КЛАСИЧНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ РЕЛЯТИВІСТСЬКОГО ЕЛЕКТРОНА В БАГАТОЧАСТОТНОМУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

Ворошило А. І., асп.

В зв`язку з швидким розвитком лазерної техніки великий інтерес викликає проблема взаємодії лазерного випромінювання з речовиною (див. наприклад [1]-[10]). Звичайно, лазерне поле моделюється плоскою монохроматичною електромагнітною хвилею, для якої відоме рішення для поведінки електрона як в класичному, так і квантовому випадку. Але для сучасних фемтосекундних лазерів модель плоскої монохроматичної хвилі некорректна. Та її зручність призводить до використання модернізованих моделей таких як: представлення лазерного поля монохроматичною хвилею з обвідною, або в вигляді суми плоских хвиль різної частоти, що розповсюджуються в одному напрямку.

Ця стаття присвячена дослідженню випромінюванню електрона в багаточастотному полі в класичному випадку. Отримані результати зрівняні з формулами отриманими в результаті класичного переходу із квантових виразів [1]. В статті використовується релятивістська система одиниць: $c = 1$ і звичайна метрика $ab = a^0b^0 - \vec{a}\vec{b}$ (a,b – 4-вектори).

Виберемо багаточастотне електромагнітне поле в вигляді суми циркулярно-поляризованих хвиль, що розповсюджуються в одному напрямку $\vec{n}$, довільних інтенсивностей і частот (передбачається що частоти хвиль не збігаються):

$$A = \sum_{j=1}^{N} \left(a_{1j} \cos\varphi_j + a_{2j}\delta_j \sin\varphi_j \right), \quad \varphi_j = k_j x \qquad (1)$$

де a_{1j}, a_{2j} – 4-потенціали j-ої хвилі, взаємно ортогональні ($(a_{1j}a_{2j}) = 0$) і калібровані умовою Лоренца ($(k_j a_{1j}) = (k_j a_{2j}) = 0$), крім цього $a_{1j}^2 = a_{2j}^2 = a_j^2$, $\delta_j = \pm 1$ – поляризація j–ої хвилі, $k_j = (\omega_j, \vec{k}_j)$ – хвильовий 4-вектор j-ої хвилі, x – 4-радиус вектор.

В класичній електродинаміці спектральна густина енергії ($\varepsilon_{k'}$), що випромінюється електроном визначається виразом [2]:

$$d\varepsilon_{k'} = -\left| j(k') \right|^2 \frac{d^3k'}{4\pi^2}, \qquad (2)$$

в якому k' – хвильовий 4-вектор випромінювання (як звичайно $k'^2 = 0$), а $j(k')$ – Фур'є компонента 4-вектора току електрона

$$j(k') = e\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\pi}{m} e^{-ik'x}. \qquad (3)$$

Тут s – релятивістський інтервал, p – імпульс електрона. Для знаходження імпульсу k', а також координати електрона x необхідно скористатись дією (S) для електрона в полі (1) [2],[3]:

$$\pi = -\frac{\partial S}{\partial x} - eA(\xi) = p - eA + \left[\frac{e}{(np)} (pA(\xi)) - \frac{e^2}{2(np)} A^2(\xi) \right] n, \qquad (4)$$

$$x = \frac{1}{m}\int_0^s \pi ds + x(0), \qquad (5)$$

де 4-вектор $p = (\varepsilon, \vec{p})$ являється константою руху, коли поле виключене він збігається з імпульсом вільного електрона, $n = (1, \vec{n})$ – фіксований 4-вектор, $\xi = (nx)$, $x(0)$ – константа інтегрування. Між інтервалом s і змінною x існує лінійний зв'язок $d\xi = ((np)/m)ds$, що дозволяє здійснити інтегрування в (5).

