УДК 620.178(088.8)

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

И.Д. Пузько
Сумский государственный университет, г. Сумы

В работе рассмотрена математическая модель в виде дифференциального уравнения третьего порядка. Проведено преобразование уравнений первого приближения и получены аналитические соотношения для определения параметров модели. Сформирована регрессионная зависимость и получены оценки параметров модели. Для определения параметров и оценки параметров формируются режимы свободных колебаний, регистрируются временные интервалы и число циклов затухающих колебаний в этих интервалах при изменении амплитуды колебаний в определенных пределах.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании новой техники в отраслях компрессорного и энергетического машиностроения необходимо проводить разработку математических моделей в виде дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных и другого типа уравнений с конечным числом степеней свободы и сосредоточенными параметрами или в виде систем уравнений с распределенными параметрами (уравнений в частных производных) [1, 2, 3].

Проведение исследований конкретных типов конструкций, машин, агрегатов, отдельных узлов или элементов возможно только при условии замены механических систем математическими моделями, в которых находят отражение основные характеристики и параметры механических систем.

Наиболее простыми моделями реальных механических систем являются линейные модели. Однако для значительной части механических систем линейная трактовка приводит к значительным погрешностям не только количественного, но и качественного характера. Поэтому для анализа механических систем необходимо использовать нелинейные математические модели, в частности, математические модели, которые описываются дифференциальными уравнениями произвольного порядка [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [2] проведено детальное исследование квазилинейных колебаний в колебательных системах, описываемых дифференциальными уравнениями произвольного порядка. Исследованы вопросы устойчивости решений. Однако вопросы оценки параметров систем такого класса при теоретико-экспериментальном подходе оказались вне поля зрения исследователей.

В [2] асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ) применён для нахождения решения дифференциального уравнения третьего порядка при учете только собственных колебаний:

$$\dddot{X}+\xi\ddot{X}+\Omega^2\dot{X}+\xi\Omega^2 X=-\varepsilon\beta X^3, \qquad (1)$$

где ξ, Ω, β – постоянные величины, причем ξ, Ω $>>\varepsilon$, ε – малый положительный параметр, $\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3}$ - первая, вторая и третья производные X по времени t.

Уравнения первого приближения для амплитуды и фазы решения $x = X_a \cos(\nu t + \psi)$ имеют вид [2]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_a}{dt} &= \beta_1 X_a^3 = \frac{3\varepsilon\beta X_a^3}{8\left(\Omega^2+\xi^2\right)}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \Omega + \frac{\beta_1 \xi X_a^2}{\Omega} = \Omega + \frac{3\varepsilon\beta\xi X_a^2}{8\left(\Omega^2+\xi^2\right)\Omega} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

В работе [2] рассмотрен вопрос устойчивости решения и получена зависимость между стационарной амплитудой и собственной частотой. Нами рассмотрен вопрос оценки параметров исходного дифференциального уравнения (1) интервальным и спектрально – интервальным методами.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

После несложных преобразований системы (2) уравнений первого приближения получим соотношение

$$d\psi - \Omega dt = \frac{\xi}{\Omega} \cdot \frac{dX_a}{X_a}. \tag{3}$$

При формировании режимов свободных колебаний, принимая во внимание соотношение $\psi=2\pi n$ (n – число циклов колебаний), после интегрирования (3) получим соотношение:

$$2\pi n_j - \Omega\Delta_j t = \frac{\xi}{\Omega} \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{(2j-1)}}} \tag{4}$$

или

$$2\pi n_j - \Omega\Delta_j t = \xi\Omega^{-1} \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{(2j-1)}}}, \tag{4a}$$

где j=const определено на счетном множестве натуральных чисел ($j=1,2,...,n$); n_j - число циклов затухающих колебаний при изменении амплитуды от значения $X_{a_{(2j-1)}}$ до значения $X_{a_{2j}}$; $\Delta_j t$ - временный интервал, соответствующий числу n_j циклов затухающих колебаний.

