Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
Імені академіка Степана Дем’янчука

Р.М. Літнарович

О С Н О В И М А Т Е М А Т И К И

Дослідження результатів психологічного експерименту дробово–лінійною функцією

Навчальний посібник для студентів Педагогічного факультету

Частина 8

„Рівне 2006”

Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психологічного експерименту дробово–лінійною функцією. Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету. Частина 8.МЕГУ. Рівне,2006 - 23с.

Р е ц е н з е н т и: В. Г. Бура чек, доктор технічних наук, професор
Е. С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В. О Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Розроблена методика обробки матеріалів за результатами психологічного і педагогічного експерименту. Обробка матеріалів проводиться за способом найменших квадратів. Встановлюється тіснота зв'язку між факторними і результативними ознаками, будується точкова діаграма, підбирається апроксимуюча дробово-лінійна функція, проводиться контроль і оцінка точності.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

Літнарович Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

О С Н О В И М А Т Е М А Т И К И

Дослідження результатів психологічного експерименту дробово–лінійною функцією

Навчальний посібник
для студентів педагогічного факультету

Частина 8

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у редакторі
Microsoft Office 2003 Галка Ганна Миколаївна

Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім.. акад.. С. Дем'янчука

33027, м. Рівне, вул. акад. С. Дем'янчука 4

Місце для нотаток:

З М І С Т

„В лабиринте известных фактов легко потеряться без плана ”

Д.И. Менделеев

П Е Р Е Д М О В А

Ля обробки матеріалів психологічного і педагогічного експериментів необхідно використати математичний апарат, який дав би можливість визначити зв’язок між факторними і результативними ознаками і вивести формулу такого зв’язку.

При цьому доцільно використати спосіб найменших квадратів, як добре розроблений інструментарій оптимізації розрахунків експериментальних даних з оцінкою точності результатів.

Фундаментом математичної результатів експерименту служить в основному математика, теорія ймовірностей і математична статистика.

В навчальні плани вузів необхідно ввести таку дисципліну як математична обробка педагогічного і психологічного експерименту. Основні задачі дисципліни можна сформувати натупним чином:

1. Вивчення законів виникнення і розподілу похибок вимірів і обчислень експериментальних даних.
2. Встановлення критеріїв для виявлення в результатах вимірів систематичних похибок і промахів.
3. Знаходження ймовірніших значень вимірюваних величин із результатів їх багатократних вимірів.
4. Попередній розрахунок сподіваної точності і оцінка точності отриманих результатів вимірів.
5. Характеристики точності кінцевих значень результуючих ознак за результатами математичної обробки вимірів.
6. Встановлення сили і форми зв’язку між факторними і

Місце для нотаток:

11. Очков В.Ф., Хмелюк В.А. От микрокалькулятора к персональному компьютеру /Под ред.А.Б. Бойко.–М.: Изд. МЭИ, 1990,–224с.
12. Рывкин А.А. и др. Справочник по математике. Изд. 3–е. М.: Высшая школа, 1975,–554с.
13.Статистическая обработка результатов экспериментов на микро–ЭВМ и программируемых калькуляторах /А.А. Костылев, П.в. Миляев, Ю.Д. Дорский и др.: Л.: Энергоатомиздат, 1991,–304с.
14. Трофименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах.–К.: Техніка, 1980,–384с.
15. Уманець Т.В., Пігарев Ю.Б. Статистика: навчальний посібник.К.: Вікар, 2003,–625с.
16. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. К.: Наукова думка, 1972,–744с.
17. Франтішек Латка. Математичний міні лексикон. Львів: Світ,1900,–107с.
18. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. математическое формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник.–М.: Наука, 1985,–128с.

результативними ознаками.

Матеріал підготовлений за курсом лекцій, прочитаних автором студентам педагогічного факультету Міжнародного економік-гуманітарного університету ім. Академіка С. Дем’янчука у 2006р.

Автор виражає щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Й.В. Джуню, який позитивно оцінив науковий напрямок і дав можливість прочитати курс лекцій і підготувати матеріал до видання.

Дослідження результатів психологічного експерименту дробово–лінійною функцією

1. Представлення операційних змінних

Уявлення про типи психологічних законів описує відома формула К.Левіна: поведінка є функцією особистості і ситуації

$$B = f(p, s), \qquad (8.1)$$

де B –поведінка (behaviour);

p –особливість (personality);

s –ситуація (situation).