Виділивши в (3) періодичну частину по змінним φ_1, φ_2,..., φ_N, розклавши її в N-мірний ряд Фур'є по відповідним змінним, після інтегрування для Фур'є компоненти току електрона отримаємо

$$j(k') = \frac{em}{(np)}\left[\prod_{j=1}^{N}\sum_{l_j}\right] M_{l_1\ldots l_N}\, 2\pi\delta\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\omega_j + \frac{(k'\tilde{p})}{(np)}\right), \qquad (6)$$

де

Ошибка! Закладка не определена., $\tilde{p}^2 = m_*^2 = m^2\left(1 + \sum_{j=1}^{N}\eta_j^2\right)$,

квазіімпульс електрона в полі (1), який відрізняється від звичайного імпульсу p присутністю додаткової частини, обумовленої присутністю зовнішнього поля, $\eta_j = e\sqrt{-a_j^2}\,/\,m$ – релятивістсько-інваріантний параметр j-ої хвилі, а

$$M_{l_1\ldots l_N} = pI_{l_1\ldots l_N} - \frac{m}{2}D_{l_1\ldots l_N} + \frac{m}{2(np)}\left[(pD_{l_1\ldots l_N}) - mB_{l_1\ldots l_N}\right]n \qquad (7)$$

– являється коефіцієнтом Фур'є розкладу періодичної частини виразу (3). Функція $I_{l_1..l_N}$ рівна

Ошибка! Закладка не определена., (8)

де

$$\lambda_j = l_j - \delta_j\left[\sum_{s=j+1}^{N} n_{js} - \sum_{s=1}^{j-1} n_{sj}\right],$$

а параметри y_j, z_{rs} визначаються виразами

$$y_j = \eta_j\,\frac{m}{\omega_j}\,\frac{1}{(np)}\sqrt{-Q^2}\,,\; z_{rs} = \eta_r\eta_s\,\frac{(nn')}{2(np)}\,\frac{m^2}{\Omega_{rs}}. \qquad (9)$$

Тут $Q = k' - (np)^{-1}(nk')\,\tilde{p}$, $\Omega_{rs} = \delta_r\omega_r - \delta_s\omega_s$.

В (7) комплексний вектор $D_{l_1\ldots l_N}$ і функція $B_{l_1..l_N}$ визначаються функціями $I_{l_1..l_N}$ (детальніше див. [1],[3]).

Із класичного закону збереження (аргументу d -функції в (6)) легко побачити, що сума в (6) береться по l_j що задовольняють нерівність

$$\sum_{j=1}^{N} l_j\omega_j < 0.$$

При піднесенні виразу (6) в квадрат виникає нескінченний інтервал фаз L_ξ. Постільки фаза x через власний час зв'язана з лабораторним часом $t \equiv x_0(x)$, то великий інтервал фаз також зв'язаний з великим інтервалом лабораторного часу. Цей зв'язок визначається рівністю $L_\xi = (np)\,\tilde{\varepsilon}^{-1}T$, і таким чином для спектральної густини середньої інтенсивності отримаємо формулу:

$$dA_{k'} = \frac{d\varepsilon_{k'}}{T} = \frac{e^2m^2}{2\tilde{\varepsilon}(np)}\left[\prod_{j=1}^{N}\sum_{l_j}\right]\delta\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\omega_j + \frac{(k'\tilde{p})}{(np)}\right)\left(-M^2_{l_1\ldots l_N}\right)\frac{d^3k'}{2\pi}, \qquad (10)$$

де $d^3k' = \omega'^2 d\omega' d\cos\theta' d\varphi'$.

d -функція дозволяє проінтегрувати по ω', а аксіальна симетрія поля (1) – по φ', так в системі де електрон в середньому покоїться ($\vec{\tilde{p}} = 0$) отримаємо:

$$A = \frac{e^2}{2}\left[\prod_{j=1}^{N}\sum_{l_j}\right]\left|\sum_{j=1}^{N} l_j\omega_j\right|^2 \int_{-1}^{1} d\cos\theta'\left\{\left(\frac{m}{m_*}\right)^2\left(K - 2\left(G - I\right)\right)\right\}, \qquad (11)$$

де

$$K = \sum_{j=1}^{N} \eta_j^2 \left\{ \left(b_j^{(-)} I \right)^2 + \left(b_j^{(+)} I \right)^2 \right\} + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^{N} \eta_r \eta_s \left\{ \left(b_r^{(-)} I \right) \left(b_s^{(\delta_r \delta_s)} I \right) + \left(b_r^{(+)} I \right) \left(b_s^{(-\delta_r \delta_s)} I \right) \right\}$$

(12)

$$G = \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^{N} \eta_r \eta_s \left(b_r^{(-)} b_s^{(\delta_r \delta_s)} + b_r^{(+)} b_s^{(-\delta_r \delta_s)} \right) I . \tag{13}$$

В (11), (12), (13) $I \equiv I_{l_1 \ldots l_N}$, а оператори $b_j^{(\pm)}$ діють так що збільшують або зменшують індекс функцій $I_{l_1 .. l_N}$ на одиницю

$$b_j^{(\pm)} I_{l_1 \cdots l_j \cdots l_N} = I_{l_1 \cdots (l_j \pm 1) \cdots l_N} .$$

При $N = 1$ отримуємо відому формулу Шотта для інтенсивності випромінювання електрона, що рухається по колу [2], [3].

Представляє цікавість зрівняти отримані результати з випромінюванням електрона в квантовому випадку [1]. Для цього, знаючи диференційну парціальну ймовірність [1] легко записати формулу для середньої інтенсивності випромінювання одиниці об'єму в одиницю часу, яка являється 4-ою компонентою 4-імпульса P, що випромінюється одиницею об`єму в одиницю часу

$$P = \left[\prod_{j=1}^{N} \sum_{l_j} \right] \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{u_{l_1 \ldots l_N}} du\, k' w(l_1 \ldots l_N), \tag{14}$$

де $w(l_1 \ldots l_N)$ – диференційна ймовірність випромінювання, k' – імпульс спонтанного фотона, j – азимут кута вздовж якого випромінюється спонтанний фотон,

$$u = \left| \sum_{j=1}^{N} l_j \frac{(\omega_j k')}{(k' \tilde{p}_i)} \right|, \; u_{l_1 \ldots l_N} = \left| \sum_{j=1}^{N} l_j \frac{(\omega_j p_i)}{m_*^2} \right|$$ [1]

– інваріантні параметри, $p_{i,f}$ – імпульс електрона в початковому (i), і кінцевому (f) стані.

В фіксованій системі відліку $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{n}$ імпульс k' можна розкласти по постійним векторам p_i, $e_1 = (0, \vec{e}_x)$, $e_2 = (0, \vec{e}_y)$, n: $k' = b_1 p_i + b_2 e_1 + b_3 e_2 + b_4 n$. Хоча диференційна ймовірність не залежить від азимутального кута j, 4-імпульс випромінювання $dP/(d\varphi du)$ виявляється залежним від цього кута за рахунок членів, лінійних по e_1, e_2. Однак при інтегруванні вони пропадають і тому повний 4-імпульс випромінювання можна записати у вигляді

$$P = 2\pi \left[\prod_{j=1}^{N} \sum_{l_j} \right] \int_0^{u_{l_1 \ldots l_N}} du \left(b_1 p_i + b_4 n \right) \bar{w}(l_1 \ldots l_N). \tag{15}$$

Тут

$$b_1 = \frac{u}{1+u}, \; b_4 = \frac{m^2}{(np_i)} \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \eta_j^2 - (\alpha m^2)^{-1} \sum_{j=1}^{N} l_j \omega_j \right] \frac{u}{1+u}, \; \alpha = \frac{1}{(np_i)} - \frac{1}{(np_f)} .$$

Кожному парціальному процесу (числа l_1, ..., l_N фіксовані) відповідає закон збереження 4-імпульсу [1]

$$\tilde{p}_i - \sum_{j=1}^{N} l_j \omega_j = \tilde{p}_f + k' . \tag{16}$$

Визначимо умову класичності зрівнявши закон збереження в класичному і квантовому випадках. Виключаючи із (16) кінцевий імпульс електрона p_f (в класичну інтенсивність він не входить) отримаємо

$$(k' \tilde{p}_i) = \sum_{j=1}^{N} l_j \omega_j (np_i) + \sum_{j=1}^{N} l_j \omega_j (nk'). \tag{17}$$

---

[1] Тут і далі в релятивістській системі одиниць $\hbar = 1$.

Порівнюючи (17) з аргументом d-ôóíêö³¿ â (6) отримуємо, що (17) переходить в відповідний класичний вираз, лише коли можна знехтувати віддачею електрона, тобто членом (nk') в порівнянні з (np_i) $\left((nk')/(np_i) \ll 1\right)$. Враховуючи, що

$$u = \frac{(nk')}{(np_i) - (nk')}$$

умову класичності можна записати у вигляді $u \ll 1$, а так як граничним значенням u являється $u_{l_1 \ldots l_N}$, то

$$u_{l_1 \ldots l_N} = 2\left|\sum_{j=1}^{N} l_j (k_j p_i)\right| / m_*^2 \ll 1 . \qquad (18)$$

Вираз (18) являється умовою класичності. Роблячи в (15) класичний перехід відповідно до (18), в системі в якій електрон в середньому покоїться, для нульової компоненти отримаємо в точності результат (11).

Проведене дослідження класичного випромінювання електрона в багаточастотному полі показує:

- Процес випромінювання описується універсальною функцією $I_{l_1 \ldots l_N}$ – загальною як для класичного так і для квантового випадку [1], [4].
- Випромінювання проходить на сумі гармонік хвиль з деяким зсувом.
- Порівняння закону збереження в класичному і квантовому випадку, показує, що класичний перехід відповідає умові $u \ll 1$ (тобто коли можна знехтувати віддачею електрона).
- Вираз для спектральної густини енергії отриманий, як із класичних міркувань, так із квантових в результаті класичного переходу повністю збігаються.

В завершення хочу висловити щиру подяку проф. С.П. Рощупкіну за корисні обговорення та цінні зауваження.

SUMMARY

This paper presents a theoretical study of a classical emission of electron in the field of N – plane electromagnetic waves of the same direction. It obtains an expression for an intensity of emission. Results compare with an emission in the quantum case .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 С.П. Рощупкин, А.И. Ворошило. Спонтанное излучение релятивистского электрона в многочастотном электромагнитном поле в интерференционной области. Вісник СумГУ, Т.1(7), 1997, с.126-131.
2 В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Теория поля. – М.:Наука, 1989.
3 А.И. Никишев, В.И. Ритус. Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле, Т.**111**, Труды ФИАН. - М.:Наука, 1979.
4 S.P. Roshchupkin and A.I. Voroshilo. Stimulated Bremsstrahlung in Electron-Nucleus Scattering in a Multifrequency Electromagnetic Field. Laser Physics, 1997, V.7, №3, pp. 873-884.
5 И.М. Тернов, В.Г. Багров,Ю.И. Клименко. Изв. ВУЗов СССР, Физика.-1968, т.2,- С.50-55.
6 И.В. Лебедев. Оптика и спектроскопия.- 1970, т.19, С.948-952.
7 Ю.И. Клименко, В.В. Кулиш, А.И. Худомьясов. Индуцированное излучение ферми- частиц в поле двух электромагнитных волн произвольной поляризации// Изв.ВУЗов СССР, Физика. - 1974, т.11,-С.12-21.
8 Ю.И. Клименко, В.В. Кулиш, И.И. Федосов, А.И. Худомьясов. Излучение электрона с аномальным моментом в поле двух электромагнитных волн произвольной поляризации// Изв. ВУЗов СССР Физика.- 1976, т.4,-С.136-141.
9 В.И. Радионов. ЖЭТФ.-1981, т.81,- С.187-193.
10 A.I. Voroshilo and S.P. Roshchupkin. Interference Effect in the Emission of a Spontaneous Photon by an Electron in the Field of Two Light Waves // Laser Physics, 1997, V.7, №2, pp. 466-472.