В уравнении (4) неизвестными выступают параметры Ω, $\Omega^{-1}\xi$, поэтому в первом приближении из (4) имеет место система уравнений:

$$2\pi n_1 - \Omega\Delta_1 t = \Omega^{-1}\xi \ln \frac{X_{a_2}}{X_{a_1}}, \ \textit{при}\ j = 1, \tag{5}$$

$$2\pi n_2 - \Omega\Delta_2 t = \Omega^{-1}\xi \ln\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}},\ npu\ j = 2, \tag{6}$$

где n_1, n_2 – числа циклов затухающих колебаний при изменении амплитуды от X_{a_1} до X_{a_2}, от X_{a_3} до X_{a_4} соответственно;

$\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$ – временные интервалы, соответствующие числам циклов n_1, n_2 затухающих колебаний.

Из (5),(6) получим уравнения для определения параметров $\Omega, \Omega^{-1}\xi$:

$$\left.\begin{aligned} \Omega\Delta_1 t + \Omega^{-1}\xi \ln\frac{X_{a_2}}{X_{a_1}} = 2\pi n_1, \\ \Omega\Delta_2 t + \Omega^{-1}\xi \ln\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}} = 2\pi n_2 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Из системы (7) уравнений получим соотношения для определения параметров Ω, $\Omega^{-1}\xi, \xi = \Omega \cdot \Omega^{-1}\xi$:

$$\Omega = 2\pi \ln\left[\left(\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}}\right)^{n_1}\left(\frac{X_{a_1}}{X_{a_2}}\right)^{n_2}\right]\ln^{-1}\left[\left(\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}}\right)^{\Delta_1 t}\left(\frac{X_{a_1}}{X_{a_2}}\right)^{\Delta_2 t}\right]; \tag{8}$$

$$\Omega^{-1}\xi = 2\pi\left(n_2\Delta_1 t - n_1\Delta_2 t\right)\ln^{-1}\left[\left(\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}}\right)^{\Delta_1 t}\left(\frac{X_{a_1}}{X_{a_2}}\right)^{\Delta_2 t}\right]; \tag{9}$$

$$\xi = 4\pi^2\left(n_2\Delta_1 t - n_1\Delta_2 t\right)\ln\left[\left(\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}}\right)^{n_1}\left(\frac{X_{a_1}}{X_{a_2}}\right)^{n_2}\right]\ln^{-2}\left[\left(\frac{X_{a_4}}{X_{a_3}}\right)^{\Delta_1 t}\left(\frac{X_{a_1}}{X_{a_2}}\right)^{\Delta_2 t}\right]. \tag{10}$$

Временные интервалы $\Delta_i t$ и амплитудные значения X_{a_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ измеряются при наличии ошибок измерения, фиксации и запоминания.

Поэтому при решении задачи получения соотношений для определения оценок параметров ξ и Ω в соответствии с уравнением (4) необходимо сначала сформировать информационный массив данных, затем сформировать регрессионную зависимость и методом наименьших квадратов получить нормальные уравнения.

В нашем случае минимизируемая функция имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^{N}\left(2\pi n_i - \hat{\Omega}\Delta_i t - \hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi}\ln\frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}}\right)^2, \tag{11}$$

где индекс j фиксирован и выбирается из последовательности $\left(j = \overline{1,k}\right)$;

N – количество измеряемых временных интервалов длительностью $\Delta_i t$.

Сформируем частные производные $\frac{\partial S}{\partial \hat{\Omega}}$, $\frac{\partial S}{\partial \left(\hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} \right)}$ функции S по параметрам $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi}$:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\Omega}} = \sum_{i=1}^{N} \left(2\pi n_i - \hat{\Omega} \Delta_i t - \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} \right) \Delta_i t = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \left(\hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} \right)} = \sum_{i=1}^{N} \left(2\pi n_i - \hat{\Omega} \Delta_i t - \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} \right) \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} = 0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получим систему уравнений для определения оценок $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi}, \hat{\xi}$ параметров $\Omega, \xi\, \Omega^{-1}, \xi$ соответственно:

$$\hat{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 t + \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i t = 2\pi \sum_{i=1}^{N} n_i \Delta_i t, \tag{14}$$

$$\hat{\Omega} \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i t + \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} N \ln^2 \left(\frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} \right) = 2\pi \ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} \sum_{i=1}^{N} n_i. \tag{15}$$

Так как величина $\ln \frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}}$ при фиксированном постоянном значении j не изменяется и является константой , то уравнение (15) запишем в более простом виде:

$$\hat{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i t + \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi} N \ln \left(\frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}} \right) = 2\pi \sum_{i=1}^{N} n_i. \tag{16}$$

