

Літнарівч Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

Основи математики
Дослідження результатів психологічного
експерименту
інвертованою залежністю гіпербологічного типу

Навчальний посібник
для студентів педагогічного факультету

Частина 9

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у
редакторі Microsoft Office 2003
Янчук Вікторія Олексіївна
Міжнародний Економіко-Гуманітарний Університет
ім. акад. Степана Дем'янчука

33027, м. Рівне, вул. акад. С.Дем'янчука, 4

Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука

Р.М.Літнарівч

Основи математики
Дослідження результатів психологічного
експерименту інвертованою залежністю
гіперболічного типу

Навчальний посібник
для студентів педагогічного факультету
Частина 9

Рівне 2006

12. Рывкин А.А. и др. Справочник по математике. Изд. 3-е. М.: Высшая школа, 1975, - 554 с.

13. Статистическая обработка результатов экспериментов на микро-ЭВМ и программируемых калькуляторах/ А.А.Костылев, П.В.Миляев, Ю.Д.Дорский и др.: Л.: Энергоатомиздат, 1991, - 304 с.

14. Трофименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах. – К.: Техника, 1980, - 334 с.

15. Уманець Т.В., Пігаров Ю.Б. Статистика : Навч. посібник. К.: Вікар, 2003, - 623 с.

16. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. К.: Наукова думка, 1972, - 744 с.

16. Франтішек Латка. Математичний міні- лексикон. Львів: Світ, 1990, - 107 с.

18. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник. – М.: Наука, 1985, - 128 с.

Літнарівч Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психологічного експерименту інвертованою залежністю гіперболічного типу. Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету, частина 9. МЕНУ, Рівне, 2006, - 22 с.

Рецензенти: В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Е.С.Парняков, доктор технічних наук, професор

В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск:

Й.В.Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Розроблена методика обробки матеріалів за результатами психологічного і педагогічного експерименту. Обробка матеріалів проводиться за способом найменших квадратів. Встановлюється тіснота зв'язку між факторними і результативними ознаками, будується точкова діаграма, підбирається апроксимуюча функція, проводиться контроль і оцінка точності.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

© Р.М.Літнарівч

Зміст

Передмова.....	4
1. Представлення операційних змінних.....	6
2. Побудова точкової діаграми.....	9
3. Короткі довідникові дані про двочленні рівняння і комплексні числа.....	10
4. Теоретичні положення визначення тисноти зв'язку факторних і результативних знак.....	13
5. Встановлення коефіцієнтів і вивід формули апроксимуючої функції	15
6. Практична реалізація.....	17
Висновки.....	21
Література.....	23

7. Лябах Б.В., Литнарович Р.Н. Научно-исследовательская работа студентов как фактор интенсификации познавательной деятельности. Основные пути повышения качества подготовки специалистов для народного хозяйства. Брянск. БСХИ, 1984, - с. 99-100.

8. Литнарович Р.М., Кравцов М.І. До питання оцінки точності визначення координат пункту із GPS спостережень. Інженерна геодезія. Науково-технічний збірник. Вип. 50. – К.: КНУБА, 2004, - с. 125-134.

9. Максименко С.Д., Носенко Є.Л. Експериментальна психологія. – К.: МАУП, 2004, - 128 с.

10. Опря А.Т. Статистика. – К.: Центр навчальної літератури, 2005, - 472с.

11. Очков В.Ф., Хмелюк В.А. От микрокалькулятора к персональному компьютеру/ Под ред. А.Б.Бойко. – М.: Изд. МЭЙ, 1990, 224 с.

Література

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1980, – 976 с.
2. Вища математика: Підручник/ За ред. Шинкарика М.І. – Тернопіль: видавництво Карп'юка, 2003, – 480 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2001,- 648 с.
4. Козира В.М. Елементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників до вузів, студентів. – Тернопіль: СМП „АСТОН”, 2004, – 100 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973, - 831 с.
6. Літнарівич Р.М. Елементи науково-дослідної роботи студентів під час вивчення теми „Математична обробка та оцінювання точності геодезичних вимірів”. Нові технології навчання. Науково-методичний збірник. Випуск 14. – К.: ІСДО, 1985, с. 123-126.