У психології визначають два типи законів:

1. „Стимул - реакція" (незалежна змінна – залежна змінна).
2. „Організм - поведінка" (цей тип законів спостерігається при застосуванні таких методів емпіричного дослідження, як спостереження, вимірювання, квазіексперимент).

У класичному психологічному експерименті встановлюється функціональна залежність типу

$$R = f(S), \qquad (8.2)$$

де R –відповідь (response).Змінна S математично змінюється (варіюється), а змінні у відповідях (реакціях) досліджуваних фіксуються.

Інший тип залежності символів застосовується як залежність поведінки від особистісних властивостей або стану організму досліджуваного:

$$R = f(P), \text{ або } R = f(O), \qquad (8.3)$$

де O–організм (organism).

Автори підручників з експериментальної психології

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Бронштейн І.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ – М.: Наука,1980,–975с.
2. Вища математика: Підручник / за ред. Шинкарика М.І.– Тернопіль: видавництво Карп'юка, 2003, –480с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. –К.: А.С.К., 2001,– 648 с.
4. Козира В.М. Елементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників для ВНЗ, студентів. – Тернопіль: СМП „АСТОН", 2004,–100с.
5. Корн Г., Корон Т. Справочник по математике.: М. :Наука, 1973,–831с.
6. Літнарович Р.М. Елементи науково-дослідницької роботи студентів під час вивчення теми „Математична обробка та оцінювання точності геодезичних вимірів" На нові технології навчання. Науково-методичний збірник. Випуск 14.-К.:ІСДО, 1995, с.123-126.
7. Лябах Б.В., Літнарович Р.М. Научно–исследовательская робота студентов как фактор интенсификации познавательной деятельности. Основные пути повышения качества подготовки специалистов для народного хозяйства. Брянск, БСХИ, 1984,–с.99–100.
8. Літнарович Р.М., Кравцов М.І. До питання оцінки точності визначення координат пункту із GPS спостережень. Інженерна геодезія. Науково–технічний збірник. Вип. 50–К.: КНУБА, 2004,–с.125–134.
9. Максименко С.Д., Носенко Є.Л. Експериментальна психологія.–К.: МАУП, 2004,–128с.
10. Опря А.Т. Статистика,–К.: Центр навчальної літератури, 2005,–472с.

Висновки

1. За результатами проведених психологічних досліджень встановлено, що коефіцієнт кореляції між факторними і результативними ознаками дорівнює 0.999 , що говорить про надто високий зв'язок .
2. Побудований тренд функціонального зв'язку. Виведена формула має вигляд :

$$Y' = \frac{1}{0.48x + 2.9}.$$

3. Виконана оцінка точності побудованого тренду і встановлено, що виведена нами формула має середню квадратичну похибку $m = 0.002$ по відхиленнях розрахункових даних від експериментальних.
4. Встановлено, що для проведення досліджень при апроксимації результатів психологічних досліджень функцією $y = \frac{1}{ax + b}$ нам повністю підходить програма для програмованого мікрокалькулятора „"Електроніка МК–52 з блоком розширення пам'яті БРП–3.
5. Дані експерименту кращим чином апроксимуються виведеною формулою.

виокремлюють шість видів зв'язку між змінними.

1. Відсутність залежності між змінними.

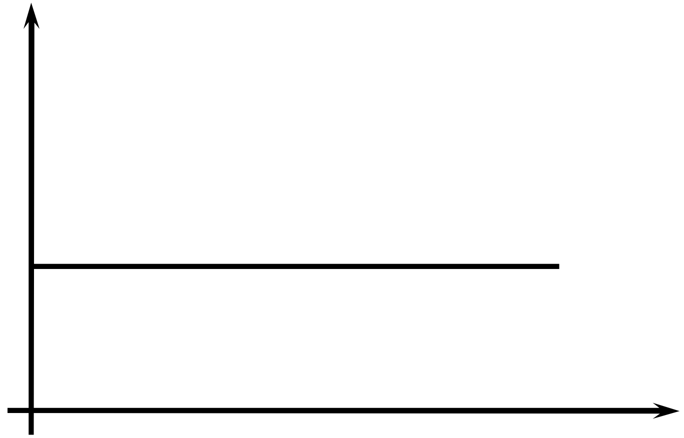

Рис.8.1. Графік відсутності залежності між змінними де
y – залежна змінна (наприклад, стать людини);
x –незалежна змінна (наприклад, рівень інтелекту).

