ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Пузько И.Д., доц.; Хворост В.А., доц.

Большинство экспериментальных методов определения основных динамических характеристик механических систем разработано при условии, что АЧХ исследуемой конструкции относится к классу резонансных и с достаточной степенью точности аппроксимируется моделью линейной диссипативной колебательной системы с одной степенью свободы [1,3].
При обработке результатов экспериментальных исследований применяются различные методы - резонансный, свободных колебаний, квадратурной составляющей, Кеннеди-Пэнку и др [3].
При обработке экспериментальных данных достаточно эффективен резонансный метод.
Рассмотрим некоторую модификацию резонансного метода.
Для определения инерционно-жесткостных и диссипативных параметров применим методы пробных величин, в частности, методы пробных параметров - пробных масс, пробных коэффициентов жесткости, пробных амплитуд и, пробных фаз. Аналогичный подход приведен в [1].

I ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ ДВУХ ПРОБНЫХ МАСС

При реализации режимов вынужденных колебаний и условии максимума $Y_a = Y_m$ огибающей полуразмахов колебаний для масс $m,\ (m + m_1^*),\ (m + m_2^*)$ имеет место система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \omega_{m1}^2 &= cm^{-1} - 2h_1^2, \\ \omega_{m2}^2 &= c(m + m_1^*)^{-1} - 2h_2^2, \\ \omega_{m3}^2 &= c(m + m_2^*)^{-1} - 2h_3^2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\omega_{mi}(i = \overline{1,3})$ - частоты максимумов Y_{mi} перемещений;
$m_1^*,\ m_2^*$ - первая и вторая пробные массы.
В первом приближении ограничимся условием $h_1 \approx h_2 \approx h_3 \approx h$, что справедливо при $m_1^* << m,\ m_2^* << m$.
Преобразуем (1) путем формирования попарных разностей левых и правых частей и последующего деления полученных выражений

$$\frac{\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2}{\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2} = \left(1 + mm_1^*\right)\left(1 + mm_2^*\right)^{-1}. \tag{2}$$

Из (1), (2) определим параметры $m,\ c,\ h,\ \omega_0,\ b$

$$m \cong m_1^* m_2^* \left(\omega_{m2}^2 - \omega_{m3}^2\right)\left[m_2^*\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right) + m_1^*\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m1}^2\right)\right]^{-1}, \tag{3}$$

$$c \cong \frac{m_1^* m_2^* \left(m_1^* - m_2^*\right)\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\left(\omega_{m2}^2 - \omega_{m3}^2\right)\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m1}^2\right)}{\left[m_2^*\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right) + m_1^*\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m1}^2\right)\right]^2}, \tag{4}$$

$$\omega_0 = \left[\frac{\left(m_1^* - m_2^*\right)\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m1}^2\right)}{m_2^*\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right) + m_1^*\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m1}^2\right)}\right]^{1/2}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} h = \Big\{0{,}5\left[m_1^*\omega_{m2}^2\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right) - m_2^*\omega_{m3}^2\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\right] / \\ / \left[m_1^*\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m1}^2\right) + m_2^*\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\right]\Big\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} b = \Big\{2m_1^* m_2^*\left(m_2^* - m_3^*\right)\left[m_1^*\omega_{m2}^2\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right) - m_2^*\omega_{m3}^2 \times \right. \\ \left. \times\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\right]\Big\}^{1/2} \Big/ \left[m_1^*\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m1}^2\right) + m_2^*\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\right]^{3/2} \end{aligned} \tag{7}$$

Принимая во внимание выражение $\omega_i = \pi / \Delta_i$, представим (3), (4), (5), (6), (7) в другой форме:

$$m = \frac{m_1^* m_2^* \left(\Delta_3^2 - \Delta_2^2\right)\Delta_1^2}{\Delta_3^2 m_2^* \left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right) + \Delta_2^2 m_1^* \left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right)}, \tag{8}$$

$$c = \pi^2 \frac{m_1^* m_2^* \left(m_1^* - m_2^*\right)\left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)\left(\Delta_3^2 - \Delta_2^2\right)\left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right)}{\Delta_2^2 m_1^* \left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right) + \Delta_3^2 m_2^* \left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)}, \tag{9}$$