«В каждом эксперименте, в котором есть какой-либо план, всё делается для того, чтобы установить какую-нибудь гипотезу».

Дж. Пристли

Передмова

Для обробки матеріалів психологічного і педагогічного експериментів необхідно використати математичний апарат, який дав би можливість визначити зв'язок між факторними і результативними ознаками і вивести формулу такого зв'язку.

При цьому доцільно використати спосіб найменших квадратів, як добре розроблений інструментарій оптимізації розрахунків експериментальних даних з оцінкою точності результатів.

Фундаментом математичної обробки результатів експерименту служить в основному математика, теорія ймовірностей і математична статистика.

В навчальний план ВНЗ необхідно ввести таку дисципліну як математична обробка педагогічного і психологічного експерименту. Основні задачі дисципліни можна сформулювати слідуючим чином:

1) вивчення законів виникнення і розподілу похибок вимірів і обчислень експериментальних даних;

2) встановлення критеріїв для виявлення в результатах вимірів систематичних похибок і промахів;

3) знаходження ймовірних значень вимірних величин із результатів їх багатократних вимірів;

4) попередній розрахунок сподіваної точності і оцінка точності отриманих результатів вимірів;

5) характеристики точності кінцевих значень результуючих ознак за результатами математичної обробки вимірів;

6) встановлення сили і форми зв'язку між факторними і результативними ознаками.

Матеріал підготовлений за курсом лекцій, прочитаних автором студентам педагогічного факультету Міжнародного Економіко-Гуманітарного Університету ім. академіка Степана Дем'янчука у 2006 році.

Автор виражає щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Йосипу Володимировичу Джуню, який позитивно оцінив науковий напрямок і дав можливість прочитати курс лекцій і підготувати матеріал до видання.

переходить від топологічного опису даних емпіричного дослідження до метричного,

Оскільки відстань між вершинами (властивостями) графа зображується пропорційно значущої кореляції з урахуванням її знака: при $r = -1$ відстань максимальна ($d = 1$), при $r = 1$ відстань мінімальна ($d = 0$).

Висновки

1. За результатами проведених досліджень встановлено, що коефіцієнт кореляції між факторними і результативними ознаками дорівнює 0.999998, що говорить про надто високий зв'язок.

2. Побудований тренд функціонального зв'язку. Виведена формула має вид

$$y' = \frac{x}{2.2x + 5.97}$$

3. Виконана оцінка точності побудованого тренду і встановлено, що виведена нами формула має середню квадратичну похибку $m = 0,00047$ по відхиленням розрахункових даних від експериментальних.

4. Встановлено, що для проведення досліджень при апроксимації результатів психологічних досліджень функцією $y' = x/(ax + b)$ нам повністю підходить програма для програмованого мікрокалькулятора Електроніка МК-52 з блоком розширення пам'яті БРП-3.

5. Дані експерименту кращим чином апроксимуються виведеною формулою.

$$a = \frac{A}{B} = \frac{14764.3124}{6710.025} = 2.200336,$$

$$b = \frac{1}{10} (932.1106 - 2.20034 \cdot 396.5) = 5.9675.$$

Таким чином, ми отримали формулу

$$y' = \frac{x}{ax+b} = \frac{x}{2.2003x+5.9675} \quad (9.22)$$

Для практичної реалізації формула (9.22) прийме вигляд

$$y' = \frac{x}{2.2x+5.97} \quad (9.23)$$

За формулою (9.23) були прораховані дискретні значення факторних ознак і результати приведені у табл. 9.2. у стовпчику y' .

Середня квадратична похибка $m_{y'}$ апроксимованої функції

$$m_{y'} = \sqrt{\frac{\sum v v}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.000002}{9}} = 0.00047.$$

Від системи кореляційних зв'язків перейдемо до зображення „відстані” d між ознаками на площині

$$d = \frac{1-r}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Відстані відображають подібність або відмінність ознак. У цьому разі дослідник

Дослідження результатів психологічного експерименту інвертованою залежністю гіперболічного типу.