Решения $\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^{-1} \hat{\xi}$ системы уравнений (14), (16) представим в виде

$$\hat{\Omega} = 2\pi \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i \Delta_i t - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i \sum_{i=1}^{N} \Delta_i t}{\left[\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 t - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i t \right)^2 \right]}, \tag{17}$$

$$\hat{\Omega}^{-1}\hat{\xi} = 2\pi \frac{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 t - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \Delta_i t \sum_{i=1}^{N} \Delta_i t\right)}{\left[\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 t - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i t\right)^2\right] \ln\left(\frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}}\right)}, \tag{18}$$

$$\hat{\xi} = \frac{4\pi^2 \left(\sum_{i=1}^{N} n_i \Delta_i t - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \sum_{i=1}^{N} \Delta_i t\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 t - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \Delta_i t \sum_{i=1}^{N} \Delta_i t\right)}{\left[\ln\left(\frac{X_{a_{2j}}}{X_{a_{1j}}}\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 t - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i t\right)^2\right]}. \tag{19}$$

Таким образом, как следует из соотношений (17), (18), (19), для получения оценок параметров Ω, ξ колебательной системы дробного (третьего) порядка необходимо представить и выполнить следующий алгоритм:

1) произвести задание диапазона изменения амплитуды затухающих колебаний от постоянного значения $X_{a_{1j}}$ до значения $X_{a_{2j}}$, $\left(j = \overline{1,k}\right)$;

2) произвести измерения путём N повторений множество N временных интервалов $\Delta_i t$, соответствующих диапазону изменения амплитудных значений от $X_{a_{1j}}$ до $X_{a_{2j}}$;

3) произвести измерение множества N чисел циклов n_i, каждое из которых соответствует определенному временному интервалу $\Delta_i t \left(i = \overline{1,N}\right)$;

4) по соотношениям (17), (19) определить оценки $\hat{\Omega}, \hat{\xi}$ параметров Ω, ξ при использовании метода наименьших квадратов, что приводит к сглаживанию погрешности измерений.

Изложенный алгоритм трактуется нами как спектрально – интервальный метод, где спектрами являются множества временных интервалов и соответствующие числа циклов.

Приведён также вариант частного случая спектрально – интервального метода при измерении минимального количества интервалов, равного двум, и соответствующих чисел циклов при заданном интервале изменения амплитудных значений.

Таким образом, в работе приведен новый алгоритм, основанный на спектрально – интервальном методе, в котором необходимо сформировать информационные массивы временных интервалов и соответствующие массивы чисел циклов синусоидального сигнала, сформировать регрессионную зависимость и получить оценки параметров, характеризующих математическую модель в виде дифференцированного уравнения третьего порядка.

При проведении дальнейших исследований необходимо выполнить компьютерное моделирование решений квазилинейных дифференциальных уравнений дробного (в частности, третьего) порядка для оценки эффективности и применимости представленного алгоритма определения оценок параметров.

ВЫВОДЫ

Получены аналитические соотношения для определения параметров и оценок параметров математической модели в виде дифференциального уравнения третьего порядка. Использованы уравнения первого приближения асимптотического метода КБМ. Приведен новый алгоритм, основанный на спектрально-интервальном методе для информационного массива временных интервалов и информационного массива чисел циклов колебаний при условии соответствия числа циклов определенному временному интервалу.

SUMMARY

ABOUT PARAMETRIC IDENTIFICATION OF NON-LINEAR OSCILLATION SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER

Puzko I.D.
Sumy State University

In the paper a new relationship was received to define the evaluation parameters of the mathematical model in the form of the third-order differential equation.

The first-order differential equations of the first approaching for amplitude and phase were got on the basis of the osymptotical method of Krylov-Bogoliubov-Mirtopolsky (KBM).

A new algorithm is presented in the paper.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Резонансные виброиспытательные системы / А.Е. Божко, Е.А. Личкатый, О.Ф. Полищук, И.Д. Пузько, В.И. Савченко. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
2. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю.А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.
3. Идентификация механических систем. Определение динамических характеристик и параметров / С.Ф. Редько, В.Ф. Ушкалов, В.П. Яковлев – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.

***Пузько И.Д.**, кандидат техн. наук, доцент*

Поступила в редакцию 28 ноября 2008 г.