$$\omega_0 = \pi \left\{ \frac{\left(m_1^* - m_2^*\right)\left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)\left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right)}{m_1^* \left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right) + m_2^* \left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)} \right\}^{1/2}, \tag{10}$$

$$h = \pi \left\{ \frac{m_1^* \left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right) + m_2^* \left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)}{2\left[m_1^* \Delta_2^2 \left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right) + m_2^* \Delta_3^2 \left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)\right]} \right\}^{1/2}, \tag{11}$$

$$b = \pi \left(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3\right)^2 m_1^* m_2^* \left(\Delta_3^2 - \Delta_2^2\right) \left\{2\left[m_1^* \left(\Delta_3^2 - \Delta_1^2\right) - m_2^* \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)\right]\right\}^{1/2} \Big/ \left[m_1^* \Delta_2^2 \left(\Delta_1^2 - \Delta_3^2\right) + m_2^* \Delta_3^2 \left(\Delta_2^2 - \Delta_1^2\right)\right]^{3/2}. \tag{12}$$

II. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ ДВУХ ПРОБНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ

При введении двух пробных коэффициентов c_1, c_2 жесткости приведенные коэффициенты жесткости c_1^*, c_2^* при условии физической реализуемости представим в виде

$$\left.\begin{aligned} \left(c_1^*\right)^{-1} &= c^{-1} + c_1^{-1}, \\ \left(c_2^*\right)^{-1} &= c^{-1} + c_2^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

При условии (13) система уравнений (1) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \omega_{m1}^2 &= c m^{-1} - 2h^2, \\ \omega_{m2}^2 &= c_1^* m^{-1} - 2h^2, \\ \omega_{m3}^2 &= c_2^* m^{-1} - 2h^2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Из (14) получим выражения для определения m, c, ω_0, h:

$$m = \frac{\left[c_2 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right) - c_1 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\right]^2}{\left(c_2 - c_1\right)\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right)\left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m2}^2\right)}, \tag{15}$$

$$c = \left[c_2 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right) - c_1 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\right] \Big/ \left(\omega_{m3}^2 - \omega_{m2}^2\right), \tag{16}$$

$$\omega_0 = \left\{ \frac{\left(c_2 - c_1\right)\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right)}{c_2 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right) - c_1 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)} \right\}^{1/2}, \tag{17}$$

$$h = \left[1/2\left(\omega_0^2 - \omega_{m1}^2\right)\right]^{1/2} = \left\{0.5\left[c_1 \omega_{m3}^2 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right) - c_2 \omega_{m2}^2 \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right)\right] \Big/ \left[c_2 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m3}^2\right) - c_1 \left(\omega_{m1}^2 - \omega_{m2}^2\right)\right]\right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Представим приведенную жесткость (при условии физической реализуемости) в виде

$$c_1^* = c + c_1, \quad c_2^* = c + c_2, \tag{19}$$

где c_1, c_2 - как и ранее, пробные жесткости.

Из (14) при учете (19) определим параметр m:

$$m=\frac{c_2\left(\omega_{m2}^2-\omega_{m1}^2\right)+c_1\left(\omega_{m3}^2-\omega_{m1}^2\right)}{2\left(\omega_{m2}^2-\omega_{m1}^2\right)\left(\omega_{m3}^2-\omega_{m1}^2\right)}. \qquad (20)$$

Из (1) при учете (19), (20) получим систему уравнений для определения параметров c, h, ω_0

$$\left.\begin{aligned} c\left(\omega_{m2}^2-\omega_{m1}^2\right)-2c_1h^2&=c_1\omega_{m1}^2,\\ c\left(\omega_{m3}^2-\omega_{m1}^2\right)-2c_2h^2&=c_2\omega_{m3}^2.\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Соотношения (21) - система уравнений для определения параметров c, h , которые находим методом Крамера. Имеем:

$$\Delta=2\left[c_2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m2}^2\right)-c_1\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)\right],$$

$$\Delta_1=2c_1c_2\left(\omega_{m3}^2-\omega_{m1}^2\right),$$

$$\Delta_2=c_1\omega_{m1}^2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)+c_2\omega_{m3}^2\left(\omega_{m2}^2-\omega_{m1}^2\right),$$