1. Представлення операційних змінних

Експериментальними змінними можуть бути:

- 1) залежні;
- 2) незалежні;
- 3) зовнішні:

а) побічна:

- фактор часу;
- фактор завдання;
- індивідуальні особливості досліджуваних;

б) додаткова (істотно важлива, наприклад, вік досліджуваної особи при вивченні пам'яті або словниковий запас при вивченні інтелекту).

Ідеографічний опис поняття „незалежна змінна”.

Гіперонім* - експериментальна змінна.

Варіанти (види) незалежних змінних:

3. Характеристики завдання.

4. Особливості ситуації (зовнішні умови):

- фізичні параметри (зовнішній вигляд приміщення, звуки, шуми, освітлення, час здійснення експерименту тощо);

* Гіперонім – ширше поняття.

соціально-психологічні параметри:

- ізолюваність – робота у присутності експериментатора; робота наодинці – робота в групі;
- особливості спілкування і взаємодії досліджуваного з експериментатором.

2. Фактори організму: фізичні, біологічні, психологічні, соціальні та ін.

Ідеографічний опис поняття “залежна змінна”

Гіперонім – експериментальна змінна.

1. Параметри невербальної поведінки:

а) формально-динамічні:

- точність (кількість помилок);
- латентність (скритість);

б) тривалість діяльності;

в) темп або частота;

г) продуктивність (співвідношення кількості помилок і тривалості виконання дії).

2. Параметри вербальної поведінки:

а) міміка;

б) кінесика;

в) проксеміка;

г) змістовні характеристики висловлювання (емоції та забарвленість тощо).

3. Фізіологічні параметри – ШГР, ЕЕГ та ін.

Атрибути залежної змінної: валідність (відповідність гіпотезі); надійність (відносна незмінність при повторних випробуваннях).

Приведемо обчислення за формулами теоретичних викладок

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} = 51722.4977 - \frac{1}{10} \cdot 396.5 \cdot$$

$$\cdot 932.1106 = 14764.3124$$

$$B = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 22431.25 - 10 (396.5)^2 = 6710.025,$$

$$C = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{y_i} \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \right)^2 = 119369.5469 - \frac{1}{10} \cdot (932.1106)^2 =$$

$$= 32486.52984,$$

$$r^2 = \frac{A^2}{BC} = \frac{(14764.3124)^2}{6710.025 \cdot 32486.52984} = \frac{217984920.6}{217985427.4} =$$

$$= 0.999997675$$

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0.999997675} = 0.999998838 \approx 1.$$

Таким чином, ми виявили надто високий зв'язок між факторними і результативними ознаками, що відкриває нам дорогу до розрахунку коефіцієнтів a і b.

або, з врахуванням (9.12), (9.13)

$$a = \frac{A}{B}, \quad (9.20)$$

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} - a \sum_{i=1}^n x_i \right), \quad (9.21)$$

де коефіцієнт а підставляється у формулу (9.21) із результатів розрахунків за формулою (9.20).

6. Практична реалізація

Підготовку даних виконаємо в розрахунковій таблиці.

i	X_i	y_i	x_i^2 / y_i	x_i / y_i	x_i^2	$(x_i / y_i)^2$		$V=y'-y$	V^2
1	5	0.294	85.0340	17.0068	25	289.2313	0.294	0	0
2	10	0.357	280.1120	28.0112	100	784.6276	0.358	+0.001	10
3	15	0.385	584.4156	38.9610	225	1517.9626	0.385	0	0
4	27.5	0.414	1826.6908	66.4251	756.25	4412.2967	0.414	0	0
5	33	0.420	2592.8571	78.5714	1089	6173.4694	0.420	0	0
6	40	0.426	3755.8685	93.8967	1600	8816.5928	0.426	0	0
7	50	0.431	5800.4640	116.0093	2500	13458.1532	0.431	0	0
8	56	0.433	7242.4942	129.3302	3136	16726.3146	0.434	+0.001	10
9	70	0.438	11187.2146	159.8173	4900	25541.5859	0.438	0	0
10	90	0.441	18367.3469	204.0816	8100	41649.3128	0.441	0	0
n=10	396.5	4.039	51722.4977	932.1106	22431.25	119369.5469			2·10

Таблиця 9.2. Розрахункова таблиця.