2. Монотонне зростання залежності.

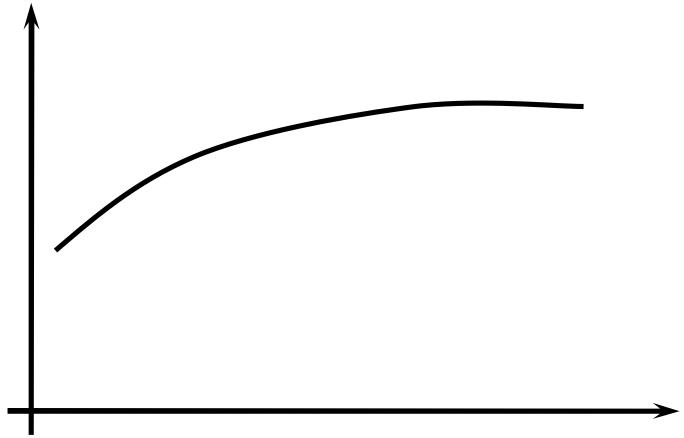

Рис.8.2. Монотонне зростання де
y – залежна змінна (наприклад, рівень відчуття);
x –незалежна змінна (наприклад, інтенсивність звуку).

3. Монотонне зниження залежності.

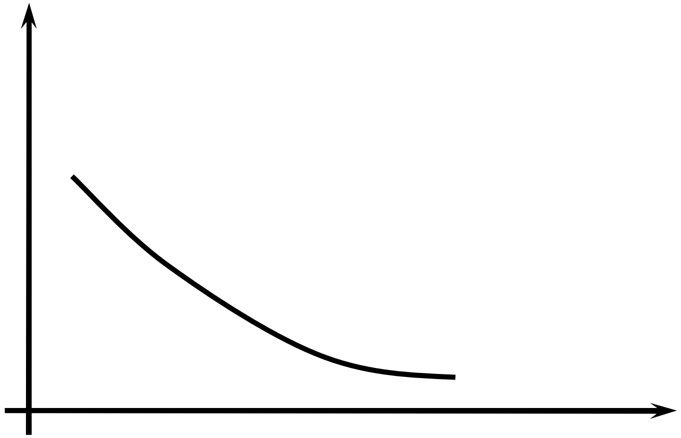

Рис.8.3. Монотонне зниження не
y – залежна змінна (наприклад, кількість повторених слів);
x –незалежна змінна (наприклад час, що минув з моменту заучування).

4. Нелінійна залежність параболічного типу.

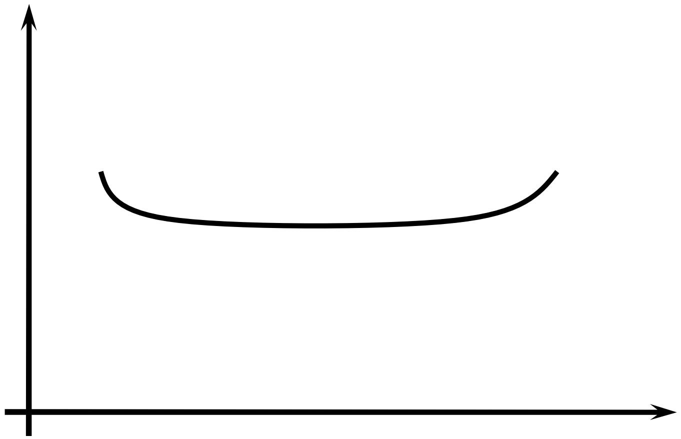

Рис.8.4. Нелінійна залежність параболічного типу де
y – залежна змінна (наприклад, кількість помилок при розв'язувані інтелектуальних задач);
x –незалежна змінна (наприклад, рівень тривожності).

Спостерігається у більшості експериментів, де досліджуються особливості психічної регуляції поведінки.

Таким чином, ми отримали формулу

$$y' = \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{0.4774x + 2.9071}. \qquad (8.19)$$

Для практичної реалізації формула прийме вигляд

$$y' = \frac{1}{0.48x + 2.91}. \qquad (8.20)$$

По дані формулі були проведені контрольні розрахунки, які приведені у стовпчику Y' таблиці 8.2.

