условие неизвестно, теплообмен происходит одновременно излучением и вынужденной конвекцией.

Таким образом граничные условия имеют вид:

$$q(0;t) = 0 \tag{2}$$

$$q(1;t) = \beta\left[(u(1;t)+1)^4 - \theta_c^{\,4}\right] + \eta\left[(u(1;t)+1) - \theta_c\right] \tag{3}$$

Предположим, что в некоторой точке стержня, например, $x_1 = 0{,}5$ проводились измерения температуры и температура в этой точке известна $u_m(x)$. Задача состоит в определении коэффициентов β, q по результатам этого измерения, т.е. в идентификации граничных условий.

Для восстановления функции $u(1;t)$мы используем равенство (2) и известную температуру в сечении $x = 0{,}5$.

РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Чаплыгин А.А., СумГУ

Рассматривается одномерная задача нагрева тонкого стержня внутренними источниками тепла с учётом конечности скорости его распространения. Теплопроводность в теле в данном случае описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} &\rho\, c \frac{\partial T}{dt} = -div\, \overline{q} + q_V; \\ &\tau^* \frac{\partial \overline{q}}{dt} = -\lambda\, grad\, T - \overline{q}. \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ- плотность тела, c- его удельная теплоёмкость, T- температура, $\overline{q}$- вектор удельного теплового потока, q_V- объёмная мощность источников тепла в теле, τ^*- время релаксации (параметр среды).

Изменение q должно происходить с временем меньшим или сравнимым с τ^*.

Система (1) сводится к одному дифференциальному уравнению теплопроводности относящемуся к гиперболическому типу:

$$\tau^* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_V}{c\rho}, \quad \text{где } a = \frac{\lambda}{c\rho} \qquad (2).$$

Зададим постановку задачи соответствующей данному уравнению:

1) рассмотрим стержень длиной l;
2) теплофизические свойства материалы будем считать не зависящими от температуры;
3) температуру в начальный момент $t = 0$ положим T_0;
4) внутренние источники, действующие в теле, постоянной интенсивности;
5) тепловой поток на границе равен нулю;
6) на концах стержня поддерживается постоянная температура T_0.

Для решения поставленной задачи будем использовать метод характеристик. Разобьём отрезок $[0;l]$ на n частей с шагом $h = \frac{l}{n}$, получим точки $x_k = kh$, где $k = \overline{0,h}$. Через эти точки проведём характеристики 1-го и 2-го семейства и покроем всю область сеткой. Характеристиками будут прямые линии с угловыми коэффициентами $\pm\sqrt{\frac{a}{t^*}}$.

Условия на характеристиках могут быть заданы в виде:

$$\begin{aligned} &\lambda dT + \sqrt{a\tau^*}\,dq + \left(q - \sqrt{a\tau^*}\,q_V\right)dx = 0 \\ &\lambda dT - \sqrt{a\tau^*}\,dq + \left(q + \sqrt{a\tau^*}\,q_V\right)dx = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$