Типи залежних змінних:

1. Одновимірні (реєструється один параметр).
2. Багатовимірні (реєструється кілька характеристик змінної: тривалість, якість і т. ін.).
3. Фундаментальні (наприклад, фундаментальне вимірювання емоційного стресу (рівня агресії) здійснюється з урахуванням специфіки міміки, пантоміміки, інших проявів агресивної поведінки: лайки, бійки тощо).

Форми (способи) фіксації. Залежна змінна реєструється:

- під час експерименту слідом за змінами незалежної змінної (наприклад у вигляді „кривої навчання” або показників шкірно-гальванічної реакції при вивченні емоційних станів);
- після експерименту („відстрочена” фіксація, наприклад, аналіз характеристик мовлення, які були зареєстровані під час експерименту).

Приведемо результати нашого експерименту.

Таблиця 9.1. Операційні дані.

	5	10	15	27.5	33	40	50	56	70	90
x										
y	0.294	0.357	0.385	0.414	0.420	0.426	0.431	0.433	0.438	0.441

Для того, щоб описати математично результати, приведені в табл. 9.1., необхідно побудувати точкову діаграму і графік (по можливості) за цими дискретними даними.

Після, на основі шаблонів графіків різних функцій підібрати саме ту функцію, яка описує даний графік.

В подальшому залишиться лише вирахувати методом найменших квадратів, тобто щоб сума квадратів відхилень розрахункових результативних ознак мінімально відхилялась від експериментальних даних, коефіцієнтів a і b , попередньо встановивши тісноту взаємозв'язку між факторними і результативними ознаками.

2. Побудова точкової діаграми.

За даними експериментальних досліджень, приведених у табл. 9.1., будуємо графік з метою виявлення закону для підбору апроксимуючої функції.

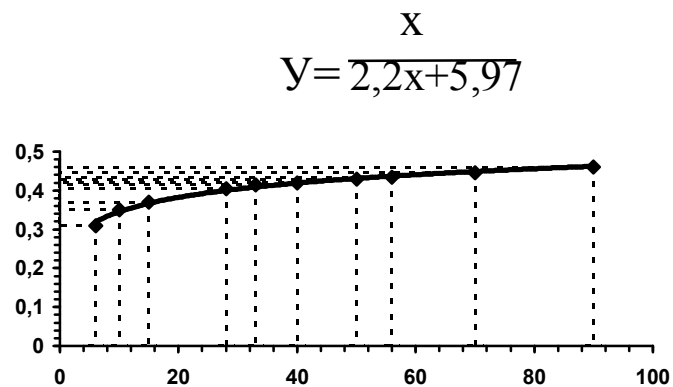


Рис. 9.1. Точкова діаграма і апроксимуюча крива.

висновку, що даний графік кращим чином можна апроксимувати інвертованою залежністю гіпербологічного типу виду

$$y = \frac{x}{ax+b}, \quad (9.16)$$

де a і b – невідомі коефіцієнти, які необхідно знайти по способу найменших квадратів, тобто, щоб сума квадратів відхилень розрахункових параметрів від експериментальних була мінімальною

$$\sum V_i^2 = \min, \quad (9.17)$$

де

$$V_i = y'_i - y_i, \quad (9.18)$$

а y' – функція отримана за результатами математичної обробки по способу найменших квадратів.