Середня квадратична похибка відхилень значень апроксимуючої функції від дискретних значень експерименту складає

$$m_{y'} = \sqrt{\frac{\sum VV}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.000032}{9}} = 0.002.$$

Від системи кореляційних зв'язків перейдемо до зображення „відстані" d між ознаками на площині

$$d = \frac{1-r}{2} = \frac{1-0.9994}{2} = 0.0003.$$

Відстані відображають подібність або відмінність ознак. У цьому разі дослідник переходить від топологічного опису даних емпіричного дослідження до метричного, оскільки відстань між вершинами (властивостями) графіка зображується пропорційно значущості кореляції з урахуванням її знака: при $r = -1$ відстань максимальна $(d = 1)$, при $r = 1$ відстань мінімальна $(d = 0)$.

Орієнтовним графом є соціограма. Для зручності сприйняття не рекомендується використовувати графіки збільш ніж 10 – 11 вершинами.

Таблиця 8.2. Підготовка даних(продовження)

	$\left(\frac{1}{Y_i}\right)^2$	$Y'=\frac{1}{0.48x+2.9}$	$V=y'-y$	V^2
	11.2607	0.295	-0.003	0.000009
	13.3196	0.275	+0.001	0.000001
	17.5067	0.236	-0.003	0.000009
	20.4747	0.222	+0.001	0.000001
	22.8934	0.207	-0.002	0.000004
	28.5968	0.188	+0.001	0.000001
	30.5245	0.179	-0.002	0.000004
	40.0575	0.159	+0.001	000.0001
	51.0196	0.138	-0.002	0.000002
	59.1715	0.130	0	0
	294.8250			0.000032

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{Y_i}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}=297.5971-\frac{1}{10}49.15\cdot 52.5357=39.3841,$$

$$B=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=324.0625-\frac{1}{10}(49.15)^2=82.49025,$$

$$C=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{Y_i}\right)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}\right)^2=294.825-\frac{1}{10}(52.5357)^2=18.8250.$$

$$r^2=\frac{A^2}{B\cdot C}=\frac{(39.3841)^2}{82.49025\cdot 18.8250}=\frac{1551.1073}{1552.8790}=0.998859,$$

$$r=\sqrt{r^2}=\sqrt{0.998859}=0.9994.$$

Таким чином, ми виявили надто високий зв'язок між факторними і результативними ознаками, що відкриває нам можливість до розрахунку коефіцієнтів a і b:

$$a=\frac{A}{B}=\frac{39.3841}{82.49025}=0.4774,$$

$$b=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}-a\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{10}(52.5357-0.4774\cdot 49.15)=2.9071.$$

5. Інвертована залежність параболічного типу.

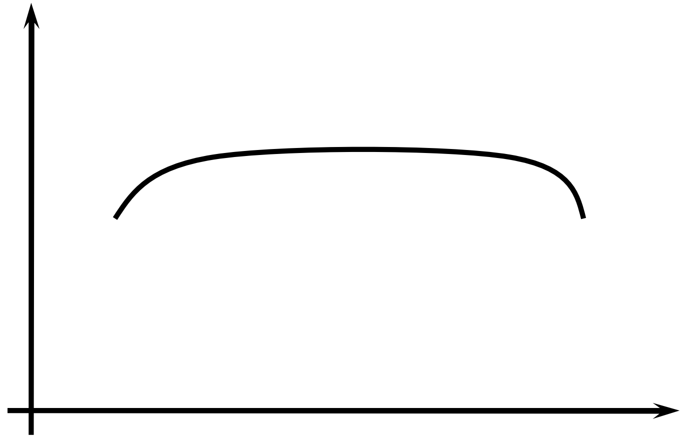

Рис.8.5. Інвертована залежність параболічного типу
y – залежна змінна (наприклад, ефективність спільного вирішення проблем);
x –незалежна змінна (наприклад, розмір групи).

Можна спостерігати в численних експериментах і кореляційних дослідженнях як у психології особистості, мотивації, так і в соціальній психології.

6. Квазіперіодична залежність.