Тогда

$$c=\frac{\Delta_1}{\Delta}=c_1c_2\left(\omega_{m3}^2-\omega_{m1}^2\right)\left[c_2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m2}^2\right)-c_1\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)\right]^{-1}, \qquad (22)$$

$$h=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\left\{\frac{c_1\omega_{m1}^2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)-c_2\omega_{m3}^2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m2}^2\right)}{2\left[c_2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m2}^2\right)-c_1\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)\right]}\right\}^{1/2}, \qquad (23)$$

$$\omega_0=\left[\frac{c_2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m2}^2\right)\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)}{c_2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m2}^2\right)-c_1\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)}\right]^{1/2} \qquad (24)$$

или

$$\omega_0=\frac{c_1\left(\omega_{m3}^2-\omega_{m1}^2\right)}{\left[c_2\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m2}^2\right)-c_1\left(\omega_{m1}^2-\omega_{m3}^2\right)\right]^{1/2}}. \qquad (25)$$

III ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ ПРОБНЫХ АМПЛИТУД

При силовом гармоническом возбуждении амплитуда Y_a установившихся вынужденных колебаний равна

$$Y_a=F_a\left\{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2h^2\right]^{1/2}\right\}^{-1}. \qquad (26)$$

Из (26) определим Y_{ai} на частотах $\omega_i, \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ $\left(\omega_i\neq\omega_0, \omega_{i+1}\neq\omega_0, \ \omega_{i+2}\neq\omega_0\right)$ и получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \left(k_{i1}^2-1\right)\omega_0^4+2\omega_0^2\left(\omega_{i+1}^2-k_{i1}^2\omega_i^2\right)+4h^2\left(k_{i1}^2\omega_i^2-\omega_{i+1}^2\right)+\left(k_{i1}^2\omega_i^4-\omega_{i+1}^4\right)&=0,\\ \left(k_{i2}^2-1\right)\omega_0^4+2\omega_0^2\left(\omega_{i+2}^2-k_{i2}^2\omega_i^2\right)+4h^2\left(k_{i2}^2\omega_i^2-\omega_{i+2}^2\right)+\left(k_{i2}^2\omega_i^4-\omega_{i+2}^4\right)&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

где

$$k_{i1}^2=\left(Y_{ai}/Y_{a(i+1)}\right)^2=\frac{\left(\omega_0^2-\omega_{i+1}^2\right)^2+4h^2\omega_{i+1}^2}{\left(\omega_0^2-\omega_i^2\right)^2+4h^2\omega_i^2}, \qquad (28)$$

$$k_{i2}^2=\left(Y_{ai}/Y_{a(i+2)}\right)^2=\frac{\left(\omega_0^2-\omega_{i+2}^2\right)^2+4h^2\omega_{i+2}^2}{\left(\omega_0^2-\omega_i^2\right)^2+4h^2\omega_i^2}. \qquad (29)$$

Выберем k_{i1} из условия

$$k_{i1} = \omega_{i+1}/\omega_i = Y_{ai}\big/Y_{a(i+1)}. \tag{30}$$

Тогда первое уравнение системы (27) принимает вид

$$\left[(\omega_i + 1/\omega_i)^2 - 1\right]\omega_0^4 + \omega_{i+1}^2\left(\omega_i^2 - \omega_{i+1}^2\right) = 0\,. \tag{31}$$

Из (31) определим ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_i\omega_{i+1}} = \omega_i\sqrt{k_{i1}} = \omega_i \cdot Y_{ai}\big/Y_{a(i+1)}. \tag{32}$$

Выберем k_{i2} из условия

$$k_{i2} = \omega_{i+2}/\omega_i\,. \tag{33}$$

Тогда второе уравнение системы (27) принимает вид

$$\left[(\omega_{i+2}/\omega_i)^2 - 1\right]\omega_0^4 - \omega_{i+2}^4\left(\omega_{i+2}^2 - \omega_i^2\right) = 0\,. \tag{34}$$

Из (34) определяется ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_i\omega_{i+2}} = \omega_i\sqrt{k_{i2}} = \omega_i \cdot Y_{ai}\big/Y_{a(i+2)}. \tag{35}$$

IV ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ ПРОБНЫХ ФАЗ

Для разности фаз $\Delta\varphi$ между вынужденными колебаниями и возбуждающим воздействием имеет место уравнение [2]

$$tg\Delta\varphi = 2h\omega\big/\left(\omega_0^2 - \omega^2\right). \tag{36}$$

При реализации режимов вынужденных колебаний на частотах ω_i, ω_{i+1} $(\omega_i \neq \omega_0, \omega_{i+1} \neq \omega_0)$ из (36) следует система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \omega_0^2 tg\Delta_i\varphi - 2h\omega_i &= \omega_i^2 tg\Delta_i\varphi, \\ \omega_0^2 tg\Delta_{i+1}\varphi - 2h\omega_{i+1} &= \omega_{i+1}^2 tg\Delta_{i+1}\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

из которой определяются неизвестные ω_0, h по формулам:

$$\omega_0 = \frac{\omega_i\omega_{i+1}\left(\omega_{i+1}tg\Delta_{i+1}\varphi - \omega_i tg\Delta_i\varphi\right)}{\omega_i tg\Delta_{i+1}\varphi - \omega_{i+1}tg\Delta_i\varphi}, \tag{38}$$

$$h = \frac{\left(\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2\right)tg\Delta_i\varphi\, tg\Delta_{i+1}\varphi}{2\left(\omega_i tg\Delta_{i+1}\varphi - \omega_{i+1}tg\Delta_i\varphi\right)} = \frac{\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2}{2\left(\dfrac{tg\Delta_i\varphi}{\omega_i} - \dfrac{tg\Delta_{i+1}\varphi}{\omega_{i+1}}\right)}. \tag{39}$$

Принимая во внимание (39), определим из первого уравнения системы (37) параметр m методом пробной массы (Δm).
Имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{c}{m}tg\Delta_i\varphi &= 2h\omega_i + \omega_i^2 tg\Delta_i\varphi, \\ \frac{c}{(m + \Delta m)}tg\Delta_k\varphi &= 2h\omega_k + \omega_k^2 tg\Delta_k\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

из которой найдем выражение для параметра m

$$m = \Delta m\frac{\omega_k\left(2h + \omega_k tg\Delta_k\varphi\right)tg\Delta_i\varphi}{\left(\omega_i^2 - \omega_k^2\right)tg\Delta_i\varphi\, tg\Delta_k\varphi + 2h\left(\omega_i tg\Delta_k\varphi - \omega_k tg\Delta_i\varphi\right)}. \tag{41}$$

Из первого уравнения системы (40) при учете (41) определим параметр c :

$$c = \frac{m\left(2h\omega_i + \omega_i^2 tg\Delta_i\varphi\right)}{tg\Delta_i\varphi} = \frac{\Delta m\omega_i\omega_k\left(2h + \omega_i tg\Delta_i\varphi\right)\left(2h + \omega_k tg\Delta_k\varphi\right)}{\left(\omega_i^2 - \omega_k^2\right) tg\Delta_i\varphi tg\Delta_k\varphi + 2h\left(\omega_i tg\Delta_k\varphi - \omega_k tg\Delta_i\varphi\right)}. \quad (42)$$

Таким образом, предложенный модифицированный резонансный метод параметрической идентификации, основанный на использовании метода пробных параметров, позволяет получить аналитические соотношения для определения параметров в замкнутой форме.

SUMMARY

For determination of inertial /rigidity and dissipation parametre the methods of trial sizes: trial weights, trial factors of rigidity, trial amplitudes and trial phases are applied. Analytical correlations for determination of parameters are received.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Божко А.Е., Личкатый Е.А., Полищук О.Ф. и др. Резонансные виброиспытательные системы / Под ред. Божко А.Е.; АН Украины, Ин-т проблем машиностроения. - Киев: Наук. думка, 1992. - 248 с.- JSBN5 - 12-002956-6.
2. Василенко Н.В. Теория колебаний. - Киев: Вища школа, 1992. - 430 с.
3. Редько С.Ф., Ушколов В.Ф., Яковлев В.П. Идентификация механических систем. Определение динамических характеристик и параметров. - Киев: Наук. думка, 1985. - 216 с.