad (7.21)$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{vmatrix}, \qquad (7.22)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, і c розраховуються за формулами

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}; b = \frac{\Delta b}{\Delta}; c = \frac{\Delta c}{\Delta} \qquad (7.23)$$

Примітка. В деякій літературі вільні члени нормальних рівнянь представляють у лівій частині нормальних рівнянь. При цьому вільні члени міняють знак на обернений. Тому, даному випадку при розрахунку визначників $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ у відповідних формулах стоїть знак мінус.

Підготовку даних виконаємо в розрахунковій таблиці.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь стовпця (або рядка) на їх алгебраїчне доповнення.

Другими словами, мають місце слідуючі рівності

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3; \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \quad (7.5.)$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3; \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \quad (7.6.)$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3; \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \quad (7.7.)$$

Щоб довести, наприклад, першу із цих рівностей, достатньо записати праву частину формули (7.4.) у вигляді

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \qquad (7.8.)$$

Величини, що стоять в дужках, є алгебраїчними доповненнями елементів a_1, a_2, a_3, тобто b_2c_3-b_3c_2=A_1; b_3c_1-b_1c_3=A_2; b_1c_2-b_2c_1=A_3.

Звідси і із попереднього отримуємо

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \quad (7.9.)$$

що і вимагалось.

Мінором деякого елемента визначника називається визначник, отриманий із даного шляхом закреслення рядка і стовпця, на перетині яких розташований цей елемент. Наприклад, мінором елемента a_1 визначника Δ є визначник

$$M_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (7.10)$$

мінором елемента b_1 є визначник

$$M_{b_1} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (7.11)$$

і т.і.

Виявляється, що алгебраїчне доповнення будь-якого елемента визначника дорівнює мінору цього елемента, взятого зі своїм знаком, якщо сума номерів рядка і стовпця, на перетині яких розташований елемент є число парне, і з оберненим знаком, якщо це число – непарне, тобто

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}, \quad (7.12.)$$

де i номер рядка, k – номер стовпця.

Корисно мати на увазі наступну схему

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

де знаком плюс відмічені місця тих елементів, для яких алгебраїчні доповнення рівні мінорам, взятим з їх власними знаками.

Розглянемо систему трьох рівнянь

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=h_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3 \end{aligned}\right\} \quad (7.13)$$

з невідомими x,y,z (коефіцієнти $a_1, b_1,\ldots,c_3$ і вільні члени h_1, h_2, h_3 відомі).

Рішенням системи (7.13) буде

$$x=\tfrac{\Delta x}{\Delta};\, y=\tfrac{\Delta y}{y};\, z=\tfrac{\Delta z}{\Delta}, \quad (7.14)$$

де визначник системи Δ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (7.15)$$

а визначники системи $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ отримуються із визначника Δ за допомогою заміни відповідно його першого, другого і третього стовпців стовпцями вільних членів даної системи, які стоять з правої правої частини рівняння

$$\Delta x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}. \quad (7.16)$$

4. Складання і рішення нормальних рівнянь

Апроксимацію даних психолого-педагогічного експерименту будемо виконувати за формулою

$$y=a+bx+cx^2 \quad (7.17)$$

Система нормальних рівнянь при цьому має вигляд

$$\left.\begin{aligned} an+b\sum_{i=1}^{n}x_i+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i^3=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^4=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i \end{aligned}\right\}. \quad (7.18)$$

При цьому

$$\Delta=\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_i^4 \end{vmatrix}, \quad (7.19)$$