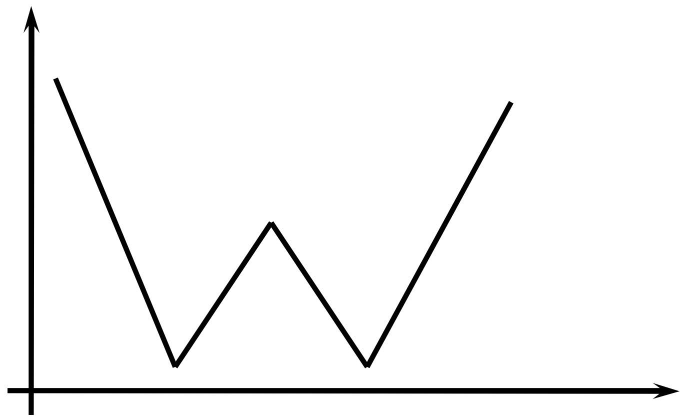

Рис.8.6. Квазіперіодична залежність
y – залежна змінна (наприклад, гострота зору);
x –незалежна змінна (наприклад, кількість випробувань у випробуваннях на анаграми).

Цей складний тип залежності рівня залежної змінної від рівня залежності зустрічається рідко.
Приведемо результати нашого експерименту :

Таблиця 8.1. Операційні данні

Y	0.298	0.274	0.239	0.221	0.209	0.187	0.181	0.158	0.140	0.130
X	1.0	1.5	2.75	3.3	4.0	5.0	5.6	7.0	9.0	10

Для того, описати математично результати, приведені в таблиці 8.1., необхідно побудувати точкову діаграму і графік (по можливості) за цими дискретними даними.

Після, на основі шаблонів графіків різних функцій підібрати саме ту функцію, яка списує даний графік.

В подальшому залишиться лише вирахувати методом найменших квадратів, тобто щоб сума квадратів відхилень розрахункових результативних ознак мінімально відхилялась від експериментальних даних, коефіцієнти a і b, попередньо встановивши тісноту взаємозв’язку між факторними і результативними ознаками.

2. Побудова точкової діаграми

За даними експериментальних досліджень, приведених у таблиці 8.1., будуємо графік з метою виявлення закону для підбору апроксимуючої функції:

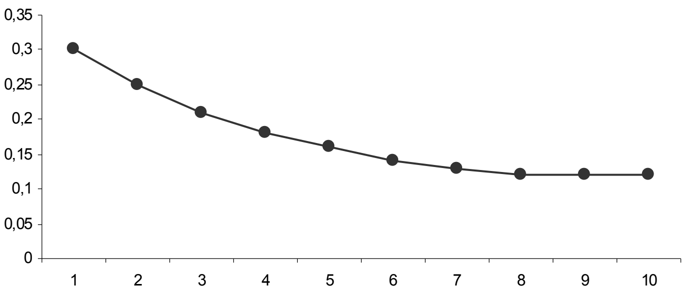

Рис.8.7.Точкова діаграма і апроксимуюча крива

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}; \qquad (8.16)$$

або з урахуванням (8.11) і (8.12)

$$a = \frac{A}{B}, \qquad (8.17)$$

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i} - a \sum_{i=1}^{n} X_i \right), \qquad (8.18)$$

де коефіцієнт a підставляється у формулу (8.18) із результатів розрахунків за формулою (8.17).

6. Практична реалізація

Підстановку даних виконуємо в розрахункові таблиці.

Таблиця 8.2. Підготовка даних(початок)

i	X_i	Y_i	$\frac{X_i}{Y_i}$	$\frac{1}{Y_i}$	X_i^2
1	1	0.298	3.3557	3.3557	1
2	1	0.274	5.4744	3.6496	2.25
3	2	0.239	11.5063	4.1841	7.5625
4	3	0.221	14.9321	4.5249	10.89
5	4	0.209	19.1388	4.7847	16
6	5	0.187	26.7380	5.3476	25
7	5	0.181	30.9392	5.5249	31.36
8	7	0.158	44.3038	6.3291	49
9	9	0.140	64.2857	7.1428	81
10	10	0.130	76.9231	7.6923	100
N=10	49.15	2.037	297.5971	52.5357	324.0625

$$r^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{Y_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{Y_i}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}\right)^2\right]}. \qquad (8.10)$$

$$Y_i \neq 0.$$

Введемо позначення

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{Y_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i} = A, \qquad (8.11)$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 = B, \qquad (8.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{Y_i}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}\right)^2 = C. \qquad (8.13)$$

З врахуванням прийнятих позначень формула (8.10) буде

$$r^2 = \frac{A^2}{B \cdot C}. \qquad (8.14)$$

Формули (8.11), (8.12), (8.13) і (8.14) будуть робочими формулами для обчислення коефіцієнта кореляції з метою побудови апроксимуючої дробово-лінійної функції.