Приведемо без виводу робочі формули

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (9.19)$$

Введемо позначення

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} = A, \quad (9.12)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = B, \quad (9.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{y_i} \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \right)^2 = C, \quad (9.14)$$

З врахуванням прийнятих позначень, формула (9.11) буде

$$r^2 = \frac{A^2}{BC} \quad (9.15)$$

Формули (9.12), (9.13), (9.14) і (9.15) будуть робочими формулами для обчислення коефіцієнта кореляції з метою виводу апроксимуючої функції і побудови математичної моделі за результатами психологічного експерименту.

1. Встановлення коефіцієнтів і вивід формули апроксимуючої функції

Вивчивши точкову діаграму, приходимо до висновку, що від точкової діаграми можна перейти до графіка функції експериментальної кривої.

Детально ознайомившись з особливостями графіка, приведенного на рис. 9.1 приходимо до

Спочатку будується точкова діаграма і, якщо це можливо, проводиться графік. Лише після всіх розрахунків наноситься апроксимуюча крива.

3. Короткі довідникові дані про двочленні рівняння і комплексні числа.

Двочленне рівняння.

Загальний вигляд

$$ax^n + b = 0, \quad a \neq 0. \quad (9.1)$$

Поділивши на a і позначивши $\left| \frac{b}{a} \right| = A,$

отримаємо одне із рівнянь

$$x^n + A = 0, \quad (9.2)$$

$$x^n - A = 0, \quad (9.3)$$

при $A > 0.$

Для рішення двочленного рівняння достатньо знайти всі корені рівняння $y^n = 1$, або $y^n = -1$, відповідно, і помножити кожний із них на

$${}^n\sqrt{A}.$$

Таким чином, задача зводиться до рішення рівняння

$$y^n - 1 = 0, \quad (9.4)$$

або

$$y^n + 1 = 0, \quad (9.5)$$

В області дійсних чисел:

1. При парних n рівняння (9.4) має два дійсних корені: $y = 1$, $y = -1$, а рівняння (9.5) ні одного.

2. При непарних n рівняння (9.4) і (9.5) мають по одному дійсному кореню $y=1$, $y=-1$ відповідно.

В області комплексних чисел кожне із рівнянь (9.4) і (9.5) має n різних коренів, які можна знайти за формулою Муавра.

Дії множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня значно простіше виконувати комплексними числами.

Подальшим і, в деякій мірі, заключним етапом розширення поняття про число являється введення комплексних чисел. Необхідність такого розширення поняття про число виникає хоча б тому, що дія добування кореня не дійсного числа не завжди можлива в області дійсних чисел.

Комплексними називаються числа, виду
 $a + bi$,

(де a і b дійсні числа) якщо вони мають слідуючі три властивості:

2. Рівність

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \quad (9.6)$$

двох комплексних чисел можлива тоді і тільки тоді, коли $a_1=a_2$ і $b_1=b_2$.

3. Додавання двох комплексних чисел виконується за правилом

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i, \quad (9.7)$$

4. Множення комплексних чисел виконується за правилом

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i, \quad (9.8)$$

тобто по звичайному правилу множення многочленів з обов'язковою заміною i^2 числом -1 .

$$i^2 = -1. \quad (9.9)$$

Таким чином, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ..., $i^n = 1$, $i^{n+1} = i$, $i^{n+2} = -1$, $i^{n+3} = -i$.

Піднесення до степені (цілої, додатньої) виконують за формулою Муавра:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad (9.10)$$

тобто, модуль підносять до тієї ж степені, а аргумент множать на показник степені.

5. Теоретичні положення визначення тісноти зв'язку факторних і результативних ознак

Для того, щоб побудувати математичну модель, необхідно встановити тісноту взаємозв'язку між факторними і результативними ознаками. Лише в цьому випадку можна говорити про можливість виводу формул апроксимуючої функції.

Ітак, коефіцієнт кореляції в нашому випадку розраховується за формулою

$$r^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \right]}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[\sum_{\substack{i=1 \\ y_i \neq 0}}^n \left(\frac{x_i}{y_i} \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \right)^2 \right]} \quad (9.11)$$

