ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВИХРЕЙ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Калиниченко П. М., ст. преп.

В рамках классической гидромеханики ответ на вопрос о возникновении вихрей в идеальной жидкости даёт теорема Гельмгольца, согласно которой гельмгольциан вектора вихря скорости равен нулю: $helm\vec{\Omega} = 0$ [1]. Если взять от левой и правой частей уравнения движения идеальной жидкости

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -grad\,\frac{P}{\rho} \qquad (1)$$

операцию ротора, то для несжимаемой жидкости при пренебрежении действием массовых сил $helm\vec{\Omega}$ будет иметь вид

$$helm\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = -(\vec{\Omega}\cdot\nabla)\vec{v} = 0\,.$$

Отсюда вытекает, что если элемент жидкости в какой-либо момент времени не имел вращательного движения $(\vec{\Omega} = 0)$, то и в смежные моменты времени, до и после данного, элемент жидкости не может иметь вихревого движения (т.к. $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$).

Покажем, что в жидкости, удовлетворяющей приведенным условиям, может возникать и исчезать вихревое движение.

Запишем выражение для вектора вихря скорости в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$rot\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}\,. \qquad (2)$$

Для элементарной частицы жидкости, имеющей форму параллелепипеда, равенство нулю вектора вихря скорости приводит к равенству скоростей угловых деформаций граней: $\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Судить о возникновении и изменении вихревого движения в жидкости по выражению (2) не представляется возможным, т.к. проекция вектора вихря скорости зависит от двух скоростей угловых деформаций грани. Поэтому дальнейшие рассуждения будут направлены на установление функциональной зависимости между углами деформации рассматриваемых граней. Для этого приведем вывод уравнения неразрывности, учитывающего линейную и угловую деформации жидкого объема.

Из закона сохранения массы $\frac{d}{dt}\delta m = 0$, для несжимаемой жидкости будем иметь

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d(\delta V)}{dt} = 0\,. \qquad (3)$$

Определим изменение элементарного объема $d(\delta V)$, имеющего в начальный момент времени форму параллелепипеда. Положим, что проекции вектора скорости есть непрерывные функции координат $v_x = v_x(x, y, z)$, $v_{\acute{o}} = v_{\acute{o}}(x, y, z)$, $v_z = v_z(x, y, z)$. Тогда изменение скорости жидкости при прохождении через параллелепипед вдоль осей, параллельных осям координат, будет:

вдоль оси X

$$d v_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)dx\,,$$

вдоль оси Y

$$d v_{\acute{o}} = \left(\frac{\partial v_{\acute{o}}}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial \acute{o}} + \frac{\partial v_{\acute{o}}}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial \acute{o}} + \frac{\partial v_{\acute{o}}}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial \acute{o}}\right)d\acute{o}\,,$$

вдоль оси Z

$$d v_z = \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)dz\,.$$

Здесь $\xi(x,y,z)$, $\eta(x,y,z)$, $\zeta(x,y,z)$ - длины жидких отрезков вдоль осей *X*, *Y* и *Z* соответственно. При протекании жидкости через параллелепипед вдоль оси *X* объем жидкости за время *dt* изменится на величину

$$d(\delta V)_x = d\,v_x\,dt\,dydz = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)dxdydzdt\ .$$

Прибавляя и вычитая к выражению в скобках $\pm\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$, будем иметь

$$d(\delta V)_x = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right]dxdydzdt.$$

Проводя аналогичные выкладки для вычисления изменения объема при прохождении жидкости через две другие грани $dxdz$ и $dxdy$, получим суммарное изменение объема за время dt:

$$d(\delta V) = \left\{\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\times\right. \qquad (4)$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\right]\right\}dxdydzdt.$$

С целью упрощения при ведении дальнейших преобразований воспользуемся следующими обозначениями:

$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = rot_x\vec{v}$, $\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = rot_y\vec{v}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = rot_z\vec{v}$ —

проекции вектора вихря скорости $rot\,\vec{v}$;

$\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = def_{xy}\vec{v}$, $\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = def_{xz}\vec{v}$, $\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = def_{yz}\vec{v}$ —

проекции вектора скорости угловой деформации $\overline{def_{ij}\vec{v}}$ ($i \neq j$);

$\frac{\partial v_x}{\partial x} = def_{xx}\vec{v}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y} = def_{yy}\vec{v}$, $\frac{\partial v_z}{\partial z} = def_{zz}\vec{v}$ —

проекции вектора скорости линейной деформации $\overline{def_{ii}\vec{v}}$ на оси декартовой системы координат.

Введем в рассмотрение вектор $\vec{S} = S(x,y,z)$, проекции которого на оси координат равны:

$S_x = \xi,\quad S_y = \eta,\quad S_z = \zeta.$ Тогда

$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = rot_x\vec{S}$, $\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = rot_y\vec{S}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = rot_z\vec{S}$ —

проекции вектора вихря $rot\vec{S}$;

$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = def_{xy}\vec{S}$, $\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = def_{xz}\vec{S}$, $\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = def_{yz}\vec{S}$ —

проекции вектора угловой деформации $\overline{def_{ij}\vec{S}}$ ($i \neq j$);

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = def_{xx}\vec{S}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = def_{yy}\vec{S}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial z} = def_{zz}\vec{S}$ -

проекции вектора линейной деформации $\overline{def_{ii}\vec{S}}$ на оси декартовой системы координат.

С учетом принятых обозначений выражение (4) примет вид

$$d(\delta V) = \Big[def_{xx}\vec{v}def_{xx}\vec{S} + def_{yy}\vec{v}def_{yy}\vec{S} + def_{zz}\vec{v}def_{zz}\vec{S}\Big) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(rot_x\vec{v}rot_x\vec{S} + rot_y\vec{v}rot_y\vec{S} + rot_z\vec{v}rot_z\vec{S}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(def_{xy}\vec{v}def_{xy}\vec{S} + def_{xz}\vec{v}def_{xz}\vec{S} + def_{yz}\vec{v}def_{yz}\vec{S}\right)\Big]\delta V dt.$$

Используя формулы векторной алгебры, предыдущее выражение перепишем в виде

$$d(\delta V) = \left(\overline{def_{ii}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ii}}\vec{S} - \frac{1}{2}rot\,\vec{v}\cdot rot\vec{S} + \frac{1}{2}\overline{def_{ij}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ij}}\vec{S}\right)\delta V dt\,. \qquad (5)$$

Из уравнений (3) и (5) получаем

$$\overline{def_{ii}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ii}}\vec{S} - \frac{1}{2}rot\,\vec{v}\cdot rot\vec{S} + \frac{1}{2}\overline{def_{ij}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ij}}\vec{S} = 0. \qquad (6)$$

Первое слагаемое уравнения (6) запишем в развернутом виде

$$\overline{def_{ii}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ii}}\vec{S} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Так как элементарный объем в виде параллелепипеда выбран произвольно, то будем считать, что его стороны dx, dy, dz равны $d_x\xi, d_y\eta, d_z\zeta$, т.е.

$$d_x\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}dx = dx\,,\ d_y\xi = \frac{\partial \eta}{\partial y}dy = dy\,, d_z\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial z}dz = dz\,.$$

Из этого $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 1.$ А значит

$$\overline{def_{ii}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ii}}\vec{S} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = di\,v\vec{v}\,. \qquad (7)$$

Если внутри конечного объема жидкости нет источников и стоков, то поток вектора скорости через ограничивающую объем поверхность равен нулю: $\int\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS = 0$. Согласно формуле Остроградского $\int\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS = \int\limits_V di\,v\vec{v}dV = 0$, значит $di\,v\vec{v} = 0$, поэтому из (7) следует $\overline{def_{ii}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ii}}\vec{S} = 0$, а уравнение (6) принимает вид

$$rot\,\vec{v}\cdot rot\vec{S} - \overline{def_{ij}}\vec{v}\cdot\overline{def_{ij}}\vec{S} = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) запишем в развернутом виде

$$\left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] - \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \right. \qquad (9)$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right] = 0.$$

Скорость, входящую под знак производной, представим, используя лангранжево задание движения жидкости:

$$v_x = v_{x_0} = \frac{\partial \xi}{\partial t},\quad v_y = v_{y_0} = \frac{\partial \eta}{\partial t},\quad v_z = v_{z_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Так как $v_0 = const$, то будем иметь

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial t},\quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial t},\ \ ...\ \text{и т.д.}$$

С учетом этого равенство (9) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}&\Bigg\{\Bigg[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right]+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right]+\\&+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right]\Bigg]-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\Bigg[\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right]+\\&+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)\right]+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)\right]\Bigg]\Bigg\}=0.\end{aligned}$$

Так как величина производной не зависит от порядка дифференцирования, то

$$\begin{aligned}&\Bigg[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\Bigg]+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\\&+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\Bigg]-\Bigg[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\\&+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\Bigg]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2-\\&-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\Bigg]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Bigg[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2-\\&-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\Bigg]=\tilde{N}=const.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{C}{4}=\tilde{N}^{*}=const.$$

Последнее возможно, если

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial z}=\tilde{n}_1=const,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z}=\tilde{n}_2=const,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}=\tilde{n}_3=const. \qquad (10)$$

Полученные из уравнения неразрывности соотношения (10) являются искомыми и характеризуют деформационное движение жидкой частицы.

Основываясь на соотношениях (10), преобразуем выражение для проекции вектора вихря скорости на ось Z следующим образом:

$$rot_z\vec{v}=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right).$$

Введем в рассмотрение углы деформации грани жидкой частицы α_1 и α_2, равные

$$tg\alpha_1=\frac{\partial\eta}{\partial x},\quad tg\alpha_2=\frac{\partial\xi}{\partial y}.$$

Тогда

$$rot_z\vec{v}=\frac{\partial}{\partial t}\left(tg\alpha_1\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(tg\alpha_2\right)$$

Следуя (10),

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}=tg\alpha_1 tg\alpha_1=C_3=const,$$

$tg\alpha_2 = \dfrac{\tilde{N}_3}{tg\alpha_1}$, а значит

$$rot_z\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}(tg\alpha_1) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{N}_3}{tg\alpha_1}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(tg\alpha_1) - \left(-\frac{\tilde{N}_3}{tg^2\alpha_1}\right)\frac{\partial}{\partial t}(tg\alpha_1) =$$

$$= \left(1 + \frac{\tilde{N}_3}{tg^2\alpha_1}\right)\frac{1}{cos^2\alpha}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} = \left(1 + \frac{\tilde{N}_3}{tg^2\alpha_1}\right)(1 + tg^2\alpha_1)\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} =$$

$$= \left(1 + \frac{tg^2\alpha_2}{C_3}\right)(1 + tg^2\alpha_1)\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}.$$

Так как углы деформации грани жидкой частицы α_1 и α_2 малы, то можно считать

$$tg^2\alpha_1 \approx \alpha_1^2 \approx 0, \quad tg^2\alpha_2 \approx \alpha_2^2 \approx 0.$$

С учетом этого

$$rot_z\vec{v} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial t}.$$

Переходя к эйлеровым переменным и заменяя изменение угла деформации по времени его изменениям по длине линии тока $\dfrac{d\alpha_1}{dt} = \dfrac{d\alpha_1}{dl}\dfrac{dl}{dt} = v\dfrac{d\alpha_1}{dl}$, где dl- элемент длины линии тока, получим окончательное выражение для проекции вектора вихря скорости на ось Z

$$rot_z\vec{v} = v\frac{d\alpha_1}{dl}. \qquad (11)$$

Проводя аналогичные преобразования проекций вектора вихря скорости на две другие оси будем иметь

$$rot_x\vec{v} = v\frac{d\beta_1}{dl}, rot_y\vec{v} = v\frac{d\gamma_1}{dl},$$

где β_1 и γ_1- углы деформации двух других граней жидкой частицы.
Таким образом, выражение для вектора вихря скорости представимо в виде

$$rot\ \vec{v} = v\frac{d}{dl}(\alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j} + \gamma_1\vec{k}) = v\frac{d\vec{\varphi}}{dl}, \qquad (12)$$

где $\vec{\varphi} = \alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j} + \gamma_1\vec{k}$.
В качестве анализа полученного выражения (12) для вектора вихря скорости рассмотрим движение жидкости вдоль криволинейной поверхности в плоскости XY. Пусть α_1 - угол деформации грани жидкой частицы, сторона которой принадлежит линии тока. Тогда в выражении $rot_z\vec{v} = v\dfrac{d\alpha_1}{dl}$, $\dfrac{d\alpha_1}{dl}$ представляет скорость изменения угла скоса грани жидкой частицы, движущейся вдоль линии тока. При движении жидкости в концентричном канале, когда линиями тока являются концентричные окружности, угол скоса грани $\alpha_1 = const$, а скорость его изменения $\dfrac{d\alpha_1}{dl}$=0. Следуя (11), $rot_z\vec{v} = 0$ - течение потенциальное. Если кривизна линии тока изменяется ($\alpha_1 \neq const$), то скорость изменения угла скоса грани жидкой частицы отлична от нуля: $\dfrac{d\alpha_1}{dt} \neq 0$.
Следуя (11), $rot_z\vec{v} \neq 0$ - течение вихревое. Как видим, причиной возникновения вихрей в движущейся жидкости является изменение кривизны линии тока.
Из этого следует **теорема 1**. В движущейся идеальной жидкости могут возникать и исчезать вихри.
Выражение для проекции вектора вихря скорости (11) умножим на dl и проинтегрируем вдоль линии тока от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 rot_z\vec{v}dl = \int_1^2 v\frac{d\alpha_1}{dl}dl = \int_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} v d\alpha_1.$$

Пусть $v = f(\alpha_1)$ - функция от α_1, первообразная которой $F(\alpha_1)$. Тогда

$$\int_1^2 rot_z\vec{v}dl = F(\alpha_1)\Big|_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}}, \text{ а значит } \left.\int_1^2 rot_z\vec{v}dl\right|_{\alpha_{11}=\alpha_{12}} = 0.$$

Из этого следует **теорема 2.** Если в начальный и конечный моменты времени в движущемся объеме жидкости вихрей не было, то за рассматриваемый период времени в движущемся объеме жидкости суммарная интенсивность возникших и исчезнувших вихрей равна нулю.

Что же получается? Из уравнений движения идеальной жидкости (1) следует, что $helm\vec{\Omega} = 0$, а значит вихревое движение в идеальной жидкости возникнуть не может. Результат данной работы о возможности возникновения вихрей получен из закона сохранения массы и не связан с уравнением движения жидкости (1). Это противоречие устраняется введением в уравнение движения идеальной жидкости (1) динамической силы $\vec{F}_{äèí}$, которая не имеет градиента. С учетом предполагаемой силы дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости (1) примет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -grad\,\frac{P}{\rho} + \vec{F}_{äèí} \ . \qquad (13)$$

Наличие динамической силы в (13) позволяет объяснить возникновение силы давления, подъемной силы в идеальной жидкости, что будет отражено в последующих работах автора.

SUMMARY

The article illustrates the possibility of vortexes formation a damping in ideal liquid flows. The nature of vortex initiation is explained and the expression for speed rate vortex value definition is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин И.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. - М.: Гостехиздат, 1948.