5. встановлення коефіцієнтів і вивід формули апроксимуючої функції

Поставимо за мету встановити коефіцієнти a і b для формули

$$y = \frac{1}{ax + b}. \qquad (8.15)$$

по способу найменших квадратів, тобто, щоб сума квадратів відхилень розрахункових параметрів від експериментальних була мінімальною, отримують наступні робочі формули

Спочатку будується точкова діаграма і, якщо це можливо, проводиться графік. Лише після всіх розрахунків наноситься апроксимуюча крива.

3. Короткі відомості про дробні і ірраціональні рівняння

1. Дробні рівняння

Дробне алгебраїчне рівняння за допомогою тотожніх перетворень можна привести до вигляду :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \qquad (8.4)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ –многочлени.

Рівняння $P(x) = 0$ є наслідком рівняння (8.4). Найшовши корені $P(x)$, беремо ті з них, які задовольняють рівняння (8.4).

2. Ірраціональні рівняння

Ірраціональним називається рівняння, в якому алгебраїчний вираз, в який входить невідоме, знаходиться під знаком кореня. Рішаючи ірраціональне рівняння, його перетворюють в ціле алгебраїчне рівняння, яке буде наслідком даного.

Перевірка рішення отриманого цілого рівняння обов’язкова.

Приклад 1. Розв’язати рівняння.

$$\sqrt{x+2} = 2 - x.$$

Залишаємо в ліві стороні лише радикал, перенісши решту членів рівняння в праву частину.

$$\sqrt{x+2} = 2 - x.$$

Підносимо обидві частини рівняння до квадрату:

$$x + 2 = 4 - 4x + x^2,$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Останнє рівняння задовольняють два значення невідомого

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} = 4.56; \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} = 0.44\,.$$

Тому, що квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0 \tag{8.5}$$

має дискримінант

$$D = b^2 - 4ac \tag{8.6}$$

і якщо $D > 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \tag{8.7}$$

Якщо $D = 0$,то рівняння має один корінь.

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{8.8}$$

Якщо $D < 0$,то рівняння немає дійсних коренів.

Формула Вієта

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \tag{8.9}$$

де x_1, x_2 –корені квадратного рівняння (8.5)

У нашому випадку $D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17$

Перевірка.

Підставимо значення $x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ у вихідне рівняння

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2} + 2} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} = 2,$$

$$\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} > 2,$$

тому x_1 не буде коренем вихідного рівняння.

Користуючись формулою складного радикала, знайдемо, що

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2} + 2} + \frac{5-\sqrt{17}}{2} = \sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}} + \frac{5-\sqrt{17}}{2} = \sqrt{2.44} + 0.44 = 1.56 + 0.44 = 2.$$

Приклад 2. Рішити рівняння.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+10} = 0$$

Можна зробити його тик як і в прикладі 1, але тут легко безпосередньо замітити, що рівняння немає коренів, тому що

$\sqrt{x+2} \geq 0$ і $\sqrt{x+10} \geq 0$

(ми розглядаємо тільки аргументи арифметичні корені). Рівність нулю в цих нерівностях не може бути досягнута одночасно.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+10} = 4.$

Переносимо один радикал в праву частину рівності і підводимо обидві частини рівняння до квадрату:

$\sqrt{x+2} = 4 - \sqrt{x+10},$

$x + 2 = 16 - 8\sqrt{x+10} + x + 10,$

$\sqrt{x+10} = \frac{24}{8} = 3.$

Останнє рівняння знову підносимо до квадрату і знаходимо $x = -1$

Перевірка підтверджує, що єдине значення $x = -1$ є коеннм:

$\sqrt{-1+2} + \sqrt{-1+10} = 1 + 3 = 4.$

4. Теоретичні положення визначення тісноти зв'язку факторних і результативних ознак

Для того, вивести формулу апроксимуючої кривої, необхідно встановити тісноту взаємозв'язку між факторними і результативними ознаками. Лише в цьому випадку можна говорити про можливість виводу формул апроксимуючої кривої.

Отже, коефіцієнт кореляції в нашому випадку розраховується